普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套参考书

物理学教程

（第二版）

学习指导

马文蔚　朱　莉　主　编
宗占国　毕冬梅　副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

物理学教程

（第二版）

学习指导

马文蔚　朱　莉　主　编

宗占国　毕冬梅　副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是为配合马文蔚等改编的《物理学教程》（第二版）上、下册而编写的学习指导书。全书共分为十六章，章节顺序都与主教材同步。每章包括教学基本要求，基本概念及规律，典型例题指导三个部分。它帮助学生总结教材的主要知识点以及教学的重点和难点，注重训练学生对基本概念和基本规律的理解和运用，培养学生分析问题、解决问题的能力。全书共精选了112道典型例题，可作为教材例题的很好补充。

本书可供选用马文蔚等改编的《物理学教程》（第二版）上、下册作为教材的高等院校师生作为教学和学习的参考书，也可供其他相关院校的师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

物理学教程（第2版）学习指导/马文蔚，朱莉主编.
北京：高等教育出版社，2008.1
ISBN 978-7-04-022669-0

Ⅰ.物… Ⅱ.①马…②朱… Ⅲ.物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第176941号

策划编辑 郭亚嫘 责任编辑 王文颖 封面设计 张 志 责任绘图 杜晓丹
版式设计 马敬茹 责任校对 朱惠芳 责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京印刷集团有限责任公司印刷二厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2008年1月第1版
印 张	10	印 次	2008年1月第1次印刷
字 数	180 000	定 价	13.10元

物料号 22669-00

前　　言

本书是为配合马文蔚等改编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《物理学教程》(第二版)上、下册而编写的。本书的章节和顺序都与主教材同步,每章包括教学基本要求,基本概念及基本规律,典型例题指导三个部分。教学基本要求部分,简明扼要地指出每章应该掌握、理解、了解的主要内容;基本概念及基本规律部分,重点突出地归纳和总结每章的知识点,并指出掌握、理解和运用时的要点,更好地帮助同学们理清思路,抓住重点,突破难点;典型例题指导部分,补充一定数量的典型例题,给出解题思路、解题方法和解题步骤,注重培养学生分析问题、解决问题的能力,可用于教师习题课讲授或指导学生课后自学。

本书由马文蔚教授和朱莉教授主编。参加编写工作的有朱莉(第一章至第七章、第九章和第十二章、宗占国(第十四章)、毕冬梅(第八章、第十章和第十三章)、宋立军(第十一章)、王丽丽(第十五章和第十六章)。武汉大学潘守清教授认真审阅了全书并提出了宝贵的修改意见,在此,编者致以真诚的感谢。

由于编者水平有限,错误和不当之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2007.5

目　　录

第一章　质点运动学

一、教学基本要求

1. 理解参考系、坐标系、质点的概念.

2. 掌握描述质点运动的四个基本物理量:位矢、位移、速度、加速度的矢量性、相对性和瞬时性.

3. 理解位移与位矢、位移与路程、平均速度与瞬时速度、速度与速率的区别.

4. 熟练掌握用直角坐标系或自然坐标系计算质点平面运动时的速度、加速度、角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度.

5. 掌握应用微积分计算运动学两类问题的方法,即已知运动方程,求速度和加速度;已知速度、加速度及初始条件,求运动方程.

6. 了解相对运动.

二、基本概念及基本规律

1. 参考系、坐标系、质点

参考系　为描述物体的运动而选的标准物叫做参考系.

坐标系　为了定量描述质点的运动,需在参考系上选择一个坐标系. 如:直角坐标系、极坐标系和自然坐标系等.

质点　在一定条件下,可以忽略物体的大小和形状,把物体当作是一个有一定质量的点,称为质点. 质点是一个理想模型.

2. 位置矢量、位移、速度、加速度

位置矢量(位矢)　从坐标原点指向质点所在位置的矢量称为位置矢量,用 $\boldsymbol{r}$ 表示.

运动方程　位矢随时间变化的关系式称为质点的运动方程. 即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

轨迹方程(参数方程)　运动方程消去 t,便得到质点运动的轨迹方程.

