

狭义相对论与时空图

黄献民 著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

狭义相对论与时空图

黄献民 著

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

狭义相对论与时空图 / 黄献民著. —北京: 国防工业出版社, 2008. 3

ISBN 978-7-118-05446-0

I. 狭... II. 黄... III. 狭义相对论 IV. 0412.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 175510 号

※

国防工业出版社发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

腾飞胶印厂印刷

新华书店经营

*

开本 787 × 1092 1/16 印张 8½ 字数 195 千字
2008 年 3 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 26.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 68428422 发行邮购: (010) 68414474
发行传真: (010) 68411535 发行业务: (010) 68472764

内 容 简 介

这是一本用时空几何图来解释和讨论狭义相对论所依据的原理以及运动学效应的专著。著者避开高深的数学知识, 用简明的方式引入时空几何图。全书采用一题一图的形式, 按照大学物理教材中狭义相对论的章节安排, 用时空几何图论述和解释了相对性原理、光速不变原理和洛伦兹变换, 并且用时空图解释了狭义相对论所涉及的所有运动学效应以及课本上常见的例题。

本书可以作为狭义相对论教学的参考读物, 也可以作为物理爱好者的科普读物。

前 言

这是一本用几何工具论述狭义相对论原理及运动学效应的读物。

爱因斯坦的相对论要求我们接受这样一种观念,就是时空具有自己的几何学,即与我们通常熟悉的欧几里得体系不同的几何学。具备这种几何学体系的时空被称作闵科夫斯基时空。

迄今,大学教材中涉及到狭义相对论的数理逻辑都是用代数解析的方法来论述的,所有的数理逻辑源于相对性原理、光速不变原理以及一组变换公式,即所谓的洛伦兹变换。虽然新版教材已经有在狭义相对论的相关章节引入闵氏时空几何图,但都十分简略,而且是定性地讨论相关的理论问题。

既然闵氏时空几何就是洛伦兹变换的几何解释,而洛伦兹变换是有高中数学基础就可以读懂的公式,那闵氏时空几何就应该可以用简明的方式引入到狭义相对论的理论框架下来,从而解释相关的理论问题。本书就是这样一种尝试,尽管本书引入几何工具并没有基于严密的理论作基础,但是得到的结果却是准确的,即给出的时空图严格符合洛伦兹变换的结果。

为了能够给出简明准确的时空图,书中采用光速 $c=1$ 单位制下的洛伦兹变换,以及用光信号来确定两个相对运动参考系坐标之间的标度问题。其中 $c=1$ 下的洛伦兹变换取材于费恩曼先生的《费恩曼物理学讲义》。用光信号确定两个相互运动的参考系坐标标度之间的关系取材于约翰·C·泰勒的《自然规律中孕育的统一性》。

时空坐标有了标度,就不但可以定性地而且可以定量地讨论狭义相对论所涉及的相关问题。时空图的好处是直观、准确,用以解释狭义相对论下的各种运动学效应,既不容易引起歧义,也便于理解。

全书采用一题一图的方式,按照大学教材的章节,用时空几何图来解释所有狭义相对论的原理和运动学效应。既然是一种尝试,对于书中的错误和不准确之处诚挚地欢迎批评。批评意见请寄: huangxm2000@sina.com

本书的写作得到古宣老师的热情鼓励,在此表示诚挚地感谢。

黄献民 2007 年 10 月



目 录

第1章 时空图的基本概念和结构	6
1.1 时空图、事件与世界线	6
1.2 时间轴与空间原点	8
1.3 时空图上空间和时间坐标的量纲和 单位($c=1$)	10
1.4 光速与光锥	12
1.5 匀速运动质点的世界线与参考系的 时间轴	14
1.6 相互运动的两个参考系的空间轴	16
1.7 事件在时空图上的坐标	18
1.8 时空图上的两个时空坐标轴之间的 关系	20
1.9 确定时空图上的时间坐标尺度	22
1.10 一个完整的时空图	24
1.11 两个相对匀速运动参考系时空图的 另一种表达	26
1.12 固有时、事件的时间坐标及等时线	28
1.13 固有长度、静止线及空间坐标	30
第2章 时空的相对性	32
2.1 速度的相对性	32
2.2 时间膨胀与空间收缩	34
2.3 同时的相对性	36
2.4 时间变缓	38
2.5 动尺变短(一)	40
2.6 动尺变短(二)	42
2.7 空间收缩的含义	44
2.8 两个相互运动的观察者之间的距离	46
2.9 对称形式的时空图	48
第3章 光速不变原理	50
3.1 时空图上的光速不变	50
3.2 教材中一种关于光速不变原理的图示	52
3.3 时空图上的波前阵面(一)	54
3.4 时空图上的波前阵面(二)	56
3.5 时空图上的波前阵面(三)	58
3.6 用一个事件来描述光的波前阵面	60
3.7 波前阵面的关系的相对性	62
3.8 空间原点发出的周期光脉冲的光	64
第4章 时空图上的洛伦兹变换	66



