UMSS

大学数学科学丛书 —23

有限维半单李代数简明教程

苏育才 卢才辉 崔一敏 著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书 23

有限维半单李代数简明教程

苏育才 卢才辉 崔一敏 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以最短的篇幅，简明扼要而又不失严谨地讲述复数域上有限维半单李代数的分类与表示理论. 全书共分 8 章，前 6 章紧紧围绕半单李代数的分类这一中心内容展开，介绍了李代数的基本理论，包括幂零性、可解性、半单纯性、Lie 定理、Cartan 分解、Killing 型、根系结构、邓肯图等. 后 2 章先是利用初等方法给出三维单李代数 $sl(2,\mathbb{C})$ 的有限维表示的分类，然后通过介绍泛包络代数、Casimir 算子、Weyl 群等有效工具，在引进 Verma 模的基础上，给出了一般半单李代数有限维表示的分类，给出有限维不可约表示的 Weyl 特征标公式的证明等. 各章均配有适量习题.

本书适合数学系和物理系高年级大学生、研究生作为半单李代数课的教材，也可供科技工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

有限维半单李代数简明教程/苏育才，卢才辉，崔一敏著. —北京：科学出版社，2008

(大学数学科学丛书；23)

ISBN 978-7-03-021400-3

Ⅰ. 有… Ⅱ. ①苏…②卢…③崔… Ⅲ. 半单李代数—高等学校—教材 Ⅳ. 0152. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 035746 号

责任编辑：张 扬/责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静/封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新 蕾 印 刷 厂 印刷

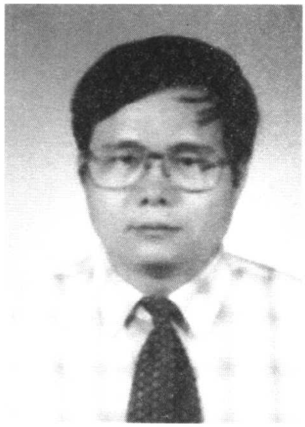
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

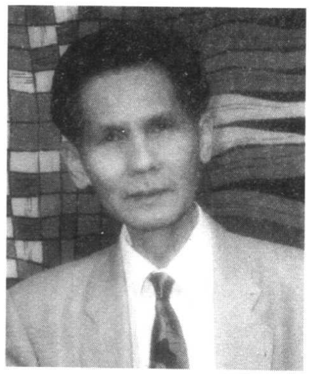
2008 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 4 月第一次印刷 印张：13 1/4
印数：1—3 000 字数：234 000

定价：36.00 元

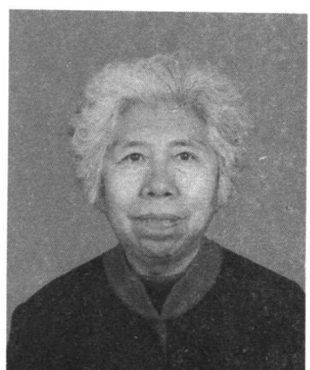
作者简介



苏育才　1963年5月出生于福建永定。1982年于厦门大学数学系获学士学位，1985年在该系获硕士学位，1989年在中国科学院系统所获博士学位。先后在英国、加拿大、美国、澳大利亚访问10年。曾任上海交通大学数学系教授、博士生导师。2005年开始任中国科技大学数学系“百人计划”特聘教授。长期从事李代数、李超代数和Kac -Moody代数的教学及研究工作。先后主持国家自然科学基金、教育部优秀青年教师资助计划基金、教育部跨世纪优秀人才培养计划基金、教育部博士点基金、中国科学院百人计划基金、中国科学院知识创新工程重要项目子课题负责人。在国内外著名学术刊物上发表论文80余篇。



卢才辉　祖籍福建永定，1939年出生于印度尼西亚，1965年毕业于北京大学数学力学系数学专业。曾任首都师范大学数学系系主任、教授、博士生导师，长期从事代数、李代数和Kac -Moody代数的教学及研究工作，并主持国家自然科学基金、北京市自然科学基金等项目。在国内外著名学术刊物上发表论文40余篇，1994年获北京市科技进步奖一等奖，2000年获北京市高校优秀教学成果一等奖（领衔合作），1997年评为北京市有突出贡献的专家。



崔一敏　1941年出生于北京，1965年毕业于北京师范学院数学系（现首都师范大学数学科学学院），毕业后留校任教，副教授，长期从事高等代数、近世代数、李代数的教学与研究工作，在学术刊物上发表过数十余篇论文。

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵. 正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是同人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱. 数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视. 数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法. 在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　　言

最近几年听到些将李代数列为本科选修课程及研究生公选课的建议. 我们认为从以下三个方面看，这个建议很有道理.

