XINJIAOCAI SHUXUE TONGBU FENCENG DAOXUE

配上海二期课改新教材

主编 忻再义

新教材数学

同步分层导学

高中二年级第一学期用

上海科学技术出版社

新教材

数学

同步分层导学

高中二年级第一学期用

主　编　忻再义

上海科学技术出版社

内 容 提 要

数学同步分层导学是与新教材内容紧密配合的学生同步辅导读物，旨在同步地对课堂内容进行补充，并为学生提供训练机会．本书是其中一册．

本书将每章内容按单元进行划分，每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]等栏目组成，每章末还有[研究性学习]、[阅读与欣赏]栏目．整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[参考答案]等．

图书在版编目（CIP）数据

新教材数学同步分层导学．高中二年级第一学期用／忻再义主编．—上海：上海科学技术出版社，2007.8（2008.6重印）
ISBN 978-7-5323-9033-5

Ⅰ．新…　Ⅱ．忻…　Ⅲ．数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第115323号

责任编辑　周玉刚　朱先锋

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版、发行
（上海钦州南路71号　邮政编码200235）
新华书店上海发行所经销　上海市美术印刷厂印刷
开本787×1092　1/16　印张10　字数231000
2007年8月第1版　2008年6月第2次印刷
印数：5301-7800
ISBN 978-7-5323-9033-5
定价：14.00元

出版说明

这套同步分层导学丛书以上海市二期课改新教材为依据，内容紧密配合教材．本丛书按每学期一册编写，旨在同步地对课堂内容进行辅导，为学生提供训练机会，并成为课堂教学的有益的参考辅导读物．

本丛书将每章内容按单元进行划分，每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]等栏目组成，每章末还有[阅读与欣赏]、[研究性学习]等栏目．整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[参考答案]等．

[综合导学]按这一单元的知识要点、例题剖析、思维误区、方法指导、请你思考等进行编写．

[随堂应用]按课时需要编写，每一单元可根据内容分成多个[随堂应用]，每个[随堂应用]安排3～5题与课堂教学内容密切相关的练习题，供学生课后复习巩固之用．其内容的深浅、顺序与课堂内容一致．

[分层达标]对本单元的有关知识以试卷形式让学生进行训练，分为基础型、提高型两组题目．

[阅读与欣赏]根据二期课改的新理念编写，旨在开拓学生的眼界，提高学生的学习兴趣．

[研究性学习]根据二期课改的新理念编写，旨在让学生在探究的过程中，培养其创新能力．

[阶段测试]供学生在每学期期中复习时使用安排两份阶段测试练习题．

[期末测试]供学生在每学期期末复习时使用安排两份期末测试练习题．

[参考答案]给出了[随堂应用]、[分层达标]、[阶段测试]、[期末测试]的答案，对有难度的题目，进行详细解答．

本册主编为忻再义，参加本册编写的有：熊秋菊（第7章第一至四单元）、赵岩（第7章第五至六单元、第9章）、阮瑾怡（第8章）、杨侃（第10章）等．本册由忻再义统稿．

目录

目录

目录

第 7 章 数列与数学归纳法

第一单元　数　列

综合导学

知识要点

1. 理解数列的概念;知道数列的表示法.
2. 理解有穷数列、无穷数列的概念.
3. 掌握数列的通项公式的概念;能根据数列的通项公式写出数列的项.

例题剖析

例 1　已知下列数列的前四项,试写出它的一个可能的通项公式.

(1) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \cdots$;

(2) $1, 3, 6, 10, \cdots$.

分析　本例给出了数列的前四项求通项,一般可先观察分析各项的特点:如(1)中所给的奇数项为正,偶数项为负,从而第 n 项的符号为$(-1)^{n+1}$,而各项分子是自然数,分母比分子大 1,这样其中的规律就很明显了;(2)中的各项先乘以 2 再除以 2,并将所得数的分子分解成两个连续正整数的积,即可找到规律.