位移矢量(位移)　位矢在一段时间 Δt 内的增量,即自始点 A 指向终点 B

的有向线段,用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示.

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A$$

平均速度 在 Δt 时间内,质点的位移和时间间隔的比值称为质点在这段时间内的平均速度,用 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 表示.

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

瞬时速度(速度) $\Delta t\to0$ 时,平均速度的极限值,或位矢对时间的一阶导数称为瞬时速度(简称速度),用 $\boldsymbol{v}$ 表示.

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

平均加速度 在 Δt 时间内,质点的速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}$,则单位时间内的速度增量即平均加速度为

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度(加速度) $\Delta t\to0$ 时,平均加速度的极限值称为瞬时加速度(简称加速度),或速度对时间的一阶导数(位矢对时间的二阶导数),用 $\boldsymbol{a}$ 表示.

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

3. 角量以及角量和线量之间的关系

角坐标 在极坐标系下,某一时刻的位矢与 Ox 轴之间的夹角称为角坐标,用 θ 表示. 注意 θ 是有正负的,若选定沿逆时针方向转动的 θ 为正,则顺时针方向转动的 θ 就为负.

角速度 角坐标 $\theta(t)$ 随时间的变化率称为角速度,用 ω 表示.

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度 角速度 $\omega(t)$ 随时间的变化率称为角加速度,用 α 表示.

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

角量与线量之间的关系

$$s=r\theta$$

$$v=r\omega$$

$$a_t=r\alpha$$

$$a_n=r\omega^2$$

式中 r 是质点作圆周运动时圆的半径.

4. 运动叠加原理(运动独立性原理)

一个运动可以看成由几个同时进行的各自独立的运动叠加而成,称为运动

叠加原理或运动独立性原理.

例如抛体运动这类匀变速平面运动,可看成两个同时进行的各自独立的直线运动的叠加.

5. 相对运动

描述任何质点的运动都应该选择一定的参考系,用不同的参考系描述同一运动的质点,将有不同的结果.

设有两个参考系,一个为S系,另一个为S′系,S′系沿 Ox 轴以恒定速度 $\boldsymbol{u}$ 相对于S系运动. 如图1-1所示,一个质点在两个参考系中位矢和速度变换式分别为:

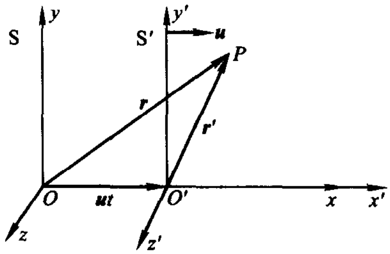


图1-1

位矢变换式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}t$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为质点相对S系的位矢,$\boldsymbol{r}'$为质点相对S′系的位矢,$\boldsymbol{u}t$ 为S′系相对S系的位矢.

速度变换式——伽利略速度变换式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

式中$\boldsymbol{v}$ 为质点相对S系的速度(绝对速度),$\boldsymbol{v}'$为质点相对于S′系的速度(相对速度),$\boldsymbol{u}$ 为S′系相对S系的速度(牵连速度).

6. 描述质点运动的物理量在三种常用坐标系中的运用

直角坐标系

① 位矢　矢量式:$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases} 大小: |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ 方向: \begin{cases} 三维空间: \cos\alpha = \dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|}, \cos\beta = \dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|}, \cos\gamma = \dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|} \\ 二维空间: \alpha = \arctan\dfrac{y}{x} \quad (\alpha 为 \boldsymbol{r} 与 Ox 轴之间的夹角) \end{cases} \end{cases}$$

② 运动方程　矢量式:$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$

分量式:$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$

③ 轨迹方程　$z(x,y)$

④ 位移　　矢量式：$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=(x_B-x_A)\boldsymbol{i}+(y_B-y_A)\boldsymbol{j}+(z_B-z_A)\boldsymbol{k}$

$$=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

$$\begin{cases}\text{大小：}|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\\ \text{方向：}\boldsymbol{r}_A\text{ 指向 }\boldsymbol{r}_B\text{ 的方向}\end{cases}$$