第一，李代数是现代数学前沿领域中具有重要地位的学科之一，它有悠久的历史，现在仍在蓬勃地发展，而且催生了 Kac-Moody 代数、顶点算子代数、量子群、共形代数等新兴分支的出现和发展. 它又是现代数学的重要基础，和群论、拓扑、微分几何以及理论物理都有密切的联系，并在上述领域中有许多的应用. 将它列为选修课，有利于拓宽学生的学科视野，了解现代数学不同学科、不同领域之间的交叉联系，融会贯通.

第二，李代数中包含了近现代数学史上一些著名的漂亮结果，例如复单李代数的分类与九种邓肯图之间的一一对应； Weyl 关于半单李代数的有限维不可约表示的特征标公式等，这些结果不需用太多艰深的知识就可证明，是用来对本科生进行数学美学教育的非常理想的素材.

第三，在本科教学中开设任何一门选修课，都必须要考虑到两个不可避免的制约因素：一是学生的基础知识是否够用，其次是在有限的课时（一般是一个学期约 60 课时），所选学科的核心内容、基本方法能否系统、完整地讲完. 李代数在这两个方面都有明显的优势. 因为有限维李代数的基本理论，实际上可看作是向量空间及其线性变换理论的扩充及延伸. 在学完线性代数之后进入李代数课程的学习，从知识发展的脉络看，中间是一条无障碍的直通道. 不需再做任何知识上的补缺或铺垫，只需对内容稍做精简、调整即可.

当然，选择什么样的教材是要考虑的.

目前，国内外出版的通用的李代数教材大概有四五种（参阅本书后的参考文献），这些教材虽然各有优点与特色，但它们的共同点都是以李代数方向的研究生为主要对象，内容比较庞大与艰深，不适合用作本科选修教材.

我们认为有必要重新编写一部简明教材，为李代数能顺利进入本科教学创造条件，这就是我们编写此书的目的.

在编写中，我们首先确定了两个方针：第一，写出的教材必须是一本名副其实的简明教材，在保证基本内容、基础知识不削弱的前提下，最大限度地删繁就简，同时要使全书有自己独立、严谨、完整的结构体系；第二，使线性代数方法与技巧的运用成为本书的特点，内容的安排力争做到先易后难，由浅入深，重点突出.

根据上述要求，在编写过程中采取了以下三点措施：

(1) 全书共分 8 章，每章配有适量习题.

第 1 章到第 6 章以有限维半单李代数的结构定理以及单李代数的分类为中心内容. 围绕此中心，依次讲授李代数的一些基本概念、李定理、Engel 定理、Cartan

子代数与 Cartan 分解、Killing 型、素根系、Cartan 矩阵与邓肯图、同构定理等，直到完成单李代数分类的证明. 所有的定理，都给出了详尽的证明.

在这一部分内容的处理中，以下几处和其他教材是不同的.

① §4.3 补充了线性代数的一个内容 —— 对偶空间. 目前不少学校的线性代数课不讲这个内容，但在李代数中要用到，我们补上了. 熟悉这个内容的读者可以跳过这一节.

② Weyl 群与内自同构群的概念及有关结果后移到第 8 章，作为表示理论的基础给出. 这样安排的目的是为了使前 6 章的中心更加突出，内容安排更紧凑.

③ Cartan 子代数的共轭性定理虽然在理论上很重要，但其作用无非是说明运用 Cartan 分解研究半单李代数的结构与分类的合理性与科学性，并不影响后者的证明过程. 为了使读者尽快掌握前 6 章的核心内容，我们仅在 §2.5 中介绍此定理的意义而将其证明过程连同预备知识单独作为一节（§8.6）放到本书的最后，作为选学内容处理.

第 7 、 8 两章讲表示理论初步.

