高等学校教材

数学分析讲义

（第五版）

下册

刘玉琏 傅沛仁 林玎 苑德馨 刘宁 编

4

高等教育出版社

数学分析讲义

（第五版）

下册

017/8=4
:2
2008

高等学校教材

数学分析讲义

（第五版）

下　　册

刘玉琏　傅沛仁
林　玎　苑德馨　刘　宁　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 下册/刘玉琏等编. —5 版. —北京:高等教育出版社,2008.4

ISBN 978-7-04-023581-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材
Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 029248 号

策划编辑 李 蕊 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 张志奇
责任绘图 尹文军 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 杨凤玲
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新华印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	1966年3月第1版
开　　本	850×1168 1/32		2008年4月第5版
印　　张	15.25	**印　　次**	2008年4月第1次印刷
字　　数	390 000	**定　　价**	22.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究
物料号 23581-00

内 容 提 要

本书分上、下两册，是在第四版的基础上修订而成的。在内容和体例上未作较大变动。知识内容稍有扩充，涉及的方面很广。增加了少量的说明性文字，使内容更加完善。下册内容包括：级数、多元函数微分学、隐函数、反常积分与含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分等。

本书阐述细致，范例较多，便于自学，可作为高等师范院校本科教材，也可作为高等理科院校函授教材及高等教育自学用书。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　　录

第九章　级　　数

级数分为数项级数与函数项级数. 函数项级数是表示函数,特别是表示非初等函数的一个重要的数学工具. 例如,有的微分方程的解不是初等函数,但其解却可表为函数项级数. 函数项级数又是研究函数(初等函数与非初等函数)性质的一个重要手段. 因此,函数项级数在自然科学、工程技术和数学本身都有广泛的应用. 数项级数是函数项级数的特殊情况,它又是函数项级数的基础. 本章首先讨论数项级数的基本理论.

§9.1　数 项 级 数

一、收敛与发散概念

设有数列 $\{u_n\}$,即

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来,即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{2}$$

称为**数项级数**,简称**级数**,其中 u_n 称为级数(2)的**第 n 项或通项**.

级数(2)是无限多个数的和. 我们只会计算有限个数的和,不仅不会计算无限多个数的和,甚至都不知道何谓无限多个数的和. 因此,级数(2)只是一种形式,也是一个符号,它尚没有具体的意义. 无限多个数的和是一个未知的新概念. 这个新概念不是孤立的,它与我们已知的有限个数的和联系着. 不难想到,由有限个数

的和转化到“无限多个数的和”应借助极限这个工具来实现.

设级数(2)前 n 项的和是 S_n,即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad 或 \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

称为级数(2)的 n 项**部分和**. 显然,对给定级数(2),其任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是,级数(2)对应着一个已知的部分和数列 $\{S_n\}$.

定义 若级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

则称级数(2)**收敛**,S 是级数(2)的**和**,记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots.$$

若部分和数列 $\{S_n\}$ **发散**,则称级数(2)**发散**.

定义 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和是 S,而 $S - S_n$ 记为 r_n,即

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n **项余和**,简称**余和**. 显然,级数收敛,总有

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = 0.$$

由此可见,级数的敛散性(收敛与发散)是借助于它的部分和数列的敛散性定义的. 反之,数列的敛散性也可归结为级数的敛散性. 事实上,设有数列 $\{S_n\}$. 令

$$a_1 = S_1, a_2 = S_2 - S_1, \cdots, a_n = S_n - S_{n-1}, \cdots.$$

显然,

$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \end{aligned}$$

即数列$\{S_n\}$的敛散性可归结为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

因此,研究收敛级数及其和只不过是研究收敛数列及其极限的一种新形式.因为级数是有限和的推广,有鲜明的直观性,所以,这种新形式不是收敛数列及其极限的简单重复,它使我们处理不同形式的极限具有更大的灵活性,并提供了新的数学工具.

例 1 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性,其中 $a \neq 0$,r 是公比.

解 1) 当$|r| \neq 1$ 时,已知几何级数的 n 项部分和

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

当$|r| < 1$ 时,存在极限,且

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}. ①$$

因此,当$|r| < 1$ 时,几何级数收敛,其和是$\frac{a}{1-r}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

当$|r| > 1$ 时,不存在极限,且

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \infty.$$

因此,当$|r| > 1$ 时,几何级数发散.

2) 当$|r| = 1$ 时,有两种情况:

当 $r = 1$ 时,几何级数是($a \neq 0$)

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots.$$

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n个} = na.$$

---

① 见§2.1 例 3,当$|r| < 1$ 时,$\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty,$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

当$r=-1$时,几何级数是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots.$$

$$S_n=\begin{cases}0, & n\text{ 是偶数},\\ a, & n\text{ 是奇数},\end{cases}$$

即部分和数列$\{S_n\}$发散.

于是,当$|r|=1$时,几何级数发散.

综上所述,几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$,当$|r|<1$时收敛,其和是$\dfrac{a}{1-r}$;当$|r|\geqslant 1$时发散.