⑤ 平均速度　矢量式：$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{k}=\bar{v}_x\boldsymbol{i}+\bar{v}_y\boldsymbol{j}+\bar{v}_z\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases}\text{大小：}\bar{v}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\\ \text{方向：}\Delta\boldsymbol{r}\text{ 的方向}\end{cases}$$

⑥ 速度　　矢量式：$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}+=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases}\text{大小：}|\boldsymbol{v}|=v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\\ \text{方向：沿该点曲线的切线方向}\end{cases}$$

⑦ 加速度　矢量式：$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$

$$\begin{cases}\text{大小：}|\boldsymbol{a}|=a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\\ \text{方向：}\Delta\bar{\boldsymbol{v}}\text{的极限方向}\end{cases}$$

自然坐标系

如图 1－2 所示，在质点作平面运动，并且运动轨迹 $s=s(t)$ 已知的情况下，我们可以选定轨迹上任意一点 O 为原点，用轨迹的长度 s 来描述质点的位置，用 $\boldsymbol{e}_t$ 表示质点沿轨迹切向的单位矢量，$\boldsymbol{e}_n$ 表示沿轨迹法向（指向凹面）的单位矢量，$\boldsymbol{e}_t\perp\boldsymbol{e}_n$、方向随时间而变化，这种顺着已知的质点运动轨迹建立起来的坐标系称为自然坐标系.

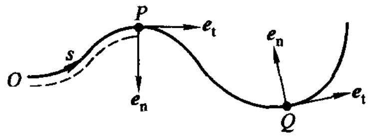


图 1－2

① 自然坐标　$s=s(t)$

② 速度　　$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$　　（$\boldsymbol{v}$ 沿轨迹切线方向）

③ 加速度　　矢量式：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n=r\alpha\boldsymbol{e}_t+r\omega^2\boldsymbol{e}_n$

$$\begin{cases}\text{大小：}a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}\\ \text{方向：}\varphi=\arctan\dfrac{a_n}{a_t}\end{cases}\quad(\varphi\text{ 为 }\boldsymbol{a}\text{ 与 }\boldsymbol{a}_t\text{ 之间的夹角})$$

式中 ρ 是质点运动轨迹上某点的曲率半径，$\boldsymbol{a}_t$ 为切向加速度，$\boldsymbol{a}_n$ 为法向加速度，如图 1－3 所示.

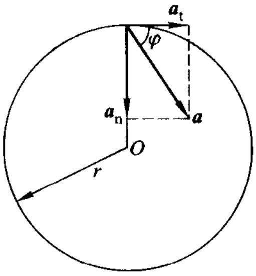


图 1－3

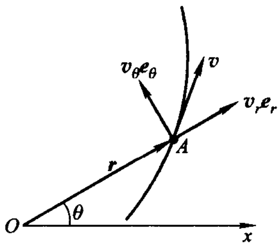


图 1－4

平面极坐标系

对于一个质点限制在平面内运动的情形，也可采用图 1－4 所示的平面极坐标系. 这时质点的位置可用位矢 $\boldsymbol{r}$ 和 θ（$\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴之间的夹角）来确定，这种以 $(\boldsymbol{r},\theta)$ 为坐标的参考系称为平面极坐标系，设以 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 代表沿径向和横向（同径向垂直指向 θ 角增加的方向）的单位矢量，它们的数值不变，但方向均随质点的位置而变，则

① 位矢　$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$

② 速度　$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$

7. 弄清以下几个问题

(1) 位移和位矢有何区别？

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和位矢 $\boldsymbol{r}$ 虽然都是矢量，但二者是两个不同的物理量. 位矢是在某一时刻，以坐标原点为起点，以运动质点所在位置为终点的有向线段，而位移是在一段时间间隔内，从质点的起始位置指向质点的终止位置的有向线段；位矢描述的是某一时刻运动质点在空间中的位置，而位移描述的是某一段时间间隔内运动质点位置变动的大小和方向；位矢与时刻相对应，位移与时间间隔相对应. 在一般情况下，两者不相同.

