高等学校函授教学参考书

（兼作高等教育自学参考用书）

线性代数
学习与解题指导

李远聆　袁美月　编

武汉工业大学出版社

高等学校函授教学参考书

线性代数学习与解题指导

李远聆　袁美月　编

武汉工业大学出版社

线性代数学习与解题指导

李远聆　袁美月　编
责任编辑　　韩瑞根

*

武汉工业大学出版社出版发行
（武昌珞狮路14号）
武汉大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：6.875字数：140000
1988年8月第一版　1988年8月第一次印刷
印数：1—9000
ISBN　7-5629 0225-9/O·0012
定价：2.50元

说　　明

本书是配合自学高等学校函授教材（兼作高等教育自学用书）《线性代数》（彭旭麟编，高等教育出版社，1985年版）而编写的。

全书分章与函授教材一致。各章内容包括：(一)基本要求；(二)自学建议；(三)解题分析；(四)补充习题。书末有附录、试题汇编与习题答案。本书编写时也参照了全日制高等工科学校《工程数学·线性代数》教学基本要求，因此，本书也可兼作工科全日制学生学习《工程数学·线性代数》的教学参考书（书中超过教学基本要求的内容皆已用 * 号标明）。

本书各部分的编写，分别由李远聆（第一、二、三章）与袁美月（第四、五章）执笔，附录主要取自本院《线性代数》函授教材1982年的试用本（由袁美月稍加整理）。

本书在编写过程中，承彭旭麟教授热情指导，并对初稿作过部分校核工作，编者在此表示感谢。限于编者的水平，书中缺点和错误在所难免，诚恳希望读者提出宝贵意见，以利进一步修改。

编者　1988年 8 月于

武汉水利电力学院

目　录

第一章 行 列 式

（一）基本要求

1 知道 n 阶行列式的定义

（i）用递推方式定义 n 阶行列式

（ii）用反序定义 n 阶行列式

2 掌握行列式的性质

（i）掌握教材中行列式的性质1、2、3、4、5（含义及证明）；

（ii）掌握教材中的有关推论

3 掌握行列式的计算

（i）掌握计算行列式的降阶法

（ii）会利用行列式的性质（特别是使行列式的元素尽可能地变为零或使行列式化为三角行列式）简化计算

（iii）知道拉普拉斯定理及行列式的乘法定理

4 克莱姆法则

对 n 元含 n 个方程的线性方程组，在系数行列式异于零时，掌握其求解的克莱姆公式

重点 克莱姆法则（包含行列式的计算）．

难点

（i）用反序定义 n 阶行列式

（ii）n 阶行列式计算

(二)自学建议

1　阅读教材§1～§5，完成其中练习题1～7（对练习题2，要求能证明）

2　理解教材中的小结，阅读本章[①]的(三)解题分析

3　完成教材综合习题1～11题

4　了解教材 $P20$ 的附录，完成教材综合习题第12题，再适量完成本章的(四)补充习题。

5　按教材小结中的要求，参照本章的(一)进行小结。

(三)解题分析

例1　试证

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

证一　观察 D 的特征，与欲证结论比较，知 D 的各行元素平方和与欲证结论相近。因此，先作 D 的转置行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

再计算

① 这里的“章”是指本书的章，下同。

$$D^2 = DD = DD' = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 \text{①}$$

故 $D = \pm (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

现确定 D 的符号（这一步往往容易被忽略），可令 $b = c = d = 0$，有

$$D = \begin{vmatrix} a & & & 0 \\ & a & & \\ & & a & \\ 0 & & & a \end{vmatrix} = a^4 > 0$$

故 $D = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$

证二 利用行列式的性质，当 $a \neq 0$时，有

$$D = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a^2 & b & c & d \\ -ab & a & -d & c \\ -ac & d & a & -b \\ -ad & -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{a} \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & a & -d & c \\ 0 & d & a & -b \\ 0 & -c & b & a \end{vmatrix}$$

---

① 这里，运用了行列式的乘法规则（行列式的乘法规则之所以如此规定，是要与以后矩阵乘积规则一致，以便讨论线性变换的运算）。

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a}\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

当 $a=0$时，请读者试证。

例2 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解 这里，由于有很多元素相同，可设法将 D_n 化为"三角行列式"。

$$D_n \xlongequal[\text{第1列}]{\text{将第 }2,3,\cdots,n\text{ 列加到}} \begin{vmatrix} \frac{(1+n)n}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

按第一列展开后，将第1行乘-1加到第2，3，…，$n-1$行得

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

将第 1，2，3，…，$n-2$列加到第 $n-1$列得

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

这是下三角行列式，故得

$$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\cdot(-1)^{n-1}\cdot n^{n-2}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

解 化为“下三角行列式”，将主对角线邻下的诸元素 1 变为 0 。为此，将第 1 行乘-1后加到第 2 行，再将所得第 2 行乘-1后加到第 3 行，依此类推，有

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}
$$

$$=1$$

例 4 计算下列各行列式（D_k 为 k 阶行列式）

1) $$D_n=\begin{vmatrix}
x & a & a & \cdots & a \\
a & x & a & \cdots & a \\
a & a & x & \cdots & a \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a & a & a & \cdots & x
\end{vmatrix}$$

2) $$D_{2n}=\begin{vmatrix}
a_n & & & & & b_n \\
& \ddots & & 0 & \iddots & \\
0 & & a_1 & b_1 & & 0 \\
& & c_1 & d_1 & & \\
& \iddots & & 0 & \ddots & \\
c_n & & & & & d_n
\end{vmatrix}$$