4.1	光速 $c=1$ 时的洛仑兹变换	66	6.4	介子寿命问题	104
4.2	时间轴上事件的洛仑兹变换(一)	68	第7章	双生子效应问题	106
4.3	时间轴上事件的洛仑兹变换(二)	70	7.1	双生子效应问题	106
4.4	空间轴上事件的洛仑兹变换(一)	72	7.2	地球、飞船、星球之间的旅程和相应的 时间关系	108
4.5	空间轴上事件的洛仑兹变换(二)	74	7.3	洛仑兹收缩,谁收缩了?	110
4.6	时空任意事件的洛仑兹变换 ——由 S 到 S' 的变换	76	7.4	飞船起飞时星球上的时钟	112
4.7	时空任意事件的洛仑兹变换 ——由 S' 到 S 的变换	78	7.5	飞船到达星球时的时空关系	114
4.8	时空图上洛仑兹变换的实例	80	7.6	飞船调头返回的旅程和相应的时间 关系	116
4.9	时空图上的速度合成	82	7.7	飞船调头后飞回地球所在的参考系	118
第5章	对钟问题	84	7.8	飞船调头返回时的时空关系	120
5.1	两组时钟	84	7.9	飞船飞离后相互拍发贺年电报	122
5.2	空间收缩结果下对钟 —— S 系同时对钟	86	7.10	飞船返回地球过程中相互拍发贺年 电报	124
5.3	在 S' 系考察对钟事件	88	第8章	时空间隔	126
5.4	计算对钟事件发生时的各时钟时刻	90	8.1	时空间隔的概念	126
5.5	换个参考系看对钟	92	8.2	任意事件与时空原点事件之间的时空 间隔	128
5.6	原时与时间膨胀	94	8.3	事件处的光锥与该事件的时空区间	130
5.7	对钟结果的相对性	96	8.4	双曲线校准质点的时间和空间	132
第6章	时空图上的几个实例	98	8.5	类空间隔和事件的时序	134
6.1	路基参考系和列车参考系	98	参考文献		136
6.2	爱因斯坦的列车与雷击闪电问题	100			
6.3	列车、隧道与雷击	102			

第1章 时空图的基本概念和结构

1.1 时空图、事件与世界线

时空图是用空间坐标和时间坐标描述质点运动状态的几何坐标图，时空图能够清晰地描述质点的空间位置随时间的变化情况。

在纸面上只能准确地画出二维的时空坐标图（一维时间 t ，一维空间 x ），好在讨论具体理论问题时，这种二维的坐标图可以比较圆满地解释相应的理论问题。对于四维的情况（一维时间，三维空间），在理解了二维时空图的原理后，可以用其它数学工具进一步地讨论。本书中多是用这种二维时空图来讨论问题，即空间坐标 x 和时间坐标 t 组成的时空图。

在时空几何坐标上，将几何上的原点（ $x=0$ ， $t=0$ ）称为时空原点，即在时空原点上空间坐标 $x=0$ ，时间坐标 $t=0$ 。在本书中时空原点用数字0来标识。

时空图上，任意一个几何意义上的点，对应着一个特定的空间位置（空间坐标）和一个时刻（时间坐标）。即这样的“点”不再仅仅表示空间位置，而与空间位置相联系着还有一个与之相伴的时间值，因此将时空图上几何意义的点称为事件。也可以说时空图是时空全体事件的集合。时空图上任意点是一个事件，它由一组空间坐标和时间坐标共同描述。

在时空图上随时间变化的质点的运动轨迹一般是一条曲线，这个轨迹实际上是质点随时间在空间位置上变化的“历史”或者“经历”。例如一个加速运动质点的“历史”是一条曲线，一个匀速运动质点的“历史”是一条直线，静止在某一时空参考系的质点的“历史”是平行于时间轴的直线。

将这些在时空图上质点位置随时间变化的轨迹称为这个质点的世界线。世界线上的任意一点，表示一个特定的事件，每个事件都对应一组空间和时间坐标，可以说质点的世界线是由一系列按时间顺序的事件组成的。特别地，时间轴 t 是静止在 $x=0$ 上的质点的世界线。