解　(1) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$;

(2) 观察,得　$1=\frac{1\times 2}{2}$, $3=\frac{2\times 3}{2}$, $6=\frac{3\times 4}{2}$, $10=\frac{4\times 5}{2}$,

∴　$a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

例 2　已知数列$\{a_n\}$中的奇数项都是 1,偶数项都是 0,有下列各式:

(1) $a_n=\begin{cases}1, 当\ n=2k-1\ 时;\\ 0, 当\ n=2k\ 时\end{cases}$ $(k\in \mathbf{Z}^+)$;　(2) $a_n=\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|$.

问:(1)、(2)都能作为数列$\{a_n\}$的通项公式吗?

分析　知道一个数列的通项公式,只要分别代入项数 n 的值就可以得到数列相应的项 a_n. 反过来,除所有项都给出的数列外,要唯一地确定一个数列,一般应给出它的通项公式.

解　(1) 易检验:当 n 为奇数时,$a_n=1$;当 n 为偶数时,$a_n=0$.

∴　$a_n=\begin{cases}1, 当\ n=2k-1\ 时;\\ 0, 当\ n=2k\ 时\end{cases}$ $k\in \mathbf{Z}^+$ 可以表示已知数列的通项公式;

(2) 当 $n=1$ 时，$a_1=\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|=1$，

当 $n=2$ 时，$a_1=\left|\sin\frac{2\pi}{2}\right|=0,\cdots$，

即当 $n=2k-1(k\in\mathbf{Z}^+)$ 时，

$$a_n=\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|=\left|\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}\right|=\left|\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right|=1;$$

当 $n=2k(k\in\mathbf{Z}^+)$ 时，$a_n=\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|=\left|\sin\frac{2k\pi}{2}\right|=|\sin k\pi|=0$.

所以，$a_n=\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|$ 也可以表示已知数列的通项公式.

说明 一个数列的通项公式的形式不唯一，反之，已知一个数列的通项公式就唯一地确定了这个数列中的每一项.

思考 你还能写出本例其他形式的通项公式吗?

例 3 有下列四个命题：

(1) 任何数列都有通项公式；

(2) 数列 1,2,3,…,98,99 共有 99 项；

(3) 任何数列都有首项和末项；

(4) 数列 1,2,3 与数列 3,2,1 是两个不同的数列.

其中真命题的个数为(　　).

(A) 0　　　(B) 1　　　(C) 2　　　(D) 3

分析 (1)如果数列$\{a_n\}$的第 n 项 a_n 与 n 之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的通项公式. 不是每一个数列都是有“规律”可寻，因此，有些无穷数列是无法找到其通项公式的；(2)因为未给出数列的通项公式，所以无法断言数列 1,2,3,…,98,99 共有 99 项；(3)无穷数列无法确定哪一项是末项；(4)数列的定义为：按一定次序排列起来的一列数叫做数列，虽然 1,2,3 与 3,2,1 中数字一样，但表示不同的数列.

解 选 B，只有(4)是真命题.

例 4 根据图 7-1 所示及相应的点数，写出一个由这些图形的点数组成的数列的前 5 项及此数列的递推公式.

图 7-1

分析 图 7-1 中的点数组成的数列的前 4 项为 1,3,6,10. 其中 $3=1+2$，$6=3+3$，$10=6+4$，所以第 5 个图的点数可以为 $10+5=15$，递推式的后一项可以等于它前一项加上这一项的项数.

解 图中点数所组成的一个数列的前 5 项可以为

1,3,6,10,15.

递推公式可以为 $\begin{cases}a_1=1,\\a_{n+1}=a_n+n.\end{cases}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$

思维误区

例 5 有下列四个命题：

(1) 数列 1,3,5,7,9 的一个通项公式是

$$a_n=2n-1, n\in \mathbf{N}^*;$$

(2) $b,b,b,b,\cdots$(b 为常数)是一个常数列；

(3) 集合$\{x|x=2n,n\in \mathbf{N}^*\}$可以表示由正偶数按从小到大的次序排列所得的数列；

(4) 已知数列$\{a_n\}$,$a_n=2n-10$ 从第 6 项起各项都是正数.

其中是真命题的序号是____________.

错解 (1),(2),(3),(4).

