

学好高中数学的最佳必备工具书

高一学考必用 · 高二学考实用 · 高三学考急用 · 高中教学备用



—— 高中数学 ——

学考必备用书

丛书主编：周贞雄 本册主编：周良树 杨素

全国四十六所重点中学联合编写

- ◆ 高中数学教材知识的资料包
- ◆ 课堂内外现查现用的工具书
- ◆ 学习考试高效适用的信息链
- ◆ 学法技法用法考法的金钥匙

湖南大学出版社

高中数学 学考必备用书

全国四十六所重点中学联合编写

丛书主编：周贞雄

本册主编：周良树 杨 素

副主编：毛 燕 蒋志敏 谭 勇 刘文彬

编 者：周良树 杨 素 毛 燕 许光程 蒋志敏

谭 勇 刘文彬 高国家 李 立 段成玮

陈露清 陈 静 邓克成 管件件 谢东阳

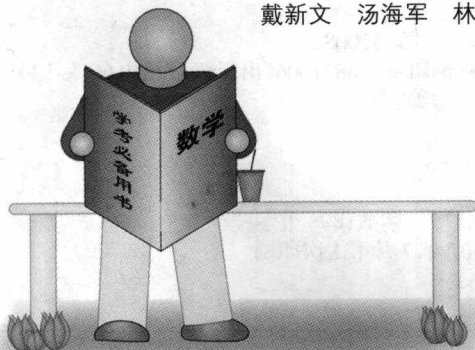
冯 智 黄新杰 吕立群 朱家强 刘朝风

李玉芝 龚维补 沈 亮 李明晓 杨智华

龙百万 华接春 赵耀华 徐庆培 廖芳英

邓雅伶 余 婧 彭 宇 刘思铭 盛耀强

戴新文 汤海军 林珏杏 韦金里



湖南大学出版社

内容简介

本书是一本集数学基础知识、高考常考点、学习方法策略以及备考应试技巧等于一体的多功能学考必备用书,是众多著名特、高级数学教师和教育界资深专家集体智慧的结晶。全书包括“高考数学能力要求”“高考数学应试策略”“专题过关”“数学思想方法”四大部分,其中重点是“专题过关”这一部分,它不仅全面系统地总结了高中数学所要掌握的各个板块的数学知识,而且还对每个知识块的运用以及相关考题的解题方法和技巧进行了详细讲解和点评。总之,本书为大家奉献的不仅仅是系统的基础知识归纳和详细的重难点知识讲解,同时还有复习备考的策略、答题解题的技巧以及获得高分的绝招等,是一本不可多得的全面指导同学们学习和考试的必备参考书。

本书适合高中各年级学生、高中数学教师及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

高中数学学考必备用书 / 周良树, 杨素主编.

—长沙: 湖南大学出版社, 2007.5

(高中学考必备用书)

ISBN 978-7-81113-187-1

I. 高... II. ①周... ②杨... III. 数学课—高中—教学参考资料

IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 069009 号

高中数学学考必备用书

Gaozhong Shuxue Xuekao Bibei Yongshu

作者: 周良树 杨素 主编

责任编辑: 丁莎

特约编辑: 宋郁森

封面设计: 李雯 张毅

出版发行: 湖南大学出版社

社址: 湖南·长沙·岳麓山

邮编: 410082

电话: 0731-8821691(发行部), 8820008(编辑室), 8821006(出版部), 8619166(经销)

传真: 0731-8649312(发行部), 8822264(总编室)

