

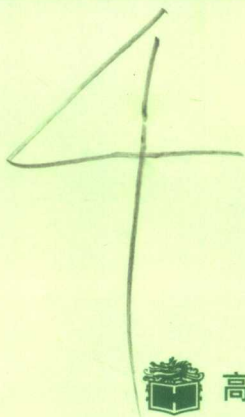
高 等 学 校 教 材

数学分析讲义

(第五版)

下 册

刘玉琏 傅沛仁 林 玎 苑德馨 刘 宁 编



高等教育出版社

数学分析讲义

【第3版】

下册

编者：熊金波 熊金波 熊金波 熊金波 熊金波

编者：熊金波 熊金波 熊金波 熊金波 熊金波

高等教育出版社

017/8=4

:2

2008

高等学校教材

数学分析讲义

(第五版)

下 册

刘玉琏 傅沛仁

林 玎 苑德馨 刘 宁 编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 下册/刘玉琏等编. —5版. —北京: 高等教育出版社, 2008. 4

ISBN 978 - 7 - 04 - 023581 - 4

I. 数… II. 刘… III. 数学分析 - 高等学校 - 教材
IV. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 029248 号

策划编辑 李 蕊 责任编辑 李华英 封面设计 张志奇
责任绘图 尹文军 版式设计 王艳红 责任校对 杨凤玲
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京新华印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	1966 年 3 月第 1 版
开 本	850 × 1168 1/32		2008 年 4 月第 5 版
印 张	15.25	印 次	2008 年 4 月第 1 次印刷
字 数	390 000	定 价	22.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23581 - 00

内 容 提 要

本书分上、下两册,是在第四版的基础上修订而成的。在内容和体例上未作较大变动。知识内容稍有扩充,涉及的方面很广。增加了少量的说明性文字,使内容更加完善。下册内容包括:级数、多元函数微分学、隐函数、反常积分与含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分等。

本书阐述细致,范例较多,便于自学,可作为高等师范院校本科教材,也可作为高等理院校函授教材及高等教育自学用书。

目 录

第九章 级数	1
§ 9.1 数项级数	1
一、收敛与发散概念(1) 二、收敛级数的性质(5)	
练习题 9.1(一)(10) 三、同号级数(12) 四、变号级数(25)	
练习题 9.1(二)(36) 五、绝对收敛级数的性质(39)	
练习题 9.1(三)(45)	
§ 9.2 函数项级数	46
一、函数项级数的收敛域(46) 二、一致收敛概念(48)	
三、一致收敛判别法(53) 四、函数列的一致收敛(61)	
练习题 9.2(一)(64) 五、和函数的分析性质(67)	
练习题 9.2(二)(75)	
§ 9.3 幂级数	77
一、幂级数的收敛域(77) 二、幂级数和函数的分析性质(81)	
三、泰勒级数(89) 四、初等函数的幂级数展开(92)	
五、幂级数的应用(97) 六、指数函数与三角函数的幂级数定义(101)	
练习题 9.3(107)	
§ 9.4 傅里叶级数	109
一、傅里叶级数(109) 二、两个引理(113) 三、收敛定理(116)	
四、奇、偶函数的傅里叶级数(123)	
五、以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数(130)	
练习题 9.4(133)	
第十章 多元函数微分学	136
§ 10.1 多元函数	136
一、 n 维欧氏空间(136) 二、多元函数概念(142)	

三、 \mathbf{R}^2 的点列极限与连续性(146)	练习题 10.1(152)
§ 10.2 二元函数的极限与连续	154
一、二元函数的极限(154)	二、二元函数的连续性(159)
练习题 10.2(165)	
§ 10.3 多元函数微分法	167
一、偏导数(167)	二、全微分(171)
三、可微的几何意义(177)	
四、复合函数微分法(180)	五、方向导数(184)
练习题 10.3(186)	
§ 10.4 二元函数的泰勒公式	188
一、高阶偏导数(188)	二、二元函数的泰勒公式(194)
三、二元函数的极值(199)	练习题 10.4(208)
第十一章 隐函数	212
§ 11.1 隐函数的存在性	212
一、隐函数概念(212)	二、一个方程确定的隐函数(215)
三、方程组确定的隐函数(221)	练习题 11.1(229)
§ 11.2 函数行列式	231
一、函数行列式(231)	二、函数行列式的性质(234)
三、函数行列式的几何性质(235)	练习题 11.2(238)
§ 11.3 条件极值	239
一、条件极值与拉格朗日乘数法(239)	二、例(246)
练习题 11.3(250)	
§ 11.4 隐函数存在定理在几何方面的应用	251
一、空间曲线的切线与法平面(251)	二、曲面的切平面与法线(255)
练习题 11.4(259)	
第十二章 反常积分与含参变量的积分	260
§ 12.1 无穷积分	260
一、无穷积分收敛与发散概念(260)	二、无穷积分与级数(264)
三、无穷积分的性质(266)	四、无穷积分的敛散性判别法(269)
练习题 12.1(277)	
§ 12.2 瑕积分	278
一、瑕积分收敛与发散概念(278)	二、瑕积分的敛散性判别法(282)