分析 对(1)尽管给出了通项公式,但已知数列是一个只有 5 项的有穷数列,因此,通项公式中应对 n 的范围加以限制,所以(1)为假命题;(2)中给出了数列的前 4 项,无法断言后面的各项是否都是 b,所以(2)也是假命题;(3)因为集合$\{x|x=2n,n\in \mathbf{N}^*\}$表示每个正偶数都是这个集合中的元素,其他的数都不是这个集合中的元素.而对这个集合的元素却没有也无须规定排列的次序,所以不能用集合表示数列,所以(3)也是假命题.只有(4)是真命题.

正解 (4).

方法指导

例 6 对于任意的正数 n,若数列$\{a_n\}$中都有 $a_{n+1}>a_n$,则称数列$\{a_n\}$为递增数列;反之 $a_{n+1}<a_n$,则称数列$\{a_n\}$为递减数列.判断下列数列是递增数列还是递减数列?

(1) $a_n=3n-1$;　　(2) $a_n=3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$;　　(3) $a_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$.

分析 本题需比较数列前、后项的大小,常用的方法为比较法.

解 (1) 对任意的正整数 n,

$$a_{n+1}-a_n=3(n+1)-1-3n+1=3>0,\quad \therefore\quad a_{n+1}>a_n.$$

所以,数列$\{a_n\}$为递增数列;

(2) 对任意的正整数 n,

$$\because\quad a_1=-\frac{3}{2},\ a_2=\frac{3}{4},\ a_3=-\frac{3}{8},\cdots,$$

数列$\{a_n\}$既不是递增数列也不是递减数列.

(3) $\because\quad a_n=2-\dfrac{3}{n+1}$,

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=2-\frac{3}{n+1+1}-2+\frac{3}{n+1}=\frac{3}{(n+1)(n+2)}>0,$$

所以数列$\{a_n\}$为递增数列.

随堂应用

应用　数列

1. 若数列$\{a_n\}$的通项为 $a_n=n^2-1$,则 99 为该数列的第________项.

2. 数列 $-1,\dfrac{6}{5},-\dfrac{9}{7},\dfrac{4}{3},\cdots$的一个通项公式为________.

3. 在数列$\{a_n\}$中，若$a_n=\frac{3^n}{n+1}$，则它的前5项分别为____________.

4. 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_n=2n^2-n-1$，

(1) 写出a_8，a_{n+1}；

(2) 问20是否是数列$\{a_n\}$中的项？若是，是第几项？若不是，说明理由.

分层达标

基础型

一、填空题

1. 命题“任一数列都有通项公式”是________（填“真”或“假”）命题.

2. “数列的递推公式是唯一确定的”是________（填“真”或“假”）命题.

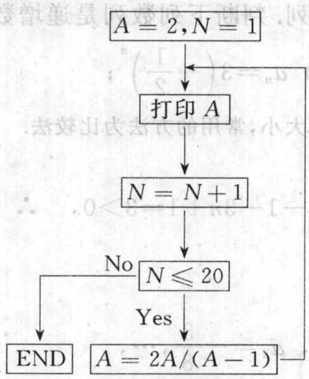
3. 数列$\frac{1}{2}$，$-\frac{4}{5}$，$\frac{9}{10}$，$-\frac{16}{17}$，…的一个通项公式可以为____________.

4. 若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}a_n=a_n+(-2)^n$，且$a_1=1$，则$\frac{a_4}{a_2}=$________.

二、解答题

5. 在数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…的每相邻两项中间插入3个数，若所得数列构成一个新数列，则新数列的第29项是原数列的第几项？

6. 根据下列流程框图，试建立数列的递推公式.



（第6题）

7. 在数列$\{a_n\}$中，已知$a_n=\frac{n+1}{n-1}$，$2\leqslant n\leqslant 30$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$a_1=0$，问该数列是否存在数值最大的项？若存在求出最大项的值；若不存在，试说明理由.

提高型

一、填空题

1. 写出下列数列的一个通项公式.