电子邮箱: dingsha008@126.com

网址: <http://press.hnu.cn>

印装: 长沙鸿发印务实业有限公司

开本: 720×960 16开 印张: 33.375 字数: 898千字

版次: 2007年7月第1版 印次: 2007年7月第1次印刷

书号: ISBN 978-7-81113-187-1/G·296

定价: 32.80元

版权所有, 盗版必究

湖南大学版图书, 凡有印装差错, 请与发行部联系

前言

语文到底该怎么学?数学到底该怎么学?英语、物理、化学、历史、地理……呢?是呀,这可真真是个难题。

没关系,难题也是可以攻克的!怎么攻克?方法尽在这套《学考必备》丛书中。相信有了这套丛书,你再也不用对似乎高不可攀的各科知识心生怯意了,再也不用被一个又一个学习上的难题缠得苦不堪言了,再也不用对着茫茫无边的学海望洋兴叹了!为什么?因为你一直期待的一套能够全面指导学法、用法、考法的高品质辅导书就在眼前。它能够带你展翅翱翔、乘风破浪、快乐地应对学习和考试,它能够成为你学习路途上的航标和开心果,有了它,你就可以全心地感受学习的快乐,体会技巧的魅力,迈向成功的巅峰!

本丛书以新课标为向导,以新大纲为依据,以全面提高同学们的综合素质为目标,全方位满足同学们的学习需求、应用需求、备考需求以及娱乐需求等。它包括高中语文、数学、英语、物理、化学、历史、地理、生物共8本,是一套地地道道的集学科基础知识、高考常考考点、学习方法策略、备考应试技巧、课外娱乐休闲等于一体的多功能实用大全,是全国一百多位经验丰富的一线教师和知名专家学者多年教研经验的结晶。

具体说来,本套丛书具有以下四个主要特点:

A. 知识大全——人生行囊的备用库

“空袋子难以直立。”富兰克林这句名言告诉我们,如果我们背着空空的人生行囊前行,就难以抵达成功的终点。因此,采撷智慧之果,以丰富多样的各科知识充实我们的行程就显得非常重要。但是,高中阶段课程多、时间紧,同学们如何才能在有限的时间内将庞杂的知识去粗取精、化繁为简,从而轻松地抓住重点、准确地捕获考点,最终采撷到最耀眼的明珠呢?不要急,因为这正是我们在书中着重解决的问题。本丛书对高中阶段各个学科应掌握的知识进行了系统梳理和归纳,内容丰富明晰,可以帮助同学们纲举目张,全盘把握,让你们以最快的速度、最佳的方式将最多的知识收入你们的人生行囊。

B. 技法大全——“拳击手”的制胜绝招

拳击场上拼的不仅仅是体力,更主要的是技法。为什么要那么重视技法呢?因为掌握了好的方法和技巧,就相当于占据了取胜的制高点。为此,本丛书试图从各个不同侧面为同学们系统地总结各类切实可行且行之有效的“独门绝技”,其中包括学习与复习的方法、备考与解题的技巧、避开陷阱以及获得高分的诀窍等。所有这些方法和技巧,都将会帮助同学们在学习时更轻松有效,事半功倍;思考时更严谨缜密,环环相扣;答题时更深入透彻,快捷准确……好技

法就是好成绩,就是好素质。我们诚望每一位同学都能掌握绝招,成为一名从容应对考试的“拳击手”。

C. 考点大全——知己知彼的向导

制胜的另一关键是知己知彼。“己”是指自我知识的储备要达到的程度,“彼”则是指各类可能考查的知识热点和高频考点以及各类可能再现的命题冷点和复习中可能忽略的备考盲点。我们认为,考点是有规律的——为什么有的考点每年都考,而有的考点则要隔年再考?为什么有的考点所有省份都考,而有的考点只有部分省份考?为什么甲省去年的考点会出现在乙省今年的考卷上?纯属巧合,还是自有规律?所有这些都是从本书要为同学们精心解读的。我们在书中告诉大家的不仅仅是“堆”考点,同时更有一条贯穿各个考点的“考线”,把握了这条“线”,你就会明白哪些过去的“旧”题会登上本省(市)明年的考卷。能做到知己知彼,大家当然能无往而不胜!