例 2 证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

收敛,并求其和.

证明 通项u_n可改写为

$$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right).$$

级数的n项部分和

$$\begin{aligned}S_n&=\left[\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\right]\\&=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}.$$

于是,级数收敛,其和是$\dfrac{1}{5}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散.

证明 设调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$的 n 项部分和是 S_n,即

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

由§2.2 例 11,已知数列$\{S_n\}$发散,从而,调和级数发散.

注 由上册§2.2 例 11 知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=c \quad (欧拉常数).$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

即当 $n\to\infty$ 时,调和级数的部分和 $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$与 $\ln n$ 是等价无穷大,即部分和 S_n 发散到正无穷大的速度与 $\ln n$ 发散的速度相当. 欧拉曾计算过

$$S_{1\,000}=7.48\cdots, \quad S_{1\,000\,000}=14.39\cdots, \quad \cdots.$$

二、收敛级数的性质

级数研究的基本问题之一是寻求判别级数敛散性的方法. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与它的部分和数列$\{S_n\}$的收敛是等价的,所以部分和数列$\{S_n\}$收敛的充分必要条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件. 已知数列$\{S_n\}$的柯西收敛准则:

数列$\{S_n\}$收敛$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in \mathbf{N}_+, \forall n>N, \forall p\in \mathbf{N}_+$,有

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

设 S_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和，有

$$S_{n+p}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.$$

于是，有下面级数的柯西收敛准则.

定理 1（柯西收敛准则） 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall n>N$，$\forall p\in\mathbf{N}_+$，有 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$.

柯西收敛准则在理论上十分重要，但用它来判别一个具体级数的敛散性，却往往很麻烦，甚至很困难.

根据定理 1 的必要性，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall n>N$，取 $p=1$，有 $|u_{n+1}|<\varepsilon$. 于是，有

推论 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

推论 1 的等价命题是，若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例如，级数

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots+\frac{n}{100n+1}+\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{100n+1}=\dfrac{1}{100}\neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{100n+1}$ 发散.

注 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 仅是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件，即当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散. 例如，调和级数（见例 3）

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,而调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$却是发散的.

注 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛不仅要求级数一般项$u_n$趋近于0,还要求$u_n$趋近于0的速度比调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的一般项$\frac{1}{n}$趋近于0的速度快才行.

定理1指出,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛等价于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的充分远(即$n>N$)的任意片段(即$\forall p\in\mathbf{N}_+$,$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$)的绝对值可以任意小.由此可见,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关,而与级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$前面有限项无关.于是,又有

推论2 去掉、增添或改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的有限项,不改变级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性.

例如,去掉发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的前面100项,新级数

$$\sum_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+m}+\cdots$$

仍是发散的.

根据数列极限运算定理可得级数运算定理.

定理2 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,其和是$S$,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛,其和是cS,其中c是非零常数.

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}cu_n$的$n$项部分和分别是$S_n$与

σ_n，有

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n.$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = cS,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛，其和是 cS. □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足数(非零)的分配律.

定理 3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和是 S，则不改变级数每项的位置，按原有的顺序将某些项结合在一起，构成的新级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots ① \tag{3}$$

也收敛，其和也是 S.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和是 S_n，新级数(3)的 k 项部分和是 σ_k，有

$$\begin{aligned}\sigma_k &= (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + \\ &\quad (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) \\ &= u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_k} = S_{n_k},\end{aligned}$$

即新级数(3)的部分和数列$\{\sigma_k\}$是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$的子数列. 根据§2.2 定理 9，已知$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则$\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k = S$. 于是，新级数(3)收敛，其和也是 S. □

---

① 每个括号内的和数作为新级数的一项，新级数的第 k 项是

$$(u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}).$$

定理 3 告诉我们,像有限和一样,对任何一个收敛级数的项与项之间不改变次序任意加括号,不会改变级数的收敛性,也不改变它的和,即收敛级数满足结合律.

注 对有限和来说,不但能随意加括号,而且可以随意去掉括号.但在级数中就不能随便去掉(无限多个)括号.例如,级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于 0,但去掉括号之后的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

却是发散的.通俗地说,收敛级数的项与项之间可以任意加括号,但不能任意去掉括号.

这个命题的逆否命题也常用到,即

推论 若把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的项不改变次序加括号后所得到的级数发散,则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

例如,对于级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots,$$

判定它的敛散性,并非十分明显.如果不改变次序加括号成为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n-1},$$

这是调和级数,是发散级数,所以原级数发散.

定理 4 若级数(3)中在同一括号中的项都有相同的符号,则从(3)的收敛便能推出原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,而且二者有相同的和.

证明 设(3)的部分和为

$$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$$

并设 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = S$. 因为(3)的括号中的项都同号,所以当 n 由 n_{k-1} 到 n_k 时,相应的原级数的部分和 S_n 将单调地在 A_{k-1} 和 A_k 之间变动,

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.co