(1) 5，9，13，17，21，…，$a_n=$________；

(2) 3，5，9，17，33，…，$a_n=$________；

(3) 9，99，999，9 999，99 999，…，$a_n=$________；

(4) 7,77,777,7 777,77 777,…,$a_n=$______.

2. 写出下列数列的一个递推式.

(1) 2,−4,8,−16,32,…______;

(2) 1,4,7,10,13,…______;

(3) 1,0,−1,−2,−3,…______.

3. 若数列为:$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{7}$,3,$\sqrt{11}$,…,$\sqrt{2n+1}$,…,则$3\sqrt{3}$是此数列的第____项.

二、选择题

4. 数列 $1,\underbrace{2,2}_{2个},\underbrace{3,3,3}_{3个},\underbrace{4,4,4,4}_{4个},\cdots,\underbrace{n,n,\cdots,n}_{n个},\cdots$中,第100项是(　　).

(A) 10　　(B) 13　　(C) 14　　(D) 100

5. 已知数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$中的奇数项都是1,偶数项都是−1,有下列各式:

① $a_n=(-1)^{n-1}$;　　② $a_n=\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi$;　　③ $a_n=\tan\dfrac{2n-1}{4}\pi$.

那么其中能作为数列$\{a_n\}$的通项公式的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

三、解答题

6. 已知数列$\{a_n\}$的第一项是1,以后各项由公式$a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$给出,写出这个数列的前5项,并判断$\dfrac{13}{9}$是不是此数列中的项?

7. 在数列$\{a_n\}$中,通项公式a_n是n的二次函数,若$a_2=3$,$a_5=8$,则数列$\{a_n\}$能否确定?若能确定,请求出通项公式;若不能确定,请添加条件,使之能确定,并求出相应的通项公式.

第二单元　等差数列

综合导学

知识要点

1. 掌握等差数列的概念,会求等差数列的公差与通项公式.
2. 掌握等差中项的概念,会求两个数的等差中项.
3. 掌握等差数列前n项之和的概念,会求已知等差数列的前n项和.

例题剖析

例1 (1) 已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_3=14$,$a_{10}=35$,求a_{29};

(2) 已知$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列,且$a_4=6$,$a_6=4$,求$a_{10}$.

分析 利用等差数列的通项公式及已知的条件,可得到关于首项和公差的两个方程.解方程组即可得到首项与公差的值,从而可求出所要求的值.

解　(1) 设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，则

$$a_3=14=a_1+(3-1)d. \quad ①$$

$$a_{10}=35=a_1+(10-1)d. \quad ②$$

联立①、②解方程组，得

$$a_1=8, d=3.$$

$\therefore$　$a_{29}=a_1+(29-1)d=8+28\times3=92$；

(2) 设数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的首项为$\dfrac{1}{a_1}$，公差为$d$，则

$$\frac{1}{a_4}=\frac{1}{6}=\frac{1}{a_1}+(4-1)d, \quad ①$$

$$\frac{1}{a_6}=\frac{1}{4}=\frac{1}{a_1}+(6-1)d. \quad ②$$

联立①、②解方程组，得

$$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{24}, d=\frac{1}{24}.$$

$\therefore$　$\dfrac{1}{a_{10}}=\dfrac{1}{24}+9\times\dfrac{1}{24}=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$. 即$a_{10}=\dfrac{12}{5}$.

说明　本例也可按以下方法不求a_1，通过求d后，直接求解.

(1) 由$a_{10}=a_3+(10-3)d$，得$d=\dfrac{a_{10}-a_3}{7}=3$，故$a_{29}=a_{10}+(29-10)d=92$；

(2) 由$\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_4}+(6-4)d$，得$d=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}{2}=\dfrac{1}{24}$，故$\dfrac{1}{a_{10}}=\dfrac{1}{a_6}+(10-6)d=\dfrac{5}{12}$，$a_{10}=\dfrac{12}{5}$，其解题依据见例2.

例2　已知数列$\{a_n\}$为等差数列，d为公差，a_m为数列的第m项，试用a_m表示a_n.

分析　由等差数列的通项公式可将a_m用a_1表示，由此可得用a_m表示a_1的式子，再代入数列的通项公式中即可.