D. 趣味大全——精彩幽默的快乐堡

兴趣是学习最贴心的朋友。学习不能靠死记硬背,死气沉沉的学习气氛不会有助于我们的学习。为了提高同学们的学习兴趣,帮助大家消化所学的知识,本丛书在有的学科中安排了一些与本学科相关的趣味百科知识。比如语文,其中好些古文、特殊词汇等常常让你头痛不已,但是大家看了“趣味语文与语文百科”这一部分后,会从它幽默的叙述中体会到,原来语文也可以学得这么有趣,原来这些知识也可以这样轻松地被记住!“你吃不到今年的新麦子了”是什么意思?汉语的起源是什么?网络语言好玩吗?……很多关于百科知识、娱乐休闲知识、文化背景知识和文化习俗知识以及时尚知识都能在让你捧腹大笑的同时,给你答案,让你在自然、快乐的学习中记住它们。

我们编辑本丛书的目的是期盼它能真正有益于大家,成为同学们穿越知识大门通向成功宝库的金钥匙。书中若有不妥或错误之处,我们真诚地希望广大读者朋友不吝批评和指正。

编者

第一部分 高考数学能力要求

第一章 思维能力

- 一 演绎推理 1
- 二 合情推理 3
- 三 直觉思维 4
- 四 数学语言 5

第二章 运算能力

- 一 运算的熟练性 6
- 二 运算的合理性 7
- 三 运算的简捷性 8

第三章 空间想象能力

..... 10

第四章 实践能力

..... 14

第五章 创新意识

..... 17

第二部分 高考数学应试策略

第一章 高考数学复习策略

- 一 第一轮复习策略 19
- 二 第二、三轮复习策略 22
- 三 高考冲刺前复习策略 24



目录

第二章 高考数学应试诀窍

- 一 考前应注意的几个问题 24
- 二 考试中应注意的几个问题 25
- 三 掌握窍门,增加得分 25

第三部分 专题过关

第一章 集合与简易逻辑

- 第一节 集合 28
 - 一 元素与集合的关系的求解方法 28
 - 二 集合有关概念和运算的求解方法 29
 - 三 与不等式有关的集合运算问题的求解方法 31
 - 四 与等式、方程有关的集合问题的求解方法 32
 - 五 与几何有关的集合问题的求解方法 33
 - 六 怎样求集合子集的个数 34
 - 七 高考命题切入点 35
- 第二节 简易逻辑 35
 - 一 怎样判断命题的形式 36

二 怎样判断复合命题的真假	36
三 怎样理解四种命题之间的关系	37
四 反证法的应用	37
五 怎样判断和证明有关充要条件 问题	38
六 高考命题切入点	40

第二章 函 数

第一节 映射与函数	40
一 映射问题的求解策略	41
二 函数的概念及函数值的求解技巧	41
三 函数的定义域的求解技巧	42
四 求函数解析式的方法	43
五 函数值域的求解技巧	44
六 高考命题切入点	48
第二节 函数的性质	48
一 判断函数奇偶性的方法	49
二 函数奇偶性问题的求解策略	50
三 求函数单调区间的方法	51
四 函数单调性问题的求解策略	52
五 高考命题切入点	55
第三节 反函数	56
一 求已知函数的反函数值得注意的 问题	56
二 判断反函数是否存在的方法	58
三 怎样巧用反函数的性质解题	59
四 高考命题切入点	62
第四节 指数函数与对数函数	62
一 指数式与对数式的运算技巧	62
二 指数函数与对数函数问题的求解 策略	63
三 指数方程的解法	65

四 对数方程的解法	66
五 指数、对数综合问题的求解技巧	67
六 高考命题切入点	68
第五节 二次函数、二次方程、二次 不等式	69
一 二次函数解析式的求解策略	69
二 二次函数最值问题的求解方法	70
三 二次不等恒成立问题的求解 技巧	72
四 二次函数与方程问题的求解 技巧	73
五 二次函数与不等式问题的求解 技巧	75
六 高考命题切入点	76
第六节 图形问题	77
一 函数图像问题的解法	77
二 图表问题的解法	84
三 高考命题切入点	86
第七节 分段函数	86
一 分段函数的定义域、值域的 求法	86
二 分段函数的奇偶性和单调性	86
三 分段函数的图像及应用	87
四 抽象函数问题的处理策略	87
五 高考命题切入点	88
第八节 函数应用问题	89
一 文字应用题的解题技巧	89
二 表格应用题的解题技巧	91
三 高考命题切入点	93