(2) 位移和路程有何区别？在什么情况下两者的量值相等？

路程是在某段时间内，质点所经路径（轨迹）的总长度，一般为曲线的弧长，而位移是在这段时间内，从起始位置指向终止位置的有向线段；路程是标量，只有大小，无方向，并且恒为正. 位移是矢量，不仅有大小，而且有方向；曲线运动时，$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$. 只有在质点作单方向直线运动时，位移的大小与路程的量值才相等. 或当 $\Delta t\to 0$ 时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$.

(3) 平均速度与瞬时速度有何区别?

平均速度$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$与一段时间间隔相联系,只能粗略地描述质点的运动. 瞬时速度$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$是当时间 $\Delta t\to 0$ 时平均速度的极限值,与某一时刻相联系,精确地描述质点的运动.

(4) 平均速度和平均速率有何区别? 在什么情况下两者的量值相等?

平均速率是运动质点所经过的路程与时间的比值,即 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$是标量;平均速度是运动质点的位移与时间的比值,即$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$是矢量. 一般情况下,$|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$,只有当质点作单方向直线运动时,平均速度的大小与平均速率的量值才相等.

(5) 速度和速率有何区别?

速率 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,描述质点运动的快慢,只有大小,无方向,是标量;而速度$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,描述了质点运动的快慢和方向,不仅有大小,而且有方向,是矢量. 因为当 $\Delta t\to 0$ 时,$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$,所以,$|\boldsymbol{v}|=v$.

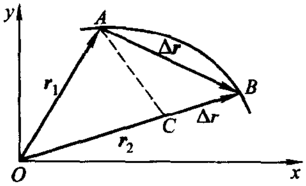


图 1 - 5

(6) 在曲线运动中 Δr 与 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 是否相同?

$\Delta r=|r_2|-|r_1|$表示两位矢的绝对值之差,而$|\Delta \boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|$表示两位矢之差的绝对值. 在一般情况下,$\Delta r$ 与 $|\Delta \boldsymbol{r}|$并不相等. 在图 1 - 5 中,设质点从 A 点运动到 B 点,则 $\Delta r=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|=\overline{BC}$,$|\Delta \boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|=\overline{AB}$. 二者并不相等.

三、典型例题指导

运动方程是运动学问题的核心. 实际遇到的运动学问题,大致可以分成以下两种类型.

第一类问题:已知运动方程 $\boldsymbol{r}(t)$,求速度和加速度. 这类问题可根据速度和加速度的定义式 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 将已知的 $\boldsymbol{r}(t)$ 函数对时间 t 求导数而求得. 见例 1 - 1,例 1 - 2,例 1 - 3,例 1 - 4.

第二类问题:已知速度及初始条件求运动方程,或已知加速度及初始条件求速度和运动方程. 这类问题要应用积分法,在计算上较为复杂一些. 见例 1 - 6,例 1 - 7.

例 1-1 一质点沿 x 轴作直线运动,其运动方程为 $x=10+4t-t^2$(SI).① 求:(1) 第 3 s 末的速度和加速度.(2) 第 1 s 末到第 3 s 末的位移、平均速度和路程.

解 这是一维直线运动,故矢量号可略去.

(1) 任一时刻的速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4-2t$$

任一时刻的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2$$

将 $t=3$ 代入,得

$$v_3=-2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1},\qquad a_3=-2\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

(2) 第 1 s 末到第 3 s 末的位移

$$\Delta x=x_3-x_1=13-13=0$$

第 1 s 末到第 3 s 末的平均速度

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=0$$

由 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4-2t=0$ 可知,质点的换向时刻为 $t=2$ s,所以,第 1 s 末到第 3 s 末质点走过的路程为

$$s=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|=|14-13|+|13-14|=2\ (\mathrm{m})$$

例 1-2 已知质点的坐标为 $x=2t, y=6-2t^2$. 求:(1) 1~2 s 内的 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和 $\bar{\boldsymbol{v}}$. (2) $t=1$ s 时刻的瞬时速度 $\boldsymbol{v}_1$. (3) 任意时刻的加速度. 式中各量均采用 SI 单位.

解 这是二维直角坐标系下的平面运动,可用矢量式求解.