解　$\because$　$a_m=a_1+(m-1)d$，$\therefore$　$a_1=a_m-(m-1)d$.

代入$a_n=a_1+(n-1)d$，得

$$a_n=a_m-(m-1)d+(n-1)d=a_m+(n-m)d.$$

即　$a_n=a_m+(n-m)d$.　$(m,n\in\mathbf{N}^*)$

说明　不妨设$m<n$，显然数列$a_m,a_{m+1},\cdots,a_n$也是等差数列，它的首项为a_m，公差仍为d，a_m为第1项，a_n为第$n-(m-1)$项. 对这个数列应用通项公式，得

$$a_n=a_m+[n-(m-1)-1]d=a_m+(n-m)d.$$

当$n<m$时，有$a_m=a_n+(m-n)d$，同样可得$a_n=a_m+(n-m)d$.

例3　已知在等差数列$\{a_n\}$中，若对正整数m,n,s,t满足$m+n=s+t$，则可证明等式$a_m+a_n=a_s+a_t$成立.

分析　用首项和公差来表示a_m+a_n、a_s+a_t即可证得.

证明　设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，则

$$a_m+a_n=2a_1+(m+n-2)d,$$

$$a_s+a_t=2a_1+(s+t-2)d.$$

而$m+n=s+t$，　$\therefore$　$a_m+a_n=a_s+a_t$.

例 4 (1) 已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=15$,$a_8=-3$,S_n 表示其前 n 项和,求满足 $S_n=63$ 的所有 n 值;

(2) 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=-60$,$a_5=-48$,求数列$\{|a_n|\}$的前 30 项之和.

分析 (1) 在等差数列$\{a_n\}$中,已知 a_2、a_8,利用其通项公式求出首项和公差,然后用等差数列前 n 项和公式求出 S_n,解方程 $S_n=63$ 即可;(2) 要求数列$\{|a_n|\}$的前 30 项之和,关键是要确定原数列$\{a_n\}$中有多少项为负值.

解 (1) 设首项为 a_1,公差为 d,则

$$a_8=a_2+6d.$$

$\because\ a_2=15,a_8=-3,$

$\therefore\ d=-3,a_1=18.$

$\therefore\ 63=S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=18n-\dfrac{n(n-1)}{2}\times 3,$

即 $n^2-13n+42=0.$

解方程,得 $n=6$ 或 $n=7$.

$\therefore$ 满足 $S_n=63$ 的所有 n 值为 6 或 7.

(2) $\because\ a_5=a_1+4d$,即$-48=-60+4d$,$\therefore\ d=3.$

$a_n=-60+3(n-1)=3n-63.$

当 $1\leqslant n\leqslant 20,n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n<0$.

当 $n=21$ 时,$a_n=0$;

当 $n\geqslant 22,n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n>0$.

$$\begin{aligned}\therefore\ &|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|\\&=-a_1-a_2-\cdots-a_{20}+a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{30}\\&=S_{30}-2S_{20}=\frac{-60+27}{2}\times 30-2\times\frac{-60+(-3)}{2}\times 20\\&=765.\end{aligned}$$

例 5 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^3+3n+1$,求数列的通项公式.

分析 利用数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系式时,特别要注意检验 a_n 对 $n=1$ 时的情况.

解 $a_1=S_1=5,$

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n^3+3n+1-(n-1)^3-3(n-1)-1\\&=3n^2-3n+4.\end{aligned}$$

当 $n=1$ 时,$3n^2-3n+4=4\neq a_1$,

$$\therefore\ a_n=\begin{cases}5, & \text{当 } n=1 \text{ 时;}\\ 3n^2-3n+4, & \text{当 } n\geqslant 2 \text{ 且 } n\in\mathbf{N} \text{ 时.}\end{cases}$$

例 6 等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=2$,且该数列的前 3 项之和等于前 11 项之和,求当 n 为何值时,S_n 最大?

分析 求 S_n 最值的常见方法为把 S_n 表示为 n 的函数,然后用求函数最值的方法求解.要把 S_n 表示为 n 的函数,根据已知条件只要求出公差 d.该题也可用等差数列中项的正负来求 S_n 的最大值.