第三章 数 列

一 数列的有关概念问题的求解技巧	94
二 等差数列的有关问题的求解技巧	94
三 等比数列的有关问题的求解技巧	95
四 等差数列、等比数列的综合问题	96
五 递推数列的求解策略	97
六 由数列的前 n 项的和求其通项或研究其性质	99
七 数列求和的常用方法和技巧	101
八 数列综合问题的求解策略	103
九 数列应用问题的求解策略	105
十 高考命题切入点	107

第四章 三角函数

第一节 三角函数的性质	109
一 求最小正周期的常用方法	109
二 含绝对值的三角函数周期的求法	111
三 最小正周期的逆向应用	112
四 较复杂的三角函数周期的求解技巧	113
五 判断三角函数奇偶性和单调性的方法	113
六 如何求解三角函数性质的综合应用问题	116
七 高考命题切入点	117
第二节 三角函数的值域与最值	117
一 可化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 型的最值问题的求法	117
二 正弦、余弦齐次式的最值问题的求法	119
三 可化为闭区间上二次函数的三角最值的求解技巧	119

四 如何求解含分式的三角函数式的最值	121
五 三角最值的逆向应用	123
六 较复杂的三角函数式最值问题的求解策略	124
七 高考命题切入点	126
第三节 三角函数的求值	126
一 给角求值	126
二 给值求值	129
三 给值求角	136
四 给值求和	137
五 高考命题切入点	137
第四节 三角不等式	138
一 比较三角函数式大小的常用方法	138
二 如何巧解给定区间的三角不等式选择题	139
三 选择题中“三角不等式的一般性问题”的求解技巧	140
四 怎样判定三角函数式的符号	141
五 高考命题切入点	141

第五章 平面向量

第一节 向量及其运算	142
一 怎样求解向量的有关概念问题	142
二 向量运算及数乘运算的求解方法	143
三 三点共线问题的证明方法	145
四 求解平行问题的常用技巧	146
第二节 向量的数量积及其运算	147
一 向量的数量积的求法	147
二 如何求向量的长度	148

三 如何求两向量的夹角	149
四 垂直问题的求解方法	150
五 向量的数量积的逆向应用	152
第三节 平面向量的综合应用	153
一 用向量方法证明平面几何问题的技巧	153
二 如何求解向量与函数结合的综合问题	156
三 如何求解向量与三角结合的综合问题	158
四 向量与方程、不等式结合的综合问题的解法	161
五 如何求解向量与数列结合的综合问题	162
六 向量与解析几何结合的综合问题的求解技巧	163
七 向量的实际应用案例	166
第四节 解斜三角形	167
一 怎样利用正、余弦定理求三角形的边与角	167
二 如何判定三角形的形状	170
三 三角形中的三角函数问题的求解策略	172
四 三角形中综合问题的求解策略	175
五 与三角形有关的实际应用问题的求解策略	178
第五节 线段的定比分点及平移	180
一 线段定比分点公式的运用技巧	180
二 怎样利用平移公式解题	181
第六节 高考命题切入点	183

第六章 不等式

第一节 不等式的性质与证明	189
一 不等式性质的应用技巧	189
二 均值不等式的灵活运用	191
三 如何确定含参不等式的参数取值范围	193
四 最值问题的求解策略	195
五 不等式证明的常用方法和技巧	197
六 高考命题切入点	207
第二节 不等式的解法	208
一 分式不等式和高次不等式的解法	208
二 无理不等式的解法	209
三 含绝对值的不等式的解法	209
四 指数、对数不等式的解法	211
五 含参不等式的解法	211
六 其他不等式的解法	214
七 高考命题切入点	214
第三节 不等式的综合应用	216
一 不等式的主要应用	216
二 常用的方法与技巧	216
三 高考命题切入点	220