第 7 章讲三维单李代数 $sl(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约模的构造、分类以及完全可约性定理. 证明中基本上只用了线性代数知识，我们试图通过对这样一个具体模型的剖析，使读者对线性代数技巧在表示理论中的运用有所了解，并从中得到启发. 作为进一步研究表示理论的需要，本章同时介绍了泛包络代数、 PBW 定理以及 Casimir 算子等.

第 8 章主要讲授 Weyl 关于半单李代数的有限维表示的完全可约性定理以及特征标公式、维数公式等. 有关 Weyl 群的知识，作为研究本章中心内容的基础，安排在第 2 节. 在这一章里，作为表示理论证明技巧的一个应用，给出了 Serre 关于生成元定义关系的定理（即有限维半单李代数存在性的统一证明）.

和其他教材比较，本书精简掉的内容有：李代数的扩张、自同构群、表示的张量积、 Weyl 基与 Chevalley 基、 Levi 分解、表示的重数公式、例外李代数等.

(2) 每章开头都有一个概要，扼要点出本章讨论的主要问题与结果.

每章的最后一节都是本章的小结，对本章出现的主要概念、定理的作用、意义及相互间的联系，做一个串联式的评析. 希望这些内容对教师备课以及学生复习能有所帮助.

在某些章的小结中，还插入了一些有关数学史的片段，介绍了一些重要定理在历史上发现的过程以及相关数学家的贡献. 这本是一个很有意义的内容，理应写得更加有趣、生动一些，无奈我们自己的数学史知识极为有限，短期内又难以搜集更多的资料，只能是知道多少写多少，写起来颇为吃力，恐怕会令读者失望.

(3) 书中多处对于概念或定理除必要的陈述及证明之外，还有或多或少的注释与评注，这也是本书的一个特别之处. 这些内容有些是我们自己学习中的体会，有

些是针对我们了解到的学生在学习过程中可能出现的“盲点”而写的. 希望这个做法能使大多数同学，特别是自学者从中受益.

本书的前 6 章曾在首都师范大学数学科学学院本科生中讲授过 4 个轮次，现在的版本正在中国科技大学试用.

本书也适合物理系部分专业的研究生使用.

作为一本简明教程，经典内容中的哪些部分可删，哪些应保留，保留下的内容应如何重新组织，对于我们都是新问题. 由于没有先例可循，再加上自身水平的限制，本书恐有许多不当之处. 如今冒然出版，只盼它能起个抛砖引玉的作用.

恳切希望本书出版后，能得到同行及广大读者的批评指教，我们在此一一致谢！

苏育才（中国科学技术大学）
卢才辉（首都师范大学，前言执笔者）
崔一敏（首都师范大学）
2007 年 12 月

主要符号表

$\forall$	任意
$\exists$	存在
$\preceq$	由正根系定义的一个偏序
$[\cdot,\cdot]$	方括号积 (换位运算)
$(\cdot,\cdot)$	Killing 型
$:=$	定义为
$\dot{+}$ 或 $\sum^{\bullet}$	理想的直和
$\perp$	正交
$A^{\perp}$	空间 A 的正交补
$\mathcal{A}_L$	由结合代数 $\mathcal{A}$ 产生的李代数
A^{T}	矩阵 A 的转置矩阵
$\mathrm{Aut}\,\mathcal{G}$	李代数 $\mathcal{G}$ 的自同构群
$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$	向量 α_1 与 α_2 的夹角
$\|\|\alpha\|\|$	根 α 的长度 (模长)
ad	伴随算子（伴随表示）
$\mathrm{ad}\,\mathcal{G}$	李代数 $\mathcal{G}$ 的内导子代数
$\mathcal{B}$	标准 Borel 子代数，即 $\mathcal{B}=H+\mathcal{G}_+$
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{C}^*$	非零复数集
$C[\Gamma]$	由 Abel 群 Γ 定义的群代数
$\widetilde{\mathbb{C}[H^*]}$, $\overline{\mathbb{C}[H^*]}$	由 Cartan 子代数对偶空间定义的完备化的群代数及比它更大的空间
C_k^i, $\binom{k}{i}$	二项式系数 $\frac{k!}{i!(k-i)!}$
$\mathbb{C}[v_1,v_2,\cdots,v_n]$	复数域上 n 个变元 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 的多项式代数（对称代数）
$\mathrm{char}\,\mathbb{F}$	域 $\mathbb{F}$ 的特征
$\mathrm{ch}\,V$	模 V 的形式特征标
$D(\lambda)$	在 H^* 中以 λ 为顶点的锥
$\mathrm{Der}\ \mathcal{G}$	李代数 $\mathcal{G}$ 的导子代数
Δ	根系（有时也表示非零权集）
Δ_+	正根系
Δ_-	负根系
$\delta_{i,j}$	Kronecker 符号
$\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$	以 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为对角线上元素的对角矩阵（或分块对角矩阵）
$\dim V$, $\dim_{\mathbb{F}} V$	$\mathbb{F}$ 上向量空间 V 的维数
$\mathcal{E}(L)$	由强 ad- 幂零元的指数生成的 $\mathrm{Aut}\,L$ 的子群
$\mathcal{E}(L;K)$	由 L 的子代数 K 的强 ad- 幂零元的指数生成的 $\mathcal{E}(L)$ 的子群
e^{λ}	形式指数
e_{ij}	(i,j) 位置上元素为 1 其他位置上元素为 0 的 $n\times n$ 矩阵
$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$	一般线性李代数 $gl(n,\mathbb{C})$ 的 Cartan 子代数的标准线性函数
e_i, h_i, f_i	半单李代数 $\mathcal{G}$ 的标准生成元
$\mathbb{F}$	任意域
$\mathcal{G}$	李代数（通常指半单李代数）