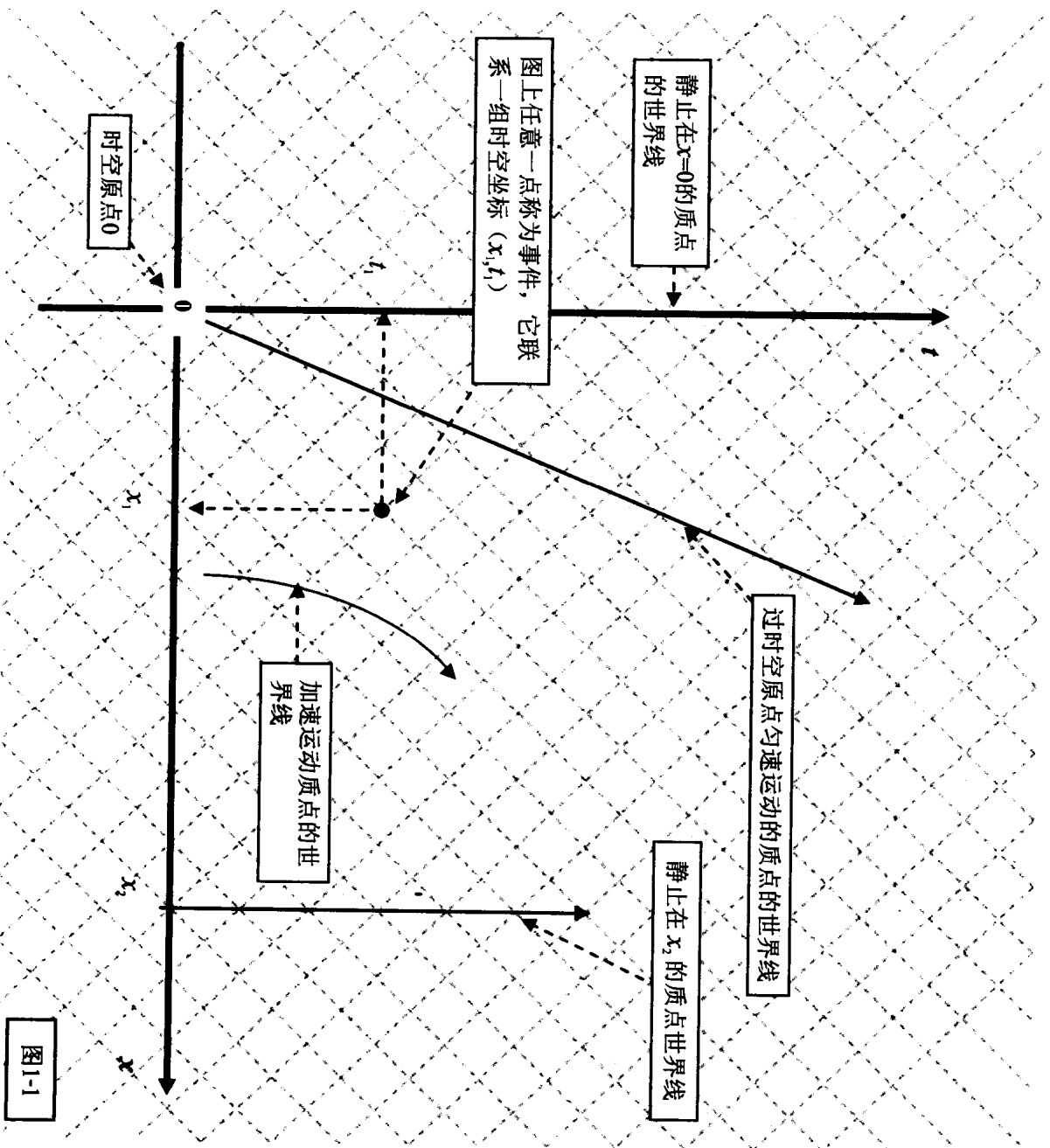


图1-1

1.2 时间轴与空间原点

1.1 节特别强调，在时空图上时间轴 t 是静止在 $x = 0$ 上的质点的世界线。如果去掉时间轴 t ，仅就空间坐标来说 $x = 0$ （对于三维空间是 $x = y = z = 0$ ）的点是空间坐标的原点。所以可以说在时空图上时间轴是静止在空间原点的质点世界线，即在时间轴上所有的点（事件）的空间坐标为 0，即 $x = 0$ 。

对于空间轴 x ， $x = 0$ 的点是空间的原点，用大写字母 O 来表示。如果定义好空间轴 x 和空间原点 O ，再加上一个时间轴 t ，就由纯空间坐标系变为时空坐标系。上一节已经将时空图上的几何原点定义为时空原点，用数字 0 来标识。那么原来的空间原点 O 在时空图上就成为一条 $x = 0$ 的直线，显然，这条直线就是时空图的时间轴 t 。

于是在时空图上，时间轴 t 有着多种含义，它是时空图上的时间轴 t ，它是空间原点 $O(x = 0)$ 的世界线，它也可以是静止在空间原点 O 的质点的世界线，它还可以是静止在空间原点 O 的观察者的世界线等。

在时空图上，必须严格区分时空原点 0 和空间原点 O 。时空原点是一个事件，其时空坐标为 $x = 0, t = 0$ 。而空间原点 O 在时空图上是一条世界线，这个世界线的方程是 $x = 0$ ，即时间轴是空间原点 O 的世界线。

在时空图上，将标识时空原点的数字 0 标在 $x = 0, t = 0$ 的事件上，即几何原点上，而将标识空间原点的字母 O 标在靠近时空原点 0 的时间轴 t 上。