解 1)设法化为三角行列式，注意各行元素之和相同，于是有

$$D_n=\begin{vmatrix}
x+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\
x+(n-1)a & x & a & \cdots & a \\
x+(n-1)a & a & x & \cdots & a \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x+(n-1)a & a & a & \cdots & x
\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

2)设法建立递推关系式。先按第一行展开得

$$D_{2n}=a_n\begin{vmatrix} a_{n-1} & & & & & b_{n-1} & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & & \vdots \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2n}b_n\begin{vmatrix} 0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1} \\ c_n & 0 & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

再继续用展开定理，得

$$D_{2n}=a_nd_n\cdot D_{2(n-1)}+(-1)^{1+2n}b_n\cdot(-1)^{2n-1+1}c_n\cdot D_{2(n-1)}$$

于是有递推公式

$$\begin{aligned} D_{2n}&=(a_nd_n-b_nc_n)\cdot D_{2(n-1)} \\ &=(a_nd_n-b_nc_n)\cdot(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})\cdot D_{2(n-2)} \\ &=\cdots \\ &=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i) \end{aligned}$$

例5 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解 由 D_{n+1} 的特征知，可以利用范德蒙行列式，经过换行与换列①，可变原行列式为

$$D_{n+1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ a-n & \cdots & a-2 & a-1 & a \\ (a-n)^2 & \cdots & (a-2)^2 & (a-1)^2 & a^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-n)^{n-1} & \cdots & (a-2)^{n-1} & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \\ (a-n)^n & \cdots & (a-2)^n & (a-1)^n & a^n \end{vmatrix}$$

再利用 $n+1$阶范德蒙行列式的结果（令 $x_1=a-n$，$x_2=a-n+1$，…，$x_{n+1}=a$），有

$$D_{n+1}=\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j)$$

例 6 证明

$$D=\begin{vmatrix} \sin(\alpha_1+\beta_1) & \sin(\alpha_1+\beta_2) & \sin(\alpha_1+\beta_3) \\ \sin(\alpha_2+\beta_1) & \sin(\alpha_2+\beta_2) & \sin(\alpha_2+\beta_3) \\ \sin(\alpha_3+\beta_1) & \sin(\alpha_3+\beta_2) & \sin(\alpha_3+\beta_3) \end{vmatrix}=0$$

证 先利用三角公式展开看看，原式左边化为

---

① 只依序换行或上、下对称地换行皆可得同样结果。

$$D=\begin{vmatrix} \sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1 & \sin\alpha_1\cos\beta_2+\cos\alpha_1\sin\beta_2 & \sin\alpha_1\cos\beta_3+\cos\alpha_1\sin\beta_3 \\ \sin\alpha_2\cos\beta_1+\cos\alpha_2\sin\beta_1 & \sin\alpha_2\cos\beta_2+\cos\alpha_2\sin\beta_2 & \sin\alpha_2\cos\beta_3+\cos\alpha_2\sin\beta_3 \\ \sin\alpha_3\cos\beta_1+\cos\alpha_3\sin\beta_1 & \sin\alpha_3\cos\beta_2+\cos\alpha_3\sin\beta_2 & \sin\alpha_3\cos\beta_3+\cos\alpha_3\sin\beta_3 \end{vmatrix}$$

细心观察其特征，并利用行列式乘法定理，变形为

$$D=\begin{vmatrix} \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & 0 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \sin\beta_1 & \sin\beta_2 & \sin\beta_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=0\cdot 0=0$$

例 7 证明

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0$$

证 注意第 1 行各元素皆有 a^2，第 2、3、4 行类似，分别有 b^2、c^2、d^2，于是将第 1 列反号加到第 2、3、4 列后，得

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0$$

例 8 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

解 联想到范德蒙行列式，试作

$$P_n(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}$$

于是 $P_n(x)$中 x^{n-1} 项的系数反号就是 D_n。而

$$P_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

其中 x^{n-1} 项的系数反号为 D_n，即

$$D_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

利用此结果，可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (b-a)(c-a)(d-a) \\ \cdot (c-b)(d-b) \\ \cdot (d-c) \\ \cdot (a+b+c+d) \end{matrix}$$

例 9 证明

$$D = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

证一 观察欲证之结论，可将第2, 3, …, n 列分别乘以 $x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 加到第 1 列得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + x^n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

再按第 1 列展开得

$$D = (-1)^{n+1}(x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

证二 按末行展开也可得证，从略。

例10 解下列方程组

1) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+z-w=8 \\ 2x-y-3w=3 \\ 3x+3y+5z-6w=5 \end{cases}$， 2) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3 = 2 \\ x_2+2x_3+3x_4 = -2 \\ x_3+2x_4+3x_5 = 2 \end{cases}$

解 用克莱姆法则

1） 先分别计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$ 将第2，3列分别减去第1列，然后按第1行展开，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}=18+6=24\neq 0$$

同法算出 $D_1=24$，$D_2=120$，$D_3=-120$，$D_4=-48$，

故 $x=\dfrac{D_1}{D}=1$，$y=\dfrac{D_2}{D}=5$，$z=\dfrac{D_3}{D}=-5$，

$w=\dfrac{D_4}{D}=-2$。

2） 先利用行列式性质将有关元素化为零，依次计算各有关行列式得