第七章 直线与圆的方程

第一节 直线及位置关系	222
一 求直线倾斜角和斜率的常用方法	222
二 证明三点共线的五种方法	224
三 判断两直线位置关系的方法	225
四 怎样解答有关直线方程问题	226
五 运用数形结合的思想求解与斜率有关的问题	229

六 怎样求两直线所成的角	230
七 距离公式的应用	231
第二节 线性规划及其实际应用	231
一 二元一次不等式(组)表示平面 区域问题	231
二 怎样求约束条件下二元函数的 最值	233
三 线性规划的实际应用问题	236
第三节 直线与圆	238
一 求圆的方程的常用方法	238
二 与圆的切线有关问题的求法	240
三 怎样判断点与圆、直线与圆、圆 与圆的位置关系	241
四 怎样求解直线与圆相交的有关 问题	243
五 圆中有关最值的求解策略	244
第四节 曲线与方程	245
一 求曲线方程的一般步骤和方法	246
二 解析法在解题中的应用	248
第五节 对称问题	249
一 求解对称问题的常用技巧	249
二 怎样求解与对称有关的实际问题	250
第六节 高考命题切入点	252

第八章 圆锥曲线

六 由圆锥曲线的方程判断形状 或研究性质	263
七 圆锥曲线定义的应用	265
八 怎样求解与圆锥曲线弦长、 距离有关的问题	266
第二节 直线与圆锥曲线的位置关系	268
一 直线与圆锥曲线的交点问题	268
二 与弦长有关问题的求解技巧	269
三 中点弦问题的求解策略及注意 事项	272
四 垂直问题的求解策略	274
五 怎样求参数的取值范围	275
六 对称问题的求解策略	279
第三节 轨迹问题	280
一 用待定系数法求轨迹方程	280
二 用直译法求轨迹方程	281
三 用定义法求轨迹方程	282
四 用代入法求轨迹方程	283
五 求轨迹方程的参数法	284
六 求轨迹方程的交轨法	285
第四节 圆锥曲线的综合问题	287
一 用运动变化的思想方法求解 圆锥曲线的综合问题	287
二 直线与圆锥曲线的有关问题 的求解策略	288
三 圆锥曲线最值问题的求解策略	289
四 定值问题的求解策略	291
五 存在性问题的求解策略	293
六 解析几何与向量结合的综合 问题	295
七 解析几何与数列结合的综合 问题	297
八 开放性问题的求解策略	298

九 解析几何应用问题	299
第五节 高考命题切入点	301

第九章 直线、平面、简单几何体

第一节 平面与空间直线	310
一 求异面直线所成的角的常用方法	310
二 求解平面基本性质的有关问题的策略	313
三 怎样求异面直线的距离	314
四 直线与平面的证明问题	315
第二节 直线与平面平行与垂直	316
一 直线与平面位置关系问题的求解策略	316
二 怎样求直线与平面所成的角	318
三 直线与平面平行与垂直的证明	320
第三节 平面与平面平行与垂直	320
一 两个平面位置关系的判定	320
二 二面角的求法	322
三 怎样证明平面与平面平行和垂直	324
四 空间距离的求法	325
第四节 空间向量及其运算	328
一 空间向量的线性运算	328
二 空间向量共面问题的证明方法	329
三 数量积及其简单应用	330
第五节 空间向量的坐标运算	332
一 空间向量的坐标运算	332
二 平行、垂直问题的坐标求法	334
三 空间向量坐标运算的简单应用	335
第六节 空间角	336
一 用向量法求角	336
二 直线与平面所成的角	337
三 二面角的求法	339