空间轴 x 和时间轴 t 共同组成一个时空参考系，用大写字母 S 来标识。

讨论时空问题时，都要站在一观察者的立场来描述物理现象，我们说 S 的立场是指静止在参考系 S 的观察者的立场，也可以说是空间原点 O 的立场，因为空间原点 O 在 S 是静止的，即我们说 S 的立场或者说 O 的立场，这两者是同一个概念。在本书中为讨论问题方便，有时说是在 S 的立场，有时说是在 O 的立场，或者说静止在空间原点 O 的观察者的立场等，都是同一个立场，都是参考系 S 的立场。当然，在 S 中静止的观察者无论处于空间什么位置，与 O 的立场是同一个立场。

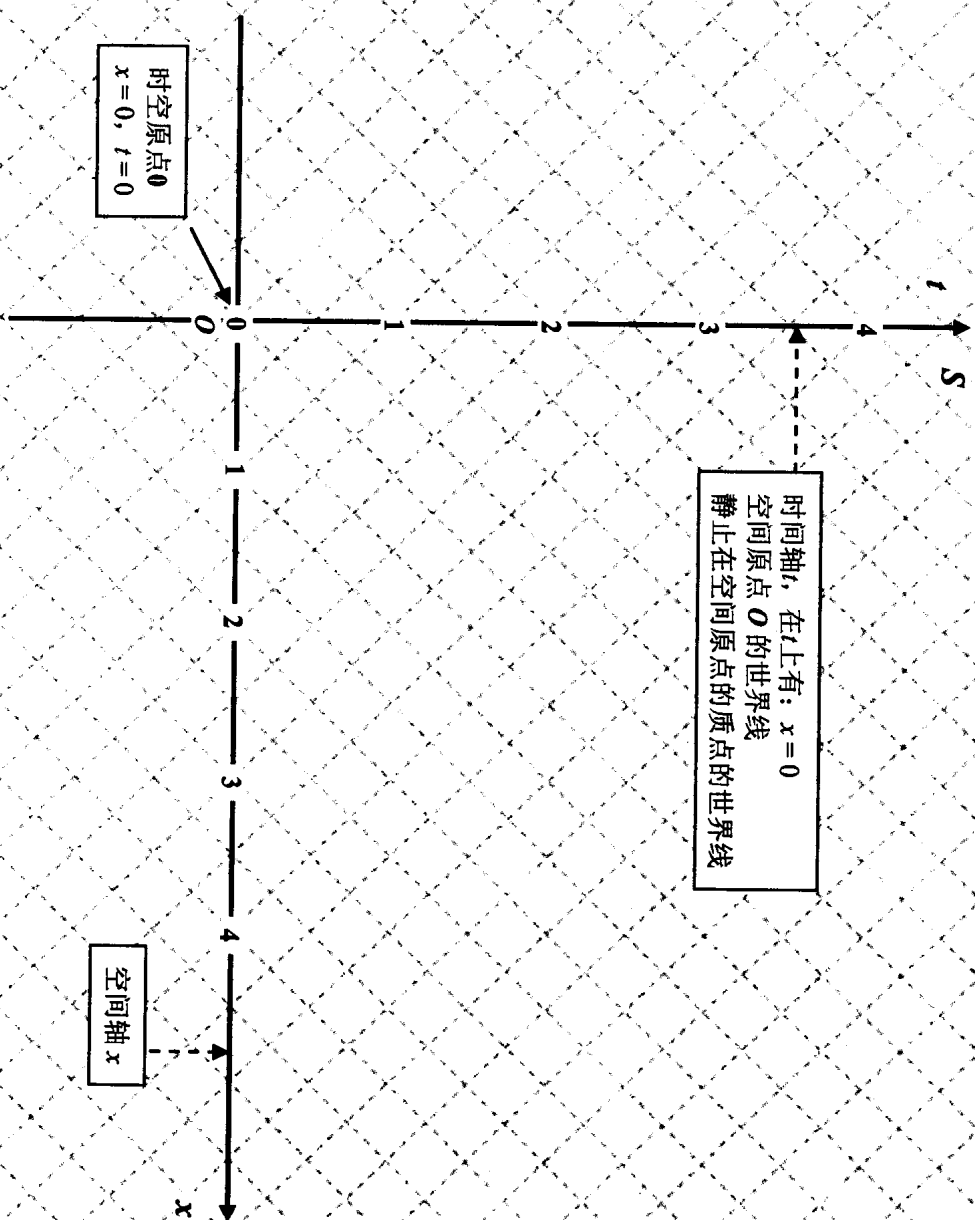


图1-2

1.3 时空图上空间和时间坐标的量纲和单位 ($c=1$)

在狭义相对论的理论框架下, 时空图上采用光速 $c=1$ 的约定。

光在真空中的速度为 30 万 km/s, 30 万 km 是 1s 的光程, 若将光速 c 写为 1 光秒除上 1 秒, 则光速即为 1, 即 $c=1$ 。 $c=1$ 的含义是若时间单位是 s, 距离单位就是光秒; 时间单位是 min, 则距离单位就是光分 (30 万 km $\times$ 60s); 若时间单位是年, 则距离单位是光年, 等等。