$\mathcal{G}^\alpha$	对应根 α 的根空间
$\mathcal{G}_+$, $\mathcal{G}_-$	半单李代数 $\mathcal{G}$ 的三角分解的正、负部分
$gl(V)$, $gl(n,\mathbb{C})$	V 上线性变换或 n 阶矩阵组成的全线性李代数
H	Cartan 子代数
$H_\mathbb{R}$	根系张成的欧氏空间
H_α	与根 α 垂直的超平面
$\mathrm{ht}\,\alpha$	根 α 的高度
I_n	n 阶单位矩阵
Id_S	集合 S 上的恒等映射
$\mathrm{Im}\,\varphi$	线性变换 φ 的像
$\mathrm{Int}\,L$	李代数 L 的内自同构群
$\mathrm{Ker}\,\varphi$	线性变换 φ 的核
L_Λ	以 Λ 为最高权的不可约最高权模
$\lvert\lambda-\Lambda\rvert$	权 λ 关于最高权 Λ 的相对高度，即 $\mathrm{ht}(\lambda-\Lambda)$
$\ell(w)$	$w\in W$ 的长度
l_X	X 的左乘算子
M_Λ	以 Λ 为最高权的 Verma 模的极大真子模
$\mathrm{mult}\,\lambda$, $\mathrm{mult}_V\,\lambda$	权 λ 在模 V 中的重数
$\mathcal{N}(L)$	李代数 L 的强 ad- 幂零元集
$n(w)$	$w\in W$ 使正根变成负根的个数
n_φ	根 φ 的重数
Ω	普遍 Casimir 元素（或 Casimir 算子）
$\mathfrak{o}(n,\mathbb{C})$	正交代数
P^+	支配整权的集合
P_Λ	不可约最高权模 L_Λ 的权集
$P(\Lambda)$	集合 $D(\Lambda)\cap\{\lambda\in H_\mathbb{R}^* \mid \lVert\lambda+\rho\rVert=\lVert\Lambda+\rho\rVert\}$
Π	素根系
$\mathbb{Q}$	有理数域
$\mathbb{Q}_+$	非负有理数集
$\mathbb{Q}_+^*$	正有理数集
$\mathbb{Q}_-$	非正有理数集
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{R}_+$	非负实数集
$\mathbb{R}_-$	非正实数集
$\mathrm{Rad}\,\mathcal{G}$	李代数 $\mathcal{G}$ 的根基
r_α	由根 α 决定的反射
r_X	X 的右乘算子
ρ	所有正根和的一半
(S), $(S)_V$	由集合 S 张成的向量子空间（S 是某一向量空间 V 的子集）
$\langle S\rangle$, $\langle S\rangle_\mathcal{A}$	由集合 S 生成的子代数（S 是某个 (李) 代数 $\mathcal{A}$ 的子集）
$S(n,\mathbb{C})$	对角线元素均相等的上三角矩阵组成的李代数
$S(V)$	向量空间 V 的对称代数
Sym_n	n 个元素的对称群
Sym_Δ	集合 Δ 上的对称群
$\mathfrak{s}(\gamma)$	正则元 γ 决定的 Weyl 房