练习题 12.2(289)	
§ 12.3 含参变量的积分	290
一、含参变量的有限积分(290) 二、例(Ⅰ)(295)	
三、含参变量的无穷积分(301) 四、例(Ⅱ)(310)	
五、 Γ 函数与 B 函数(319) 六、例(Ⅲ)(325)	
练习题 12.3(329)	
第十三章 重积分	333
§ 13.1 二重积分	333
一、曲顶柱体的体积(333) 二、二重积分概念(335)	
三、二重积分的性质(339) 练习题 13.1(一)(341)	
四、二重积分的计算(342) 五、二重积分的换元(351)	
六、曲面的面积(359) 练习题 13.1(二)(365)	
§ 13.2 三重积分	367
一、三重积分概念(367) 二、三重积分的计算(369)	
三、三重积分的换元(373) 四、简单应用(380)	
练习题 13.2(383)	
第十四章 曲线积分与曲面积分	386
§ 14.1 曲线积分	386
一、第一型曲线积分(386) 二、第二型曲线积分(392)	
三、第一型曲线积分与第二型曲线积分的关系(401)	
四、格林公式(403) 五、曲线积分与路径无关的条件(411)	
练习题 14.1(417)	
§ 14.2 曲面积分	421
一、第一型曲面积分(421) 二、第二型曲面积分(424)	
三、奥-高公式(431)	
四、斯托克斯公式(436) 练习题 14.2(444)	
§ 14.3 场论初步	447
一、梯度(447) 二、散度(450) 三、旋度(454)	
四、微分算子(461) 练习题 14.3(462)	
练习题答案	464
参考书目	478

第九章 级数

级数分为数项级数与函数项级数. 函数项级数是表示函数, 特别是表示非初等函数的一个重要的数学工具. 例如, 有的微分方程的解不是初等函数, 但其解却可表为函数项级数. 函数项级数又是研究函数(初等函数与非初等函数)性质的一个重要手段. 因此, 函数项级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用. 数项级数是函数项级数的特殊情况, 它又是函数项级数的基础. 本章首先讨论数项级数的基本理论.

§ 9.1 数项级数

一、收敛与发散概念

设有数列 $\{u_n\}$, 即

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来, 即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad \text{或} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (2)$$

称为数项级数, 简称级数, 其中 u_n 称为级数(2)的第 n 项或通项.

级数(2)是无限多个数的和. 我们只会计算有限个数的和, 不仅不会计算无限多个数的和, 甚至都不知道何谓无限多个数的和. 因此, 级数(2)只是一种形式, 也是一个符号, 它尚没有具体的意义. 无限多个数的和是一个未知的新概念. 这个新概念不是孤立的, 它与我们已知的有限个数的和联系着. 不难想到, 由有限个数

的和转化到“无限多个数的和”应借助极限这个工具来实现.

设级数(2)前 n 项的和是 S_n , 即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{或} \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

称为级数(2)的 n 项部分和. 显然, 对给定级数(2), 其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是, 级数(2)对应着一个已知的部分和数列 $\{S_n\}$.

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = S,$$

则称级数(2)收敛, S 是级数(2)的和, 记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数(2)发散.

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 而 $S - S_n$ 记为 r_n , 即

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项余和, 简称余和. 显然, 级数收敛, 总有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0.$$

由此可见, 级数的敛散性(收敛与发散)是借助于它的部分和数列的敛散性定义的. 反之, 数列的敛散性也可归结为级数的敛散性. 事实上, 设有数列 $\{S_n\}$. 令

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \cdots, a_n = S_n - S_{n-1}, \cdots.$$

显然,

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \end{aligned}$$

即数列 $\{S_n\}$ 的敛散性可归结为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

因此,研究收敛级数及其和只不过是研究收敛数列及其极限的一种新形式.因为级数是有限和的推广,有鲜明的直观性,所以,这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复,它使我们处理不同形式的极限具有更大的灵活性,并提供了新的数学工具.

例 1 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性,其中 $a \neq 0$, r 是公比.

解 1) 当 $|r| \neq 1$ 时,已知几何级数的 n 项部分和

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

当 $|r| < 1$ 时,存在极限,且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}. \quad \textcircled{1}$$

因此,当 $|r| < 1$ 时,几何级数收敛,其和是 $\frac{a}{1 - r}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

当 $|r| > 1$ 时,不存在极限,且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \infty.$$

因此,当 $|r| > 1$ 时,几何级数发散.

2) 当 $|r| = 1$ 时,有两种情况:

当 $r = 1$ 时,几何级数是 ($a \neq 0$)

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots.$$

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_n = na.$$

① 见 § 2.1 例 3, 当 $|r| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty,$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

当 $r = -1$ 时, 几何级数是

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots.$$

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 是偶数,} \\ a, & n \text{ 是奇数,} \end{cases}$$

即部分和数列 $\{S_n\}$ 发散.