狭义相对论下的时空图, 时间和空间坐标采用相同的量纲, 即都采用长度的量纲。时间乘上速度是长度的量纲, 相对论时空图的时间轴不用 t 来表示, 而是用 ct 来表示, 显然 ct 的量纲是长度的量纲。

由于 $c=1$ 的约定, 讨论问题时一般仍只用 t 来代替 ct 。例如说 $t=1s$, $t=2s$ 等, 而不说 $ct=1$ 光秒, $ct=2$ 光秒等。

与时间轴 ct 的量纲和单位相对应, 空间轴 x 的量纲和单位就是与 ct 相对应的时间光程。例如, 若 t 的单位 1 是 1s, 则空间轴 x 的单位 1 就是 1 光秒, 若 t 的单位 1 是年, 空间轴 x 的单位 1 就是 1 光年。这显然是 $c=1$ 这种约定的结果。

进一步, 讨论具体问题, 可以直接赋给 t 和 x 以数值, 而不给单位。因为我们关心的是时空关系的理论问题, 并非讨论工程问题, 对于 $t=1$, $x=1$ 究竟是秒还是分, 究竟是 30 万 km 还是 1800 万 km 等, 通常并无注意的必要。需要时, 代入实际的数值进行计算就是了。

在这种坐标的单位刻度的定义下, 一个瞬间光脉冲的世界线在时空图上就成为斜率为 1 的直线, 也就是与时间轴和空间轴的夹角均为 45° 的直线, 即 $c=1$ 。