四 无棱二面角的求法	341
第七节 空间距离	343
一 空间两点间的距离的求法	343
二 空间点到直线的距离的求法	344
三 异面直线间的距离的求法	344
四 点到平面的距离的求法	345
五 直线到平面的距离的求法	346
第八节 柱、锥、简单多面体	347
一 简单多面体的有关概念问题的解法	347
二 长方体对角线长的求法	348
三 怎样求解与截面有关的问题	349
四 多面体体积的求法	350
五 欧拉公式的应用	352
第九节 球	353
一 球与多面体相结合的问题	353
二 球的表面积与体积的求法	354
三 球面距离的求法	355
四 球的截面问题的求法	356
第十节 高考命题切入点	358

第十章 排列组合

一 分步计数原理与分类计数原理的应用	369
二 怎样求解排列与组合问题	370
三 排列、组合综合应用问题的求解策略	372
四 与几何有关的排列组合问题的求解策略	375
五 排列数、组合数及逆向应用问题	376
六 高考命题切入点	377

第十一章 概率与统计

- 一 怎样求离散型随机变量的分布列 382
- 二 期望与方差的求解策略 385
- 三 抽样方法的实际应用 389
- 四 怎样对总体分布进行估计 390
- 五 正态分布和线性回归的应用 392
- 六 高考命题切入点 394

第十二章 极限

- 一 怎样用数学归纳法求解有关问题 400
- 二 数列极限的求解方法 402
- 三 函数极限的求解方法 406
- 四 函数连续性问题的求解策略 408
- 五 高考命题切入点 409

第十三章 导数

- 一 导数的概念及几何意义 410
- 二 函数的求导策略 412
- 三 怎样求函数的单调区间 414
- 四 函数的极值与最值的求解策略 416
- 五 如何利用导数证明不等式 419
- 六 导数的综合应用 419
- 七 高考命题切入点 422

第十四章 复数

- 一 复数概念与运算问题的求解方法 424
- 二 复数的几何意义 426
- 三 高考命题切入点 427

第四部分 数学思想方法

第一章 高考常考的数学思想方法

第一节 函数与方程思想 429

- 一 函数思想 429
- 二 方程思想 434
- 三 函数与方程的转化思想 435

第二节 数形结合思想 439

- 一 数形结合思想可求解以下几种问题 439
- 二 利用数形结合思想分析和解决问题时需注意的问题 440

第三节 分类讨论思想 445

- 一 对问题的变量或参数进行分类讨论 445
- 二 对条件是分类给出的问题进行分类讨论 448
- 三 对求解过程不便统一表述的问题进行分类讨论 449
- 四 关于图形的位置、类型的分类问题 452
- 五 简化和避免分类讨论的方法 453

第四节 转化与化归思想 455

- 一 复杂问题转化为简单问题 455
- 二 一般与特殊的转化 457
- 三 正与反的转化 459
- 四 等与不等的转化 460
- 五 常量与变量的转化 460
- 六 数与形的转化 460

第二章 几种其他的数学思想

第一节 补集思想 462

第二节	对称思想	463
第三节	整体思想	465
第四节	极端思想	466

第三章 常用的数学方法

第一节	配方法	468
第二节	待定系数法	470
第三节	换元法	475
一	三角换元	476
二	代数换元	477
第四节	判别式法	479
第五节	反证法	483
第六节	数学归纳法	484
第七节	导数法	488
第八节	向量法	491

第四章 几种其他的数学方法

第一节	定义法	496
一	利用函数的有关定义解题	496
二	用定义法解三角题	497
三	椭圆定义的应用	497
四	双曲线方程的应用	498
五	抛物线定义的应用	499
六	圆的定义的应用	500
第二节	赋值法	501
第三节	分离参数法	502
第四节	消去法	503
第五节	定比分点法	503
第六节	比较法	504
第七节	分析法	507
第八节	综合法	507
第九节	放缩法	509

