

隧道力学

——力学基础知识——

【日】樗木 武著
侯 敬 英 译
江 国 正
刘 克 强 校

出版者的话

《隧道力学》一书是日本樱 本武著，由我前侯敬荣付总工程师翻译，经江国正、刘宪强等同志校对。由于印刷的原因，本书已译出一年多未予出版。今改正印装篇分期印发。

本书分四篇共十二章，约十八万字，其中内容包括力学基础、岩土力学、支护和衬砌力学及渗水力学等四个方面。

特此说明。

1981年10月

目 录

前 言	1
第一章 力学基础知识	3
第一节 力学基础	3
第一节 序 言	3
第二节 力的平衡条件	4
第三节 应变相容条件	5
第四节 应力——应变的结构式	6
第五节 边界条件	21
第六节 位移法的基础方程	22
第七节 力法的基础方程	24
第八节 解析方法的问题	26
第九节 变分原理	28
参考文献	33
第二章 塑性破坏理论	34
第一节 序 言	34
第二节 弹性破坏条件	35
第三节 破坏理论	45
第四节 塑性变形时的应力——应变结构式	50
参考文献	55
第三章 有限单元法	57
第一节 序 言	57
第二节 有限单元法力学位拟	58
第三节 有限单元法基本理论	59
第四节 关于计算	60
第五节 材料非线性问题的解析	69
第六节 粘弹性体解析	78
参考文献	80

前 言

以往的隧道力学，不论从哪方面说，都可视为以经验为主，而把施工当作中心内容的一门学问。若分析过去出版的书籍，其中隧道施工方法方面的佔绝对优势，或者大部分都是处理由此而带来的问题作为阐述中心。以此为前提，必然是很少从材料力学、结构力学或流体力学诸方面来分析隧道岩土应力状态或变形、解析衬砌或支护、掌握湧水特性等。这样，即使在钢材或混凝土等有关材料方面的力学已为人们所掌握，但包围它的岩土却是极为复杂的结构。况且，因位置、时间不同而不断变化，从定性或定量上掌握岩土性态就会引起很大困难。

然而，最近在岩土力学研究方面为建立其学科体系，在土力学或岩体力学的科学领域中已作出了最大努力。作为该学科的一个环节，在隧道问题上也进行了许多论述。著者对建立这一领域的学科体系也怀有浓厚兴趣。即将分散于地质工程、土质工程、岩体工程、地基工程、材料工程、结构工程及流体工程等领域中的有关隧道力学问题加以整理，为数虽少但目的是想在学科中建立一个体系。本书正是在这种意图下编着而成的。

本书内容大致可分为力学基础、岩土力学、支护及衬砌力学、湧水力学等四个方面。在力学基础理论中分析隧道力学问题时，概括地阐述了有关材料力学和结构力学的某些基本知识。而且也阐述了与此力学问题有联系的基础理论。在岩土力学中，则把隧道岩土力学特性按平面连续介质力学问题处理。在阐述解析理论的同时，也极力列举了有关具体解析结果。在支护及衬砌力学中，虽然主要是探讨承受地压作用的桁架结构问题。但在第十一章里也将岩土和支护、衬砌中难以分开的一些课题作为整体进行解析。对于隧道湧水问题，在技术上处于尚未成熟的阶段，也可说是尚待解决的课题。本书著者集中了以往研究成果作为中心内容，并

将其称为湧水力学。

隧道问题是一个纷繁复杂课题，因所处的现场不同而性质各异。所以，将以往经验直接应用到其它场所，在很多情况下是行不通的。因而对隧道问题，迫切要求从理论上弄清楚，本书目的也是想从这个意义上多少能提供些参考。但由于著者浅学浅识，很难达到这一目的。对此，尚请广大读者多加批评指正，使本书能够进一步充实提高，实原不胜之喜。

编著本书时，承蒙川崎制铁顾问山崎德也博士经常耐心指导和校阅，著者对此深表谢意。此外，对日常亲临指导的九州大学沼田实教授，在计划等其它方面给予帮助的九州大学铁道研究室各位学员，以及帮助整理图表的九州大学技术负责人堀和喜氏等深表谢意。

自从著者作为山崎先生的门生时就想动笔编著本书，但因留学海外，或忙于日常事务，直至完成编著，拖延很长年月。此间也曾给各方面添了不少麻烦。而且，对于不辞出版之劳的共立出版有限公司以濑水胜良氏为首的各位同仁致以深切敬意。