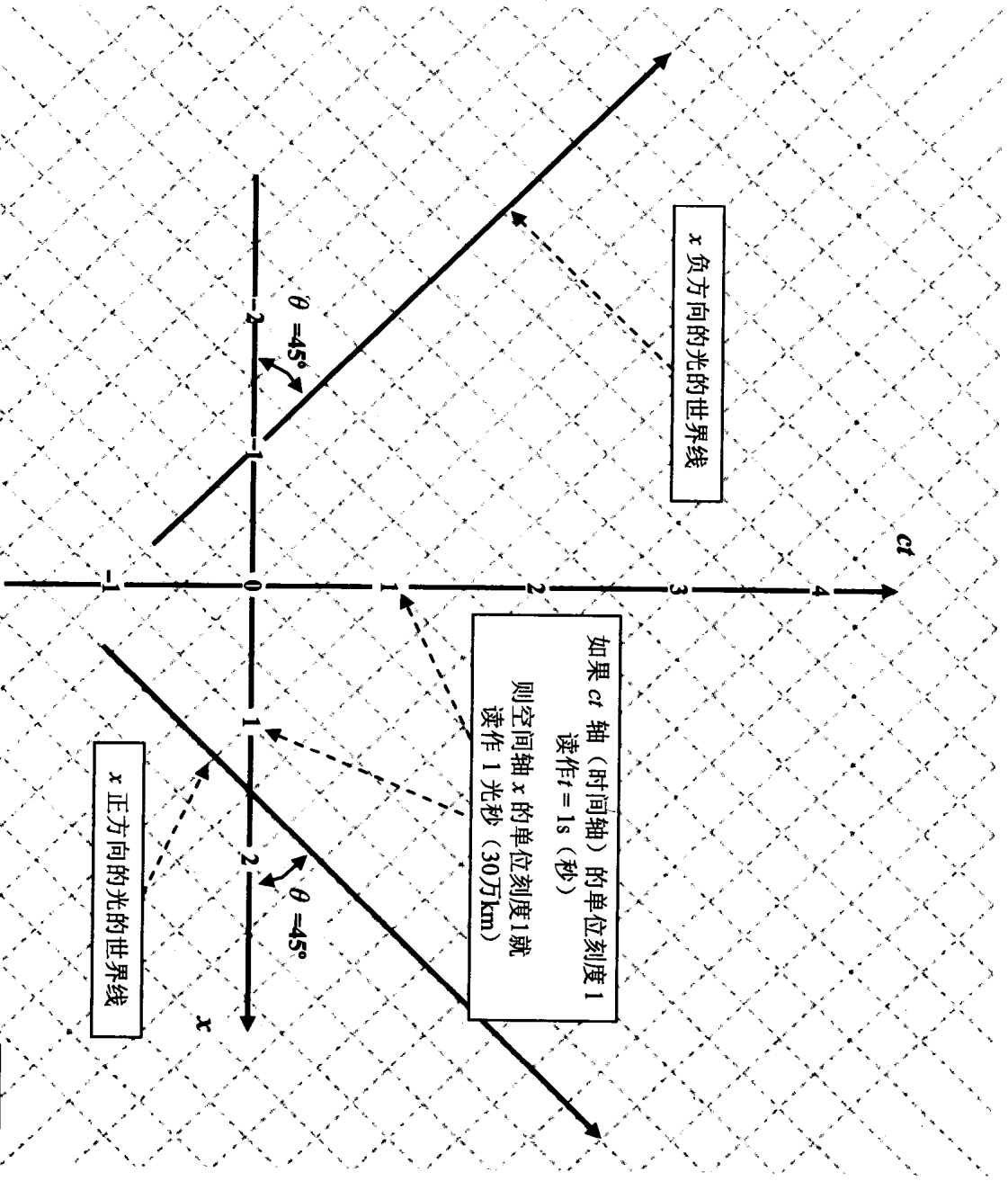


图 1-3

1.4 光速与光锥

这一节讨论由空间原点($x=0$)处光源在 $t=0$ 时刻向空间发出的一瞬间的光,即由时空原点($x=0, t=0$)发出瞬间光脉冲。

时空原点 0 发出的瞬间光脉冲,其光的波前阵面在四维时空(一维时间,三维空间)是用以下方程描述的:

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

这个光的波前方程是一个由时空原点 0 开始,半径 ct 随时间 t 不断增大的一个球的球面。如果在三维时空坐标(一维时间,二维空间)中描述,则上面的方程简化为:

$$(ct)^2 = x^2 + y^2$$

这样光的波前方程是一个由时空原点 0 开始,半径 ct 随时间 t 不断增大的一个圆的周长。如在二维时空坐标(一维时间,一维空间)中描述,则上面的方程就更简化为:

$$(ct)^2 = x^2, \text{ 即: } x = \pm ct$$

这样,光的波前方程就变成两条线上的两个点。

前一节已经说过,在时空图上,二维坐标一个是 x , 一个是 ct 。那么在二维时空图上, $x = \pm ct$ 就应该是与 x 轴(或 t 轴)的夹角 $\theta=45^\circ$ 的两条直线。这就是上一节定义时间、空间坐标单位的结果,即 $c=1$ 。二维时空上的过时空原点的直线 $x=ct$ 的方向是 x 正方向光的世界线,过时空原点的直线 $x=-ct$ 是 x 的负方向光的世界线。

三维时空图上,一个随时间半径不断增加的圆的圆周,其“历史”看上去是一个随时间增大的光锥。我们把四维时空中不断增大的那个光的波前球面以及在二维时空上的光的那两条线都称为光锥。光锥是时空图上的重要概念。任何一个事件(时空图上的点),都可以有与此事件相联系的一个光锥,这个光锥就是在这个事件的时空位置发出的光的世界线。