一	添舍放缩	510
二	借助重要不等式放缩	510
三	分式放缩	511

第十节	裂项相消法	513
第十一节	错位相减法	513
第十二节	倒序相加法	515
第十三节	转化求和法	516
第十四节	等积法	516
第十五节	补形法	517
第十六节	展平法	518
第十七节	分割法	519
第十八节	射影法	519
第十九节	相邻问题捆绑法	520
第二十节	相间问题插空法	520
第二十一节	多元问题分类法	521
第二十二节	“特殊”问题优先法	521
第二十三节	元素相同隔板法	521

Part 1

第一部分 高考数学能力要求

■ 高考数学命题突出以能力立意,对知识的考查侧重于理解 and 应用,即考查学生分析问题的方法和解决问题的能力.因此高考在能力考查上要求很高,力求考查:思维能力、运算能力、空间想象能力、实践能力和创新意识. ■

第一章 思维能力

数学是思维的体操,因此数学本身的特点,决定了高考必须以考查思维能力为重点.

思维能力是数学能力的核心,是一个人基本素质的体现.它要求:以数学知识为素材,通过空间想象、直觉猜想、归纳抽象、符号表示、运算求解、演绎证明和模式构建等,对客观事物中的空间形式、数量关系和数学模式进行思考和判断,即经过观察、比较、分析、综合、抽象和概括,从而形成和发展理性思维,达到分析问题和解决问题的目的.

思维能力主要包括逻辑思维能力、直觉思维能力、合情推理能力、探索能力和策略创造能力.

演绎推理

数学是一个各部分紧密联系的逻辑系统,形式逻辑推理是其基本方法.演绎推理能力是指从定义出发进行分析、推理、论证的能力.

例 1 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形, $AB \parallel DC$, $\angle DAB = 90^\circ$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$,

且 $PA = AD = DC =$

$\frac{1}{2}AB = 1$, M 是 PB

的中点.

(1) 证明: 面

$PAD \perp$ 面 PCD ;

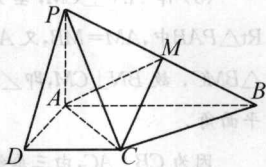
(2) 求 AC 与 PB 所成的角;

(3) 求面 AMC 与面 BMC 所成二面角的大小.

分析 立体几何试题除了重点考查空间想象能力外,考查逻辑思维能力和演绎推理能力也是它不可少的功能.其主要考查形式有两种:一是在证明中考查,按照演绎推理的步骤完成推理和证明;二是在计算中考查,要求先推理再计算,在计算过程中体现对演绎推理的考查.

解析 解法一 (1) 因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $CD \perp AD$, 所以由三垂线定理得: $CD \perp PD$.

因而 CD 与面 PAD 内的两条相交直线 AD , PD 都垂直, 故 $CD \perp$ 面 PAD .





又 $CD \subset$ 面 PCD , 因此面 PAD $\perp$ 面 PCD .

(2) 过 B 作 $BE \parallel CA$ 且 $BE=CA$,

则 $\angle PBE$ 是 AC 与 PB 所成的角.

连结 AE , 从而 $AE=CB=BE=CA=\sqrt{2}$, 又 $AB=2$, 所以四边形 $ACBE$ 是正方形.

因为 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 得 $\angle PEB=90^\circ$.

在 $Rt\triangle PEB$ 中, $BE=\sqrt{2}$, $PB=\sqrt{5}$.

$$\text{所以 } \cos \angle PEB = \frac{BE}{PB} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

故 AC 与 PB 所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3) 作 $AN \perp CM$, 垂足为 N , 连结 BN , 在 $Rt\triangle PAB$ 中, $AM=MB$, 又 $AC=CB$, 所以 $\triangle AMC \cong \triangle BMC$. 故 $BN \perp CM$, 即 $\angle ANB$ 为所求二面角的平面角.

因为 $CB \perp AC$, 由三垂线定理得: $CB \perp PC$.