樱木 武

1977年9月

第一篇 力学基础知识

第一章 力学基础

第一节 序言

物体力学问题，具有荷载、应力、应变及位移四种类型的基本量，找出它们互相间的关系则是解析的目的。由于平衡条件可以给出荷载与应力的关系，由应力——应变结构式又可以给出应力和应变的关系。而且，从分析有关变形问题，也可求出应变和位移的关系。在这些条件中再加上边界条件，计算出满足所有条件的未知量（应力、应变、位移）就是力学问题的解析主题。

在实际解析时，由于上述各种条件的应用程序不同，可大致采用位移法和应力法两种方法。两种解法之中到底哪种优越根据问题的性质不同而有很大差异，不能一概而论。在弹性体中且假定为微量变形的情况，将其基本式线性化，这不但有利于解析，而且也能利用叠加原理。因此，在一些力学问题中，大都是把物体假定为弹性体，变形是有限的，而求其近似解。这个近似解如果对照工程目的，只能得出精度不定的解时，当然就必须进行较严密的材料力学性质，或有关变形问题的分析。然而如后面所叙述的，非弹性体的材料非线性问题，或变形不是有限的几何学上的非线性问题，反复利用弹性体有限变形问题的分析方法是可以解析出来的。

本章概述解析隧道力学时所必要的基础知识，以及解析要点，主要是根据弹性有限变形论，必要时也引进了材料的非线性

形问题。而有关几何学的非线性问题，在隧道力学上并非重要，因而从略。

第二节 力的平衡条件

设作用于物体内部任意微小面积 ΔA 上的内力总和为 ΔP 。
 ΔP 的法向分量为 ΔN ，切向分量为 ΔQ （图 1.1）。这时，
 由下式定义的力的强度称为应力。

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = p, \quad \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \sigma.$$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \tau \quad (1.1)$$

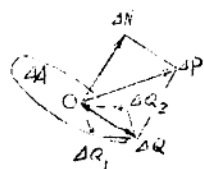


图 1.1

p 叫合成应力。称为垂直应力或正应力。 τ 为剪应力。

这样，从物体内部取出任意微小立方体 $dx dy dz$ ，用以分析作用于这个微小立方体上力的平衡条件。

在这个微小立方体表面上作用着正应力和剪应力，其内容为三个正应力分量（ σ ）和六个剪应力分量（ τ ）（图 1.2）。

此外，尚分布作用有重力
 和离心力等的体积力。

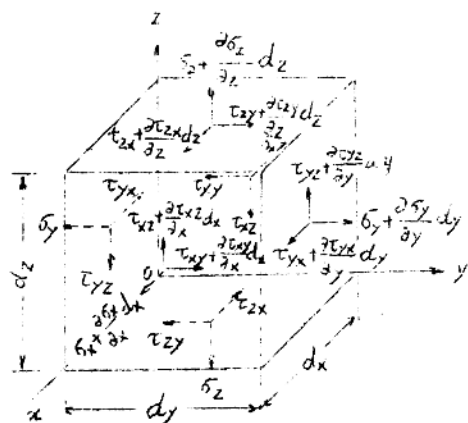


图 1.2

取体积力在 x, y, z 方向分量为 x, y, z ，首先求通过立方体中心且平行于 x, y, z 各轴的三轴旋转力矩的平衡条件，略去微小项，便可得出如下诸式。

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (1.2)$$

从六个剪应力分量中，只选出三个独立量就可以进行如下分析：

其次在考虑式 (1.2) 的基础上，求出 x, y, z 各轴方向的力的平衡条件如下式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

以二维应力状态（也叫作平面应力状态）来分析 xy 平面内的应力。假定在 z 方向无应力作用，则：

$$\begin{aligned} \sigma_z &\neq 0, \quad \sigma_y \neq 0, \quad \sigma_z \neq 0, \quad \tau_{xy} \neq 0, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

把它代入式 (1.3) 中，可以得出二维应力状态下的平衡条件为：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (1.5)$$

第三节 应变相容条件

试观察微小线素 ds ，如取其端点直角坐标系 (x, y, z) 的各轴向位移分量为 u, v, w ，则可定义出如下纵应变（简称为应变）。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.6)$$