于是, 当 $|r| = 1$ 时, 几何级数发散.

综上所述, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, 当 $|r| < 1$ 时收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$;

当 $|r| \geq 1$ 时发散.

例 2 证明级数

$$\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$$

收敛, 并求其和.

证明 通项 u_n 可改写为

$$u_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right).$$

级数的 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left[\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5}.$$

于是, 级数收敛, 其和是 $\frac{1}{5}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}.$$

例3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

发散.

证明 设调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的 n 项部分和是 S_n , 即

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

由 § 2.2 例 11, 已知数列 $\{S_n\}$ 发散, 从而, 调和级数发散.

注 由上册 § 2.2 例 11 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = c \quad (\text{欧拉常数}).$$

或

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 调和级数的部分和 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 与 $\ln n$ 是等价无穷大, 即部分和 S_n 发散到正无穷大的速度与 $\ln n$ 发散的速度相当. 欧拉曾计算过

$$S_{1\,000} = 7.48\cdots, \quad S_{1\,000\,000} = 14.39\cdots, \quad \cdots$$

二、收敛级数的性质

级数研究的基本问题之一是寻求判别级数敛散性的方法. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛是等价的, 所以部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件. 已知数列 $\{S_n\}$ 的柯西收敛准则:

数列 $\{S_n\}$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}_+,$ 有

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

设 S_n 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和, 有

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}.$$

于是, 有下面级数的柯西收敛准则.

定理 1 (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\iff \forall \varepsilon > 0,$

$\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \forall p \in \mathbf{N}_+,$ 有 $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$

柯西收敛准则在理论上十分重要, 但用它来判别一个具体级数的敛散性, 却往往很麻烦, 甚至很困难.

根据定理 1 的必要性, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 即 $\forall \varepsilon > 0,$

$\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N,$ 取 $p=1,$ 有 $|u_{n+1}| < \varepsilon.$ 于是, 有

推论 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$

推论 1 的等价命题是, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如, 级数

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \cdots + \frac{n}{100n+1} + \cdots.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100n+1} = \frac{1}{100} \neq 0,$ 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1}$ 发散.

注 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件, 而不是充分条件, 即当 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散. 例如, 调和级数 (见例 3)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却是发散的.

注 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛不仅要求级数一般项 u_n 趋近于 0, 还要求 u_n 趋近于 0 的速度比调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的一般项 $\frac{1}{n}$ 趋近于 0 的速度快才行.

定理 1 指出, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的充分远 (即 $n > N$) 的任意片段 (即 $\forall p \in \mathbf{N}_+, u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$) 的绝对值可以任意小. 由此可见, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关, 而与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 前面有限项无关. 于是, 又有

推论 2 去掉、增添或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项, 不改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

例如, 去掉发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的前面 100 项, 新级数

$$\sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{100+m} + \cdots$$

仍是发散的.

根据数列极限运算定理可得级数运算定理.

定理 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛, 其和是 cS , 其中 c 是非零常数.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的 n 项部分和分别是 S_n 与

σ_n , 有

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n.$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = cS,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 其和是 cS . □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足数(非零)的分配律.

定理 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 则不改变级数每项的位置, 按原有的顺序将某些项结合在一起, 构成的新级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots \textcircled{1} \quad (3)$$

也收敛, 其和也是 S .

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和是 S_n , 新级数(3)的 k 项部分和是 σ_k , 有

$$\begin{aligned} \sigma_k &= (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + \\ &\quad (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_k} = S_{n_k}, \end{aligned}$$

即新级数(3)的部分和数列 $\{\sigma_k\}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 根据 § 2.2 定理 9, 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = S$. 于是, 新级数(3)收敛, 其和也是 S . □

① 每个括号内的和数作为新级数的一项, 新级数的第 k 项是

$$(u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}).$$

定理3告诉我们,像有限和一样,对任何一个收敛级数的项与项之间不改变次序任意加括号,不会改变级数的收敛性,也不改变它的和,即收敛级数满足结合律.

注 对有限和来说,不但能随意加括号,而且可以随意去掉括号.但在级数中就不能随便去掉(无限多个)括号.例如,级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

收敛于0,但去掉括号之后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.通俗地说,收敛级数的项与项之间可以任意加括号,但不能任意去掉括号.

这个命题的逆否命题也常用到,即

推论 若把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的项不改变次序加括号后所得到的级数发散,则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例如,对于级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots,$$

判定它的敛散性,并非十分明显.如果不改变次序加括号成为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n-1},$$

这是调和级数,是发散级数,所以原级数发散.

定理4 若级数(3)中在同一括号中的项都有相同的符号,则从(3)的收敛便能推出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而且二者有相同的和.

证明 设(3)的部分和为

$$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$$

并设 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = S$. 因为(3)的括号中的项都同号,所以当 n 由 n_{k-1} 到 n_k 时,相应的原级数的部分和 S_n 将单调地在 A_{k-1} 和 A_k 之间变动,