(1) 任意时刻的位矢

$$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(6-2t^2)\boldsymbol{j}$$

将 $t=1$ 和 $t=2$ 代入得,1s 和 2s 时刻的位矢

$$\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

---

① 本书中,方程之后括注 SI 表示方程中的各量均采用"SI 单位". 并请注意,"SI 单位"并非"国际单位制单位"的缩写,而是国际单位制中构成一贯制的那些单位(相当于国际单位制的主单位),这些单位除质量的单位 kg 外,均不带 SI 词头. 例如长度的"SI 单位"只有一个,即 m,而 cm,mm,μm 以及 km,mm 等等,虽然都是国际单位制单位,但不是"SI 单位"(长度的"SI 单位"不带 SI 词头).

1 ~2s 内的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$$

1 ~2s 内的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$$

（2）由$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 得任一时刻的速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$$

将 $t=1$ 代入得,1s 时的速度

$$\boldsymbol{v}_1=2i-4j$$

（3）由 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$得,任一时刻的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4\boldsymbol{j}$$

例 1 -3　如图所示,在离水面离度为 h 的岸边有人用绳子跨过一定滑轮用恒定的速度 v_0 拉船靠岸,试分析船运动的速率比 v_0 大还是比 v_0 小? 船是否作匀速运动?

解　设船的速率为 u,t 时刻船位于 A 处,绳长为 l,船离岸边 O 点的距离为 x,船前进时,绳长 l、x 和 α 角都在改变,在三角形 AOB 中,

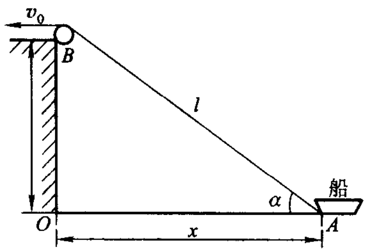
$$l^2=x^2+h^2$$

两边求导数得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

因为 $v_0=\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$,$u=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,故船的速度

$$u=\frac{l}{x}v_0=\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0=\frac{v_0}{\cos\alpha}$$



例 1 -3 图

可见船速率 u 大于绳头速度 v_0. 船前进时 α 角增大,v_0 是恒量,故船的速率越来越快,船作加速运动,设船的加速度为 a,则

$$a=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v_0\right)=-\frac{h^2}{x^3}v_0^2\text{（负号表示加速度的方向指向岸边）}$$

船作变加速直线运动.

那么为什么不能用 $u=v_0\cos\alpha$ 来求船速呢? 这是因为虽然绳头的速率为

v_0,但由于角 α 也在变化,所以通过定滑轮后绳上各点的速率并不是 v_0,从定滑轮到船头的这段绳上各点速率均不相同,绳上各点既有平动又有绕定滑轮的转动,是两种运动的合成,因此与船相连处绳尾的速率大于 v_0,故不能用 $u=v_0\cos\alpha$ 来求船速.

例 1-4　跳伞运动员从 1200 m 高空下跳,起初不打开降落伞作加速运动.由于空气阻力的作用,会加速到一"终极速率"200 km · h^{-1}而开始匀速下降.下降到离地面 50 m 处时打开降落伞,很快速率会变为 18 km · h^{-1}而匀速下降着地.若起初加速运动阶段的平均加速度按 $g/2$ 计,此跳伞运动员在空中一共经历了多长时间?

解　题中已知条件为:$h_0=1200\ \mathrm{m}, v_0=0, v_1=200\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}=55.6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_2=18\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $h_2=50\ \mathrm{m}, a=\dfrac{g}{2}$,跳伞运动员在空中一共经历了三段时间.