分析微小面素 dx, dy 的变形状态，可定义出如下的剪切应变：

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.7)$$

在最一般的三维状态下，虽然存在上述六种应变，但它们都可由三个位移分量加以定义。因此它们都不是独立的，互相之间具有如下关系，而把它称之为相容条件，

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

对于只在 xy 平面内存在应变，面外方向不产生二维应变状态时（平面应变）则

$$\left. \begin{aligned} u \neq 0 \quad v \neq 0 \quad w = 0 \\ \varepsilon_x \neq 0 \quad \varepsilon_y \neq 0 \quad \varepsilon_z = 0 \quad \gamma_{xy} \neq 0 \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

这时可给出如下的相容条件：

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

第四节 应力——应变的结构式

A：应力——应变的基本结构式

在隧道工程中作为计标对象的材料，有土、岩石、混凝土、钢材、木材等，它们的应力和应变关系各因材料不同而异。因此，应针对每种材料来分析其应力—应变关系，详细问题请参考其它书籍，这里只介绍有关它们的实用计标结构式。

(1) 弹性体

模拟最简单的应力—应变关系是以下示的直线式，而把它称之为虎克定律。具有这种性质的理想材料就叫非弹性体。

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1.11)$$

E 为比例常数，称为弹性模量。

例如在进行单轴拉伸试验时，试件所以变化不仅是在拉伸方面发生应变 ε_1 ，而且在与此垂直方向也发生应变 ε_2 （图1.3）。这时，可将弹性体的 ε_1 和 ε_2 之比看成定值而为：

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \nu \quad (1.12)$$

ν 叫作泊松比。

(2) 硬化性弹塑性体，完全弹塑性体，完全刚塑性体

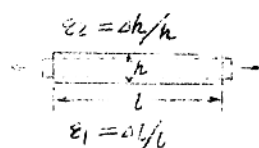


图 1.3

应力达到屈服点 σ_y 就产生塑性流，紧接着就引起应变硬化，此时的应力—应变结构式，可表示成如下形式，具有这种性质的材料叫作应变硬化性弹塑性体。

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_y \quad \sigma &= E\varepsilon \\ \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{st} \quad \sigma &= \sigma_y \\ \varepsilon_{st} < \varepsilon \quad \sigma &= E_{st}(\varepsilon - \varepsilon_{st}) + \sigma_y \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

式中， ε_y 为屈服应变，

ε_{st} ， E_{st} 分别为应变硬化起始点的应变，和切线系数。

上式中，特别是 $E_{st} = 0$ 时就产生无限制的塑性流（完全弹塑性体）。当 $E = 0$ 时，把弹性变形忽略不计，便可以把应力和应变的关系简化成如图 1.4 所示的折线 $CA'D$ 的情况（完全刚塑性体）。

(3) 双线型应力—应变结构式

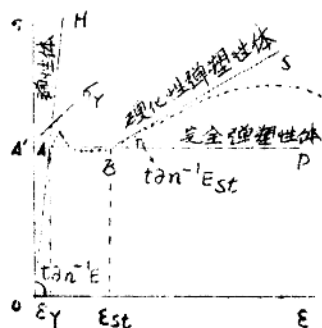


图 1.4

应力—应变曲线的理想化

不计塑性流的钢材，其应力—应变关系，作为第一近似可把它假定为弹塑性体。但是，对岩石或混凝土的应力—应变曲线从一开始就是以曲线形式出现，此种情况仅用一条直线加以近似是不够妥当的。因此，可以用两条以上的直线所构成的折线加以近

似，特别是对其中用两条直线近似的情况叫做双线性应力—应变结构式，可以按图用如下的数学公式（参照图 1.5）表示：

当 $\varepsilon \leq \varepsilon_y$ 时 $\sigma = E\varepsilon$ ，当 $\varepsilon \geq \varepsilon_y$ 时， $\sigma = E\sigma_y(\varepsilon - \varepsilon_y) + \sigma_y$ (1.14)

作为双线性型的引伸，对屈服点以后的应力—应变关系，也有时利用实际中的曲线（图 1.6），即把屈服点以后的应力—应变结构式取为

$$\sigma = F(\varepsilon) \quad (a)$$

把 ε 分为弹性部分 ε^e 和塑性部分 ε^p 采用 $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ 。此时式 (a) 的微分形式为：

$$d\sigma = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^e} \right) d\varepsilon^e + \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p} \right) d\varepsilon^p \quad (b)$$