图 1-4 给出了时空原点处的光锥在三维下的示意,以及在二维下的光锥(光的世界线)。

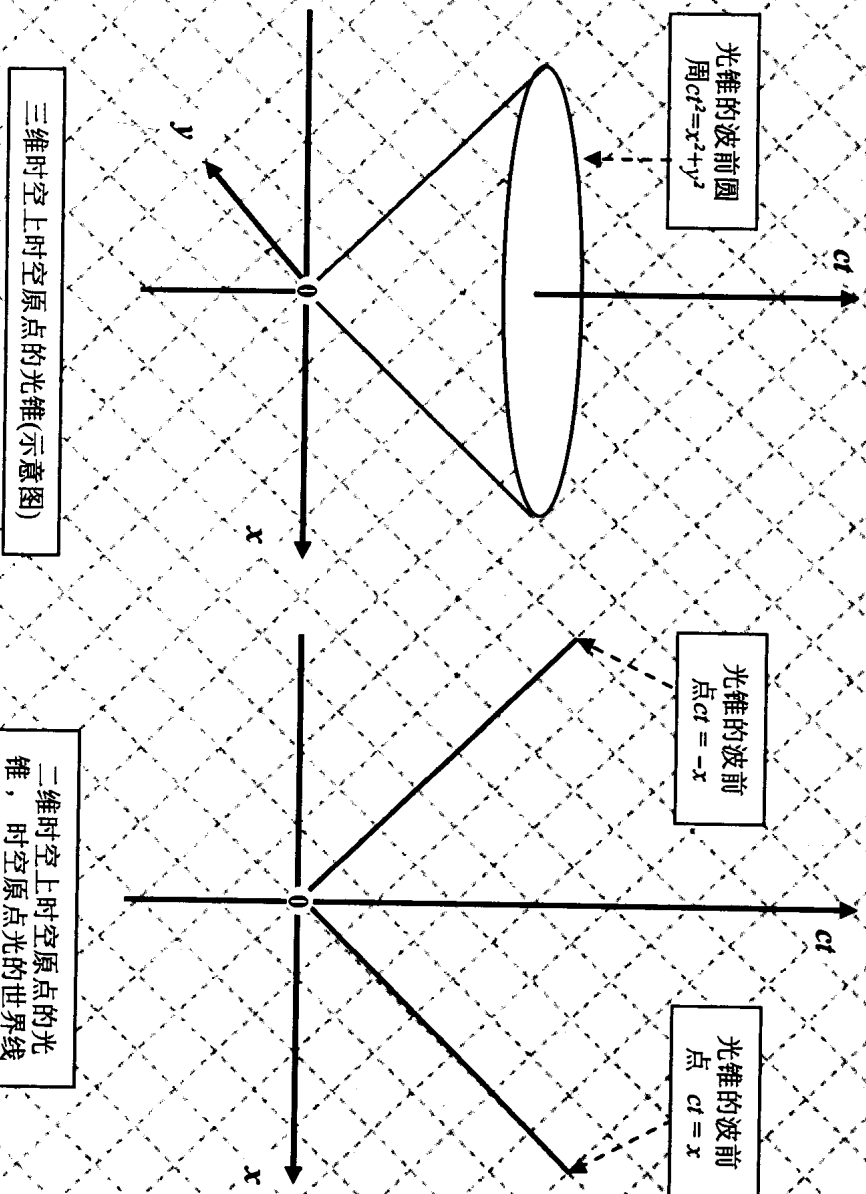


图 1-4

1.5 匀速运动质点的世界线与参考系的时间轴

我们强调过，一个静止在空间原点 O 的质点的世界线就是该质点的时间轴 ct 。 ct 轴与其相垂直的（正交的）空间坐标 x 轴组成一个时空坐标系，用 S （空间轴 x ，时间轴 ct ）来表示，简称 S 系。这个静止在原点的质点不妨就称为 O 。

静止与运动是相对的，一个相对运动的质点的世界线也应该是这个质点的时间轴。在相对论的理论框架下，任何质点在时空上的世界线都可以看作是这个质点的时间轴。这就是所谓任何质点都携带着自己的“时钟”，这是一个很重要的概念。

有了坐标系 S ，在 $t=0$ 时，由时空原点 O 向 x 正方向以速度 v 匀速运动的质点的世界线，是过时空原点且与 ct 轴的夹角为 θ 的直线。这个质点不妨就称为 O' 。我们也知道，这条世界线就是相对 S 以速度 v 匀速运动的质点的时间轴，记为 ct' 。 ct' 应该有与之对应的空间轴 x' 组成另一个坐标系 S' （空间轴 x' ，时间轴 ct' ），简称 S' 系。相对论时空图上， S' 系的空间轴 x' 应该处在什么位置呢？本节先不给出 S' 系空间坐标 x' ，留在下一节讨论。也可以这样来定义 S 系和 S' 系， S' 与 S 在时空原点 O （ $x=x'=0$ ， $t=t'=0$ ）重合， S' 系相对 S 以速度 v 向 S 的正方向匀速运动，或者说 S 系相对 S' 系以速度 v 向 x' 的负方向匀速运动。

S' 系时间轴 ct' 与 S 系时间轴 ct 的夹角 θ 在 S 系应该满足：对于 ct' 上的任意的点（事件）在 S 系的坐标 x 和 t 应该满足关系 $\tan \theta = x/ct$ 。由于 $c=1$ ，所以 $\tan \theta = x/t$ 。

在 S 系中， S' 的 ct' 轴是过时空原点向 x 正方向以速度 v 运动的质点的世界线，所以 ct' 上的任一点满足 $x/t = v$ 。于是 $\tan \theta = x/ct$ ，也可以写成 $\tan \theta = v/c$ ，在 $c=1$ 的约定下，有 $\tan \theta = v$ 。这样 v 是以光速为基准的相对速度值。

上式表明， S' 系时间轴与 S 系时间轴的夹角，与 S' 相对 S 的运动速度 v 与光速 c 的比值相关。这个比值越大，则 S' 相对 S 的速度 v 越大， θ 角越大，若 v/c 接近 1，则表明 S' 相对 S 的速度越接近光速。极限情况， $v/c=1$ ， $\theta=45^\circ$ ， S' 的 ct' 轴与光锥重合。在 $c=1$ 下，质点的运动速度 $v < 1$ 。