第一段时间,运动员加速下落,根据 $v_1=v_0+at_1$ 得

$$t_1=\frac{v_1}{g/2}=\frac{2\times55.6}{9.8}\mathrm{s}=11.3\ \mathrm{s}$$

加速下落的距离

$$h_1=\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}a\frac{v_1^2}{a^2}=\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g/2}=\frac{v_1^2}{g}=\frac{55.6^2}{9.8}\mathrm{m}=315\ \mathrm{m}$$

第二段时间,运动员以速率 v_1 匀速下落

$$t_2=\frac{h_0-h_1-h_2}{v_1}=\frac{1200-315-50}{55.6}\ \mathrm{s}=15.0\ \mathrm{s}$$

第三段时间,运动员以速率 v_2 匀速下落

$$t_3=\frac{h_2}{v_2}=\frac{50}{5}\ \mathrm{s}=10\ \mathrm{s}$$

运动员在空中总共经历的时间为

$$t=t_1+t_2+t_3=11.3\ \mathrm{s}+15.0\ \mathrm{s}+10\ \mathrm{s}=36.3\ \mathrm{s}$$

例 1-5　一质点的运动方程为 $x=x(t), y=y(t)$,计算质点的速度大小时,(1)有人先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,然后根据 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,求得 v 的值.(2)有人先计算 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,然后求得 v 的值,即 $v=\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$.你认为哪种方法正确?方法不正确的错在哪里?

解　第二种方法正确.因为速度是矢量,满足关系:

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$$

在上式求导中,因 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 是单位恒矢量,因此 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=0$,$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}=0$. 所以速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

第一种方法只考虑了位矢的量值 r 随时间 t 的变化,而没有考虑位矢方向的变化,所以第一种方法是错误的. 即

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\frac{2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xv_x+yv_y}{r}\neq\sqrt{v_x^2+v_y^2}.$$

$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 只是径向速度的大小.

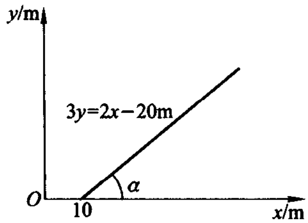
例 1-6 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$,在 $t=0$ 时,$\boldsymbol{r}_0=10\boldsymbol{i}$,$v_0=0$. 求:(1) 任意时刻的速度和位矢;(2) 质点为 Oxy 平面上的轨迹方程,并画出轨迹的示意图,式中各量单位均采用 SI 单位.

解 该题属于质点运动学的第二类问题,已知加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ 及初始条件,求速度及运动方程,采用积分的方法来解决.

(1) 由加速度定义式 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 及初始条件 $t_0=0$ 时,$v_0=0$,积分可得

$$\int_0^v \mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t=\int_0^t(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{v}=6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}$$



例 1-6 图

又由 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 及初始条件 $t=0$ 时,$\boldsymbol{r}_0=10\boldsymbol{i}$,积分可得

$$\int_{r_0}^{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t=\int_0^t(6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{r}=(10+3t^2)\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}$$

(2) 由上述结果可得质点运动方程的分量式,即

$$x=10+3t^2$$

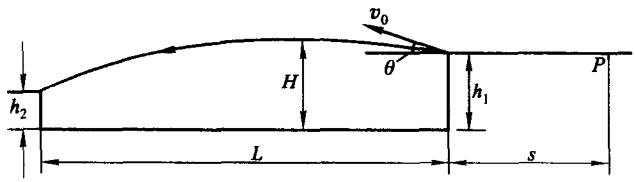
$$y=2t^2$$

消去参数 t,可得质点运动的轨迹方程

$$3y=2x-20$$

这是一个直线方程,直线斜率 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha=\frac{2}{3}$,$\alpha=33°41'$. 轨迹如图所示.

例 1－7　为迎接香港回归,柯受良 1997 年 6 月 1 日驾车飞越黄河壶口,如图所示,东岸跑道长 265 m,柯驾车从跑道东端启动,到达跑道终端时速度为 150 km · h^{-1},他随即以仰角 5°冲出,飞越跨度为 57 m,安全落到西岸木桥上.求:(1) 按匀加速运动计算,柯在东岸驱车的加速度和时间各是多少?(2) 柯跨越黄河用了多长时间?(3) 若起飞点高出河面 10.0 m,柯驾车飞行的最高点离河面几米?(4) 西岸木桥桥面和起飞点的高度差是多少?



例 1－7 图

解　在图中,$s=265$ m, $v_0=150$ km · h^{-1} $=4.17$ m · s^{-1}, $\theta=5°$,$L=57$ m, $h_1=10$ m.