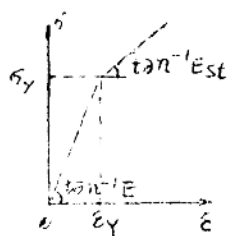


图 1.5

双线性应力—应变关系

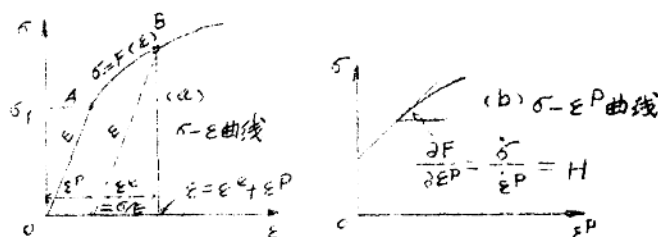


图 1.6 双线性应力—应变关系的一般形式

图中清楚看到， $\partial F / \partial \varepsilon^e = E$ ，且 $\partial F / \partial \varepsilon^p = H$ 是表示曲线的切线斜率，叫作应变硬化率。它是因应力的量级而变的。结果又可以把式 (b) 改写成如下形式：

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e + H\dot{\varepsilon}^p \quad (1.15)$$

式中 $\dot{\sigma} = d\sigma$ (应力增量)， $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon$ (应变增量)

(4) 粘弹性体

在说明蠕变、应力松弛和弹性后效等现象时，除了材料的固体性质而外，还要考虑到粘性流体的性质。即在前述应力和应变关系中再引进时间因素，对于这样的处理叫做流变学。

在用流变学处理的材料中，最简单的模拟是把应力和应变或应力速度和应变速度假定为具有线性关系弹性弹簧作为固体性质，而作为粘性性质，则是把应力和应变关系假定为具有线性关系的阻尼器，称为粘弹性体。根据弹性弹簧和阻尼器的各种结连形式提出了各种粘弹性的模拟，在其最基本的形式中，为弹簧与阻尼器串联的Maxwell单元以及并联的Voigt单元。还有把Maxwell单元、Voigt单元组成在一起，另外又加上弹簧或阻尼器的组合模拟，图1.7所示就是其中的一些例子。图(b) Voigt四个单元件是在说明近移蠕变和正常蠕变现象两种过程所最常使用的模拟。

如果把Voigt四个单元模拟定义为图中各点的应力，便可得如下应变各式：

$$\begin{aligned} \sigma &= E_{01}(\epsilon - \epsilon_1), & \dot{\sigma} &= \eta_{12}(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2), \\ \sigma &= E_{23}\epsilon_2 + \eta_{23}\dot{\epsilon}_2 \end{aligned} \quad (C)$$

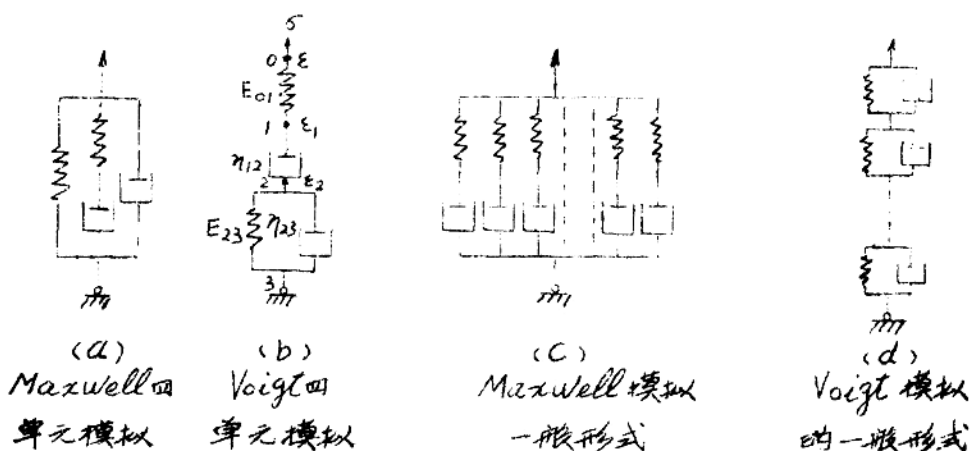


图 1.7 组合模拟

归纳上式用矩阵形式表示则：

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{01} & -E_{01} & 0 \\ -E_{01} & E_{01} & 0 \\ -E_{01} & -E_{01} & E_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{12} & -\eta_{12} \\ 0 & 0 & \eta_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \end{Bmatrix}$$