$\mathfrak{s}(\Pi)$	基本 Weyl 房
$sl(V)$, $sl(n,\mathbb{C})$	迹为 0 的线性变换或迹为 0 的矩阵组成的特殊线性李代数
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	辛代数
$T(V)$	向量空间 V 的张量代数
$t(\mathbb{C})$, $t(n,\mathbb{C})$	上三角矩阵构成的线性李代数
$\mathrm{tr}\,\mathcal{A}$, $\mathrm{tr}_V\,\mathcal{A}$	向量空间 V 上线性变换 $\mathcal{A}$ 的迹
θ	最高根
$U(\mathcal{G})$	李代数 $\mathcal{G}$ 的泛包络代数
$[V:L_\lambda]$	不可约模 L_λ 作为模 V 的合成因子的重数
V_Λ	以 Λ 为最高权的 Verma 模
$V_{\mathcal{A}}^{0,\lambda}$, $V_{\mathcal{A}}^{\lambda}$	V 上变换 $\mathcal{A}$ 的属于 λ 的特征子空间、广义特征子空间 (根子空间)
W	Weyl 群
w_0	Weyl 群中长度最大的元素
$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$	由元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 张成的向量子空间
$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$	由元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成的子代数
$[x_1,x_2,\cdots,x_n]$	顺序换位子 $[x_1,[x_2,[\cdots,[x_{n_1},x_n]\cdots]]]$
$x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_n$	$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的张量积
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Z}_+$	非负整数集
$\mathbb{Z}_-$	非正整数集
$\mathbb{Z}_2$	2 阶循环群
$Z(\mathcal{G})$	李代数（或结合代数） $\mathcal{G}$ 的中心
$Z_{\mathcal{G}}(K)$	子空间 K 在 $\mathcal{G}$ 的中心化子

目　录

第 1 章　基本概念

本章概要　本章介绍李代数理论中一些基本概念，其中包括李代数及其子代数、理想和商代数的定义，李代数的同态与同构、表示、伴随表示以及导子等．并阐述李代数与结合代数的密切联系．在此基础上初步介绍了三类重要的李代数：可解、幂零以及半单李代数的定义和基本性质．中间穿插讲述了一些例子，这些例子为读者进一步理解抽象的概念与结论提供了具体的模型．熟悉并牢记这些例子是大有裨益的．

§1.1　李代数与结合代数

定义 1.1.1　设 $\mathcal{A}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间．若在 $\mathcal{A}$ 上定义了一个二元运算（称为乘法），使得对 $\forall x, y \in \mathcal{A}$, 有 $xy \in \mathcal{A}$. 而且以下两条成立：

(i) $x(y_1+y_2) = xy_1+xy_2,\quad (x_1+x_2)y = x_1y+x_2y,\quad \forall x, y, x_i, y_i \in \mathcal{A},\ i = 1, 2;$

(ii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y),\quad \forall \lambda \in \mathbb{F},\ x, y \in \mathcal{A},$

则称 $\mathcal{A}$ 为 $\mathbb{F}$ 上的一个 **代数**.

定义 1.1.2　设 $\mathcal{A}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的代数．如果 $\mathcal{A}$ 中定义的乘法运算满足结合律：$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in \mathcal{A}$, 则 $\mathcal{A}$ 称为 $\mathbb{F}$ 上的 **结合代数**.

结合代数是最常见也是最重要的代数之一．例如，域 $\mathbb{F}$ 上的全体 n 元多项式的集合，所有 $n \times n$ 复矩阵的集合等，它们关于通常熟知的数乘、加法及乘法运算都构成结合代数．

除了结合代数以外，还有另一类代数，它们的乘法是不满足结合律的，这类代数统称为 **非结合代数**. 非结合代数中理论最丰富、应用最广泛的当属李代数．下面介绍李代数的定义．

定义 1.1.3　设 $\mathcal{G}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，其中定义了一个乘法运算（记为 $[\cdot,\cdot]$, 并称之为 **方括号积** 或 **换位运算**）：对 $\forall x, y \in \mathcal{G}$ 有 $[x, y] \in \mathcal{G}$, 而且以下三个条件成立：

(i) $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] = \lambda_1[x_1, y] + \lambda_2[x_2, y],\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F},\ x_1, x_2, y \in \mathcal{G}$ (称为 **线性性**);

(ii) $[x, x] = 0,\ \ \forall x \in \mathcal{G}$ (称为 **反对称性**);

(iii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,\ \ \forall x, y, z \in \mathcal{G}$ (称为 **Jacobi 等式**).