(1) 按匀加速运动计算,柯在东岸的加速度

$$a=\frac{v_0^2}{2s}=\frac{(4.17)^2}{2\times265}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}=3.28\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

加速的时间

$$t_1=\sqrt{\frac{2s}{a}}=\sqrt{\frac{2\times265}{3.28}}\ \text{s}=12.7\ \text{s}$$

(2) 柯跨越黄河用的时间

$$t_2=\frac{L}{v_0\cos\theta}=\frac{57}{4.17\times\cos5°}\ \text{s}=1.37\ \text{s}$$

(3) 柯飞行最高点离河面距离

$$H=h_1+\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}=10\ \text{m}+\frac{(4.17)^2\times\sin^25°}{2\times9.8}\ \text{m}=10.67\ \text{m}$$

(4) 西岸木桥桥面和起飞点的高度差为

$$h_2-h_1=v_0\sin\theta t_2-\frac{1}{2}g\,t_2^2$$

$$=4.17\times\sin5°\times1.37\ \text{m}-\frac{1}{2}\times9.8\times1.37^2\ \text{m}=-4.22\ \text{m}$$

即西岸木桥桥面比起飞点低 4.22 m.

例 1－8　一半径为 0.50 m 的飞轮在启动时的短时间内,其角速度与时间

的平方成正比,在 $t=2.0\ \mathrm{s}$ 时测得轮缘一点的速度值为 $4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 求:(1) 该轮在 $t'=0.5\ \mathrm{s}$ 时的角速度,轮缘一点的切向加速度和总加速度;(2) 该点在 2.0 s 内所转过的角度.

解 (1) 因 $\omega r=v$,由题意 $\omega\propto t^2$ 得比例系数

$$k=\frac{\omega}{t^2}=\frac{v}{rt^2}=\frac{4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}{0.50\ \mathrm{m}\times(2.0\ \mathrm{s})^2}=2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}$$

所以
$$\omega=2t^2$$

ω 是 t 的函数,则 $t'=0.5\ \mathrm{s}$ 时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega=2t'^2=2\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}\times(0.5\ \mathrm{s})^2=0.5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=4t'=4\ \mathrm{rad\cdot s^{-3}}\times0.5\ \mathrm{s}=2.0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$$

$$a_t=\alpha r=2.0\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}\times0.50\ \mathrm{m}=1.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_n=\omega^2r=(0.5\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}})^2\times0.50\ \mathrm{m}=0.125\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

总加速度矢量及大小分别为

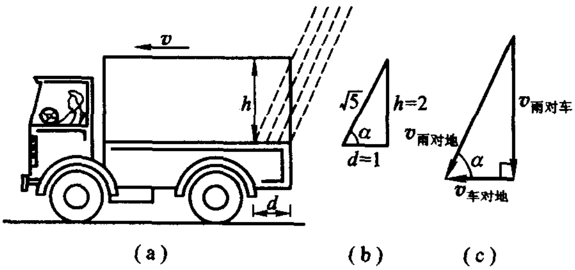
$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\alpha r\boldsymbol{e}_t+\omega^2r\boldsymbol{e}_n$$

$$a=\sqrt{(\alpha r)^2+(\omega^2r)^2}=\sqrt{(1.0)^2+(0.125)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=1.01\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(2) 在 2.0 s 内该点所转过的角度

$$\theta-\theta_0=\int_0^2\omega\mathrm{d}t=\int_0^2 2t^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^3\bigg|_0^2=5.33\ \mathrm{rad}$$

例 1-9 一带蓬的卡车,蓬高 $h=2\ \mathrm{m}$. 当它停在路上时,倾斜的雨滴落入车内,离车厢后沿 $d=1\ \mathrm{m}$ 内都淋着雨,如图(a)所示,当卡车以 $v=15\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$ 的速率沿平直路面行驶时,雨滴恰好不能落入车内,求雨滴速度.



例 1-9 图

解 设地面为 S 系,车为 S′系. 根据速度变换式

$$\boldsymbol{v}_{雨地}=\boldsymbol{v}_{雨车}+\boldsymbol{v}_{车地}$$