上式右边第一项为应变 ε 和内部应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的有关项，其系数是由弹簧弹性系数所构成。第二项为应变及内部应变速度分量的有关项，其系数是由阻尼器的粘性系数所构成。把它加以引伸便可把最一般的，组合模拟的流变方程表成如下形式：

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon}_1 \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

式中， $\varepsilon_1^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots]$ (内部应变向量，

A 为弹性系数矩阵， B 为粘性系数矩阵。

B. 三维应力状态的应力—应变线性结构式

(1) 一般各向异性体

在三维应力状态下，虽存在有六种应力和应变，但假定两者之间是成线性关系的，则各向异性体的应力—应变结构式可表示成如下形式：

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1.17)$$

式中： $\sigma^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]$

$\varepsilon^T = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]$ ， $E = [E_{ij}]$ (6×6 阶弹性常数矩阵)

弹性常数 E 单元虽然有 36 个，把它们都不是单独的，而成立 $E_{ij} = E_{ji}$ (而 $i \neq j$) 关系，36 个之中只有 21 个是独立的。此外，也可以把式 (1.17) 表示成如下形式。

$$\varepsilon = C \sigma \quad \text{式中 } C = [C_{ij}] = E^{-1} \quad (1.18)$$

(2) 正交各向异性体

对于特殊材料，解析上常用正交各向异性体。它们的材料力学性质具有互相直交的三条对称轴，如取原坐标系 (x, y, z)

与材料力学性质对称轴一致，把它绕Z轴旋转 180° 所得的一个坐标系设为 (x', y', z') 。这时，在正交各向异性体中，必定给出与旧坐标相同形式的 x' 方向应力 $\bar{\sigma}_{x'}$ 及各轴方向的应变分量即：

$$\sigma_x = e_1 * e, \quad \bar{\sigma}_{x'} = e_1 * e'$$

式中， $e_1 * = [E_{11}, E_{12}, \dots, E_{16}]$

另一方面，求出旧坐标系和新坐标系构成的方向余弦，进行应力及应变的坐标变换则：

$$\bar{\sigma}_{x'} = \sigma_x$$

$$e_{x'} = e_x, \quad e_{y'} = e_y, \quad e_{z'} = e_z, \quad \gamma_{x'y'} = \gamma_{xy}, \quad \gamma_{y'z'} = -\gamma_{yz},$$

$$\gamma_{z'x'} = -\gamma_{zx}$$

把它们代入(d)中使得：

$$\bar{\sigma}_{x'} = e_1 * e, \quad \bar{\sigma}_{x'} = e_1 * [e_x \ e_y \ e_z \ \gamma_{xy} \ -\gamma_{yz} \ -\gamma_{zx}]^T$$

按正交各向异性体性质，必定是 $\bar{\sigma}_{x'} = \sigma_{x'}$ 。为了使这一关系成立，必定 $E_{15} = E_{16} = 0$ 。同样，也分析式(1.17)以外的其它五种形式，再使坐标系不绕Z轴，而使其绕x、y轴旋转 180° 加以分析就可重新求出如下诸式：

$$E_{14} = E_{24} = E_{25} = E_{26} = E_{34} = E_{35} = E_{36} = E_{45} = E_{46} = E_{56} = 0$$

根据前述，最后正交各向异性的应力—应变结构式变成如下形式，而其独立的弹性常数只有九个即：

$$\sigma = E_{0Y} \epsilon \quad (1.19)$$

式中

$$E_{0Y} = \begin{bmatrix} E_{11} & & & & & \\ E_{12} & E_{22} & & & & \\ E_{13} & E_{23} & E_{23} & & & \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{SYM} \\ \\ \end{matrix}$$

或可以表示为：

$$\epsilon = Cor \sigma \quad (1.20)$$

式中：

$$Cor = E_{or}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_y & -\nu_{xz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_x & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_x & -\nu_{zy}/E_y & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{zx} \end{bmatrix}$$

E 为弹性模量， ν 为泊松比， G 为剪切弹性模量。

$$\frac{\nu_{xy}}{E_y} = \frac{\nu_{yx}}{E_x}, \quad \frac{\nu_{xz}}{E_z} = \frac{\nu_{zx}}{E_x}, \quad \frac{\nu_{yz}}{E_z} = \frac{\nu_{zy}}{E_y}$$

$$\frac{1}{G_{xy}} = 2\left(\frac{1}{E_x} + \frac{\nu_{xy}}{E_y}\right), \quad \frac{1}{G_{yz}} = 2\left(\frac{1}{E_y} + \frac{\nu_{yz}}{E_z}\right), \quad \frac{1}{G_{zx}} = 2\left(\frac{1}{E_z} + \frac{\nu_{zx}}{E_x}\right)$$