解法一 $a_1=2,S_3=S_{11},$

即 $3a_1+\frac{3(3-1)}{2}d=11a_1+\frac{11(11-1)}{2}d$.

解方程，得 $d=-\frac{4}{13}$.

$$S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\left(-\frac{4}{13}\right)=-\frac{2}{13}n^2+\frac{28}{13}n$$

$$=-\frac{2}{13}(n-7)^2+\frac{98}{13}.$$

所以当 $n=7$ 时，S_n 最大.

解法二 $\because$ $S_3=S_{11}$,

即 $a_1+a_2+a_3=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11}$,

$\therefore$ $a_4+a_5+\cdots+a_{10}+a_{11}=0$.

又 $\because$ $a_4+a_{11}=a_5+a_{10}=a_6+a_9=a_7+a_8$,

$\therefore$ $a_7+a_8=0$, 又 $a_1=2>0$,

$\therefore$ $a_7>0, a_8<0$.

$\therefore$ $n=7$ 时，S_n 最大.

解法三 由解法一，得 $d=-\frac{4}{13}$.

由 $a_n=2+(n-1)\left(-\frac{4}{13}\right)\geqslant 0$，得 $n\leqslant\frac{13}{2}+1$.

$\therefore$ $n=7$ 时，S_n 最大.

思维误区

例 7 数列 $\{a_n\}$ 中，已知 a_1, a_2, a_3 成等差数列且它们的和为 15，a_4, a_5, a_6 满足：$a_5^2=a_4a_6$，$a_4a_5a_6=27$，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 均有 $a_{n+6}=a_n$.

(1) 求 a_2, a_5, a_8 的值；

(2) 求数列 $\{a_{3k-1}\}(k\in\mathbf{N}^*)$ 的前 101 项的和.

说明 该题的思维误区出现在第(2)小题上.

错解 (1) $\because$ a_1, a_2, a_3 成等差数列，即 $a_1+a_3=2a_2$，且 $a_1+a_2+a_3=15$,

$\therefore$ $a_2=5$.

又 $\because$ $a_5^2=a_4a_6$, $a_4a_5a_6=27$,

$\therefore$ $a_5=3$.

又 $\because$ $n\in\mathbf{N}^*$, $a_{n+6}=a_n$,

$\therefore$ $a_8=a_{2+6}=a_2=5$,

$\therefore$ a_2, a_5, a_8 的值分别为 5,3,5;

(2) 数列 $\{a_{3k-1}\}k\in\mathbf{N}^*$ 的前 101 项和为

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}.$$

由题目中条件无法求出 $a_1, a_3, a_4, a_6, \cdots$ 等项，所以无法求出数列 $\{a_{3k-1}\}k\in\mathbf{N}^*$ 的前 101 项的和.

分析 以上解不出的原因是没理解数列 $\{a_{3k-1}\}$ 与原数列 $\{a_n\}$ 的关系. 数列 $\{a_{3k-1}\}$ 由原数列 $\{a_n\}$ 中的

第 2 项作为第 1 项，第 5 项作为第 2 项，……，第 $3k-1$ 项作为第 k 项组成. 所以数列$\{a_{3k-1}\}k\in\mathbf{N}^*$ 的前 101 项和为：

$$a_2+a_5+a_8+a_{11}+\cdots+a_{3\times101-1}.$$

正解　由题意数列$\{a_{3k-1}\}k\in\mathbf{N}^*$ 的前 101 项和为

$S=a_2+a_5+a_8+a_{11}+\cdots+a_{3\times101-1}$，

$\because$　$a_{n+6}=a_n, n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore$　$a_{11}=a_5=3$，

$a_{14}=a_8=a_2=5$.

以此类推　$a_{3\times101-1}=a_2=5$，

$\therefore$　$S=50\times3+51\times5=405$.

方法指导

例 8　已知数列$\{a_n\}$不是等差数列，且 $b_n=a_{n+1}-a_n$，试问数列$\{b_n\}$能否为等差数列？如能，写出一个满足条件的$\{b_n\}$；如不能，请说明理由.