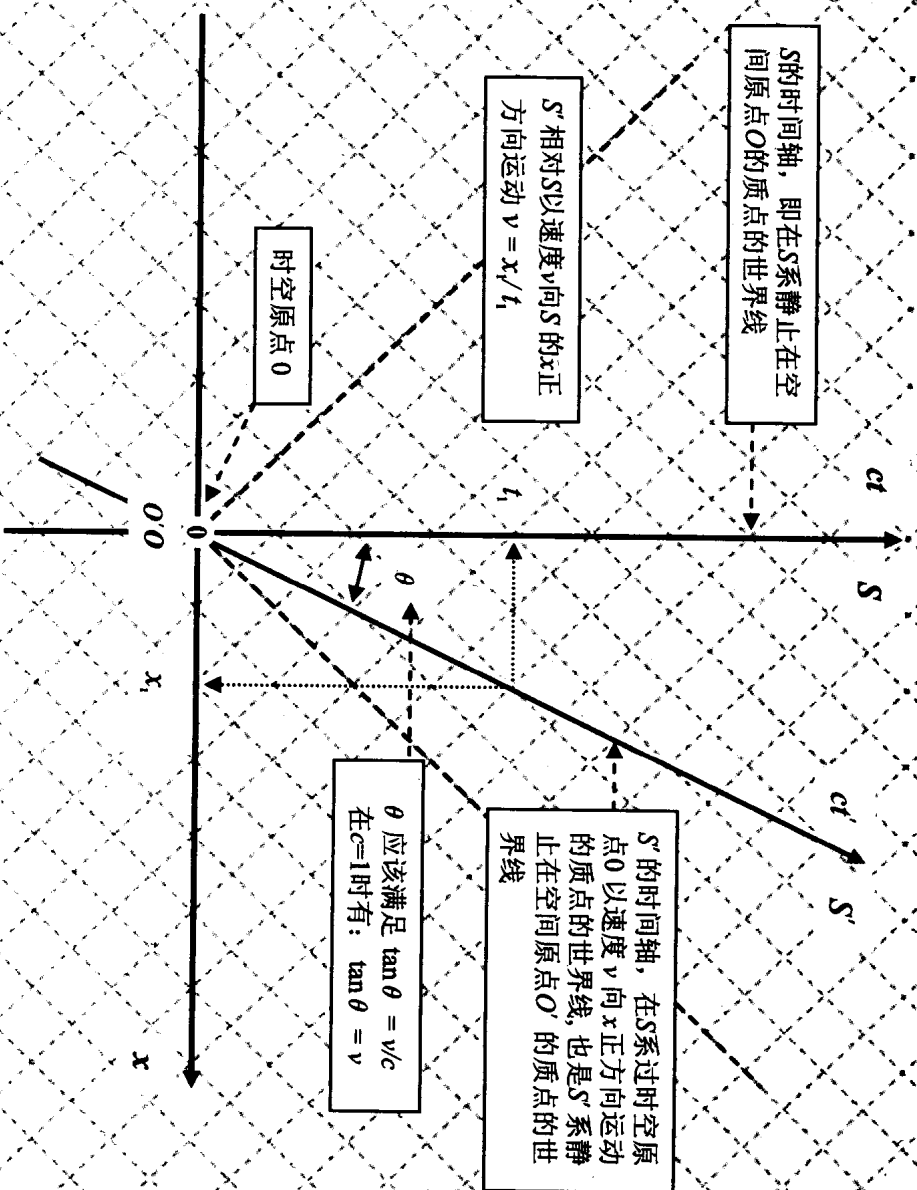


图 1-5

1.6 相互运动的两个参考系的空间轴

1.5 节在时空图上已经确定了相对 S 系运动的参考系 S' 的时间轴 ct' 。 S' 的空间轴应该如何确定？ S' 的空间轴 x' 是否可以用和 S 的 x 轴重合的坐标来表示呢？显然是不行的，因为这样不能保证一条光的世界线在两个参考系有相同的速度，即不能满足光速不变原理。

前面已经讨论过，时空原点 O 发出的光的世界线（光锥）是与 x 轴、 ct 轴均成 45° 的直线，即这个光的世界线（光锥）是处在 ct 轴与 x 轴的角平分线上。要保持这条光的世界线在 S' 系中也能与在 S 系得到一样的速度，即光速不变，唯一可行的办法是选定的 S' 系的空间轴 x' 轴也能使光的世界线同样处在 S' 系 ct' 轴与 x' 轴的角平分线上。在时空图上 S' 系的空间坐标 x' 正是这样确定的。

如前所述， ct' 轴与 ct 轴的夹角应该满足 $\tan\theta = v/c$ ，为使得从时空原点 O 发出的光的世界线也在 S' 系时空坐标 t' 与 x' 的角平分线上，显然 S' 系空间坐标轴 x' 与 S 空间轴 x 之间的夹角也应该等于 θ 。图上 S' 系的空间轴 x' 正是按照这个原则给出的。

至此，我们已经在时空图上画出了坐标系 $S(x, t)$ 和坐标系 $S'(x', t')$ 。这两个坐标系之间的相对运动速度是 v ，两个坐标系在时空原点是重合的，即在时空原点 O ， $x = x' = 0$ ， $t = t' = 0$ 。

对于 S 系，是静止在 S 空间原点 O 的观察者所在的参考系， ct 是 O 的世界线， O 在 S 是静止的。 S' 系或 S' 的 O' 相对 S 或者 O 是匀速运动的，其速度在时空图上应该满足 $\tan\theta = v/c$ ，即在 $c=1$ 下有 $\tan\theta = v$ 。

当然，对于 S' 系，是静止在 S' 空间原点 O' 的观察者所在的参考系， ct' 是 O' 的世界线， O' 在 S' 是静止的。 S 系或 S 的 O 相对 S' 或 O' 是匀速运动的，其速度也应该满足 $\tan\theta = v$ 。对于这个关系，在后面的章节会给出说明。