(3) 在平面内视为各向同性的物体

如果堆积土或沉积岩那种在沉积面内表现为各向同性力学性质，而在该面以外方向则是不同的物体这是本项分析的对象。现设在 xy 面内呈各向同性，则在前节 (2) 的各式中变换下标 x, y 也必定得出相同的应力和应变关系。由此可得如下有关弹性模量的关系式：

$$E_{11} = E_{22} \quad E_{13} = E_{23} \quad E_{55} = E_{66}$$

另一方面，将座标系统 Z 轴旋转任意角度，用得出的新座标系 (x', y', z') 来分析剪切应力 $\tau_{x'y'}$ ，即以 $\tau_{x'y'} = E_{44} \gamma_{x'y'}$ 将应变座标变换式代入 $\gamma_{x'y'}$ 中，得到的结果和由应力座标变换式从另一方法求得的 $\tau_{x'y'}$ 必然互等，而可得下式：

$$E_{11} - E_{12} = 2E_{44}$$

如上所述，就可得出本题中如下所示的应力—应变构造式。而式中独立的弹性常数则有五个。

$$\sigma = \tilde{E}_0 \varepsilon \quad (1.21)$$

$$\tilde{E}_0 = \begin{bmatrix} E_{11} & & & & & & \\ E_{11} - 2E_{44} & E_{11} & & & & & \\ E_{13} & E_{13} & E_{33} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & \end{bmatrix} \quad \text{SYM}$$

对式 (1.21) 用同样方法分析, 则可得出下式:

$$\varepsilon = \tilde{C}_0 \sigma \quad (1.22)$$

式中:

$$\tilde{C}_0 = \tilde{E}_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & & & & & & \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_x & & & & & \\ -\nu_{xz}/E_z & -\nu_{xz}/E_z & 1/E_z & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & \end{bmatrix}$$

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{1}{2G_{xy}} - \frac{1}{E_x}$$

(4) 各向同性体

在前节 3 中即使把 x 和 y 加以互换也可成立同样应力—应变关系, 再将 x 和 z , y 和 z 加以互换从其所形成的同样的结构式中找出弹性常数间的如下关系, 则为:

$$E_{11} = E_{33}, \quad E_{13} = E_{11} - 2E_{44}, \quad E_{55} = E_{44}$$

因此, 独立的弹性常数只限有两个。这室如事先假定 $E_{13} = \lambda$, $E_{44} = \mu$, 便得出 $E_{11} = \lambda + 2\mu$ 。而把 λ 、 μ 称之为 Lamé 常数。如果利用这个常数, 各向同性体的应力—应变结构式可表成如下形式:

$$\sigma = E_0 \varepsilon \quad (1.23)$$

式中:

$$E_0 = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & & & & & \\ & \lambda & \lambda+2\mu & & & \\ & \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & & \\ & 0 & 0 & 0 & \mu & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

同样, 如把式 (1.22) 改写为本题的结构式则为:

$$E = C_0 \bar{\sigma} \quad (1.24)$$

式中:

$$C_0 = E_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & & & & & & \\ -V/E & 1/E & & & & & \\ -V/E & -V/E & 1/E & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{SYM} \\ G = \frac{E}{2(1+V)} \end{matrix}$$

还有: λ 、 μ 和 E 、 V 、 G 的关系为:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu} \mu, \quad V = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \quad G = \mu \\ \lambda &= \frac{VE}{(1+V)(1+2V)}, \quad \mu = \frac{E}{2(\lambda+V)} \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

在建立应力—应变结构式时, 有时也用如下式定义的体积弹性率 K :

$$K = \frac{\text{静水压力}}{\text{体积应变}} = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2V)} = \frac{2(1+V)G}{3(1-2V)} \quad (1.26)$$

此时, 可把结构式分为体分量和偏差分量而为:

$$\bar{\sigma} = 3K\bar{\epsilon}_m + 2G\bar{\epsilon} \quad (1.27)$$

式中: $\bar{\epsilon}_m^T = [\epsilon_m \ \epsilon_m \ \epsilon_m \ 0 \ 0 \ 0]$ (体积应变)