这时称 $\mathcal{G}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的一个 **李代数**. $\mathcal{G}$ 作为向量空间的维数 $\dim \mathcal{G}$ 就是李代数的维

数. 当 $\dim \mathcal{G} < \infty$ 时, $\mathcal{G}$ 称为有限维李代数; 当 $\dim \mathcal{G} = \infty$ 时, $\mathcal{G}$ 称为无限维李代数.

本书只研究有限维李代数. 如无特别声明, 后面的讨论均指对有限维李代数而言.

命题 1.1.1 (1) 利用定义 1.1.3 的条件 (ii) 可以推出条件 (iii) 的另外两个等价形式:

(iii′) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$, 对 $\forall x,y,z \in \mathcal{G}$;

(iii″) $[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$, 对 $\forall x,y,z \in \mathcal{G}$.

(2) 如果域 $\mathbb{F}$ 的特征 $\neq 2$, 定义 1.1.3 中的条件 (ii) 和以下条件等价:

(ii′) $[x,y]=-[y,x]$, $\forall x,y \in \mathcal{G}$.

证明 先证 (2). 若 (ii) 成立, 则由 $0=[x+y,x+y]=[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=[x,y]+[y,x]$, 推出 $[x,y]=-[y,x]$, 即 (ii′) 成立.

反之, 若 (ii′) 成立, 则在 (ii′) 中取 $y=x$, 得 $[x,x]=-[x,x]$, 即 $2[x,x]=0$. 由于 $\mathbb{F}$ 的特征 $\neq 2$, 故有 $[x,x]=0$. 即 (ii) 成立.

(1) 由 (2) 的证明知, 若 (ii) 成立则 (ii′) 成立. 由此立即得到 (iii′) 和 (iii″) 都与 (iii) 等价. □

于是当基域 $\mathbb{F}$ 的特征 $\neq 2$ (例如复数域 $\mathbb{C}$) 时, 定义 1.1.3 中的 (ii) 可以替换成 (ii′). 但当 $\mathbb{F}$ 的特征 $=2$ 时, 条件 (ii′) 只反映了对称性. 因此一般地, 条件 (ii) 比条件 (ii′) 更强.

由条件 (i) 和 (ii′) 可立即推出换位运算 $[\cdot,\cdot]$ 关于第二个因子也是线性的.

定义 1.1.4 李代数 $\mathcal{G}$ 中的两个元素 x 和 y 称为是 **可交换的**, 如果 $[x,y]=0$. 若 $z \in \mathcal{G}$ 与 $\mathcal{G}$ 中所有的元素都可交换, 则称 z 为 $\mathcal{G}$ 的 **中心元素**. $\mathcal{G}$ 的所有中心元素的集合称为 $\mathcal{G}$ 的 **中心**, 记为 $Z(\mathcal{G})$.

命题 1.1.2 任意一个李代数 $\mathcal{G}$ 都有一个平凡的中心元素 0, 即 $[0,x]=0$, $\forall x \in \mathcal{G}$.

证明 因为 $\mathcal{G}$ 是向量空间, 故 $\mathcal{G}$ 中含有零元素 0. 对 $\forall x \in \mathcal{G}$, 利用定义 1.1.3 的条件 (i), 有

$$[0,x]=[x-x,x]=[x,x]-[x,x]=0. \qquad \square$$

有些李代数只有平凡的中心元素 0, 有的则除平凡的中心元之外, 还含有非平凡的中心元素, 即 $Z(\mathcal{G}) \neq \{0\}$.

如果对 $\mathcal{G}$ 中任何两个元素 x,y 都有 $[x,y]=0$, 则 $\mathcal{G}$ 称为 **交换李代数** (或 **Abel 李代数**). 显然, 交换李代数的所有元素都是中心元素. 交换李代数是结构最简单的李代数, 它实质上只具有向量空间的结构.

李代数和结合代数有密切的联系. 现在介绍二者之间的关系.