分析　本题是一道开放题，帮助学生理解等差数列的意义，同时也为后面构造等差数列作准备.

解　由 $b_n=a_{n+1}-a_n$ 为等差数列可知

$$b_{n+1}-b_n=d,$$

即　$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=d$，

$$a_{n+2}=d+2a_{n+1}-a_n.$$

由上述递推式，只要给出 a_1、a_2 及 d 就可相应地得到数列$\{b_n\}$.

如 $a_1=1, a_2=3, d=2$ 可得数列：

1,3,7,13,21,⋯

例 9　已知等差数列$\{a_n\}$的首项为 2，公差为 2.

(1) 求$\{a_n\}$的前 n 项的和 S_n；

(2) 求$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$的前 n 项和 T_n；

(3) 若对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都存在整数 m，使得 $\dfrac{m}{12}<T_n$，则整数 m 的最大值为何值.

分析　(1) 等差数列$\{a_n\}$的首项、公差已知，所以只需直接应用等差数列前 n 项和公式求解；(2)由(1)可得$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$的通项公式，然后用“裂项相消”求其前 n 项和 T_n. (3)由数列的单调性求 T_n 的最小值，从而可求得 m 的最大值，这也是“恒成立”问题的一种通法.

解　(1) $\{a_n\}$是等差数列，$a_1=2, d=2$，则

$$a_n=2+(n-1)\times2=2n,$$

$\therefore$　$S_n=n(n+1)$；

(2) $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

$$\therefore T_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1};$$

(3) $T_{n+1}-T_n=1-\frac{1}{n+2}-1+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}>0$,

$\therefore\quad T_{n+1}>T_n$.

$\therefore\quad T_n$ 随 n 的增大而增大，

即　　当 $n=1$ 时 $(T_n)_{\min}=T_1=\frac{1}{2}$.

对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $\frac{m}{12}<\frac{1}{2}$，得 $m<6$，

所以整数 m 的最大值是 5.

随　堂　应　用

应用　等差数列

一、选择题

1. 下列数列中，成等差数列的是（　　）.

(A) $\sin^2\alpha,1,\cos^2\alpha$　　(B) $\cos^2\alpha,\cos2\alpha,-\sin^2\alpha$

(C) $-\tan^2\alpha,1,\sec^2\alpha$　　(D) $\tan150°,\tan30°,\tan60°$

2. 若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=-3n-2(n\in\mathbf{N}^*)$，则这个数列是一个（　　）.

(A) 以 -5 为首项，3 为公差的等差数列

(B) 以 -5 为首项，-3 为公差的等差数列

(C) 以 -2 为首项，3 为公差的等差数列

(D) 以 -2 为首项，-3 为公差的等差数列

3. 由下列的递推公式，可以确定数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$为等差数列的是（　　）.

(A) $\begin{cases}a_1=2,\\a_{n+1}+1=(a_n+1)+3\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}a_1=2,\\|a_{n+1}|=|a_n|+3\end{cases}$

(C) $\begin{cases}a_1=2,\\\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{a_n}+3\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}a_1=2,\\a_{n+1}^2=a_n^2+3\end{cases}$

二、填空题

4. 若 $2,\log_3x^2,-4$ 三数成等差数列，则实数 $x=$________.

5. 在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_2=3,a_5=9$，则 $a_{20}=$________.

6. 在等差数列$\{a_n\}$中，若公差 $d=1,a_4+a_{17}=8$，则 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=$________.

7. 若数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 $S_n=3n^2+n+1$，则此数列的通项公式 $a_n=$________.

三、解答题

8. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1=2$，它的前 5 项和为 $S_5=17$. 求它的前 n 项和 S_n，并求 S_{12}.

9. 设 S_n 和 T_n 分别是两个等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项之和，若对于 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $S_n:T_n=(7n+1):(4n+27)$，求 $a_{11}:b_{11}$ 的值.

10. 在等差数列中，已知 $a_1=25,S_9=S_{17}$，问数列前多少项之和最大？并求此最大值.