在 $Rt\triangle PCB$ 中, $CM=MB$, 所以 $CM=AM$.

在等腰三角形 AMC 中, $AN \cdot MC =$

$$\sqrt{CM^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} \cdot AC, \text{ 所以}$$

$$AN = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

因为 $AB=2$, 所以 $\cos \angle ANB = \frac{AN^2 + BN^2 - AB^2}{2AN \cdot BN} = -\frac{2}{3}$. 因此所求的二面角的大小为 $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

解法二 因为 $PA \perp AC$, $PA \perp AB$, $AD \perp AB$, 以 A 为坐标原点, AD 长为单位长度建立如图所示

的空间直角坐标系,

则各点坐标为 $A(0, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(1, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$,

$$M\left(0, 1, \frac{1}{2}\right).$$

(1) 因为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$, 故 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, 所以 $AP \perp DC$.

又由题设 $AD \perp DC$, 且 AP 与 AD 是平面 PAD 内的两条相交直线, 因此 $DC \perp$ 面 PAD .

(2) 因为 $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{PB} = (0, 2, -1)$, 所以 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{5}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PB} = 2$.

$$\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

故 AC 与 PB 所成的角为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{5}$.

(3) 在 MC 上取一点 $N(x, y, z)$, 则存在 $\lambda \in \mathbb{R}$, 使 $\overrightarrow{NC} = \lambda \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = (1-x, 1-y, -z)$, $\overrightarrow{MC} = (1, 0, -\frac{1}{2})$. 所以 $x=1-\lambda$, $y=1$, $z=\frac{1}{2}\lambda$.

要使 $AN \perp MC$, 只需 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, 即

$$x - \frac{1}{2}z = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{4}{5}.$$

从而当 $\lambda = \frac{4}{5}$ 时, N 的坐标为 $(\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5})$, 能

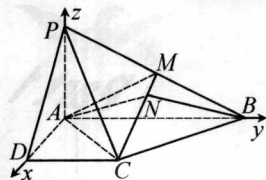
使 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, 此时, $\overrightarrow{AN} = (\frac{1}{5}, 1, \frac{2}{5})$, $\overrightarrow{BN} = (\frac{1}{5}, -1, \frac{2}{5})$, 有 $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

由 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$, 得

$AN \perp MC$, $BN \perp MC$.

所以 $\angle ANB$ 为所求二面角的平面角.

$$\text{因为 } |\overrightarrow{AN}| = \frac{\sqrt{30}}{5}, |\overrightarrow{BN}| = \frac{\sqrt{30}}{5},$$



$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{BN} \rangle = \frac{\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AN}| \cdot |\overrightarrow{BN}|} = -\frac{2}{3}.$$

故所求的二面角的大小为 $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

例 2 设数列 $\{a_n\}$ 的各项都是正数, 且对任

意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3 = S_n^2$, 其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和.

(1) 求证: $a_n^2 = 2S_n - a_n$;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 设 $b_n = 3^n + (-1)^{n-1} \lambda \cdot 2^n$ (λ 为非零整数, $n \in \mathbf{N}^*$), 试确定 λ 的值, 使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $b_{n+1} > b_n$ 成立.

解析 (1) 由已知, 当 $n=1$ 时, $a_1^3 = a_1^2$, 因为 $a_1 > 0$, 故 $a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots + a_n^3 = S_n^2$,

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{n-1}^3 = S_{n-1}^2.$$

$$\text{两式相减得 } a_n^3 = S_n^2 - S_{n-1}^2$$

$$= (S_n + S_{n-1})(S_n - S_{n-1}) = a_n(2S_n - a_n).$$

因为 $a_n > 0$, 故 $a_n^2 = 2S_n - a_n$.

当 $n=1$ 时也适合上式,

故对 $n \in \mathbf{N}^*$, 有 $a_n^2 = 2S_n - a_n$.

(2) 由(1)知 $a_n^2 = 2S_n - a_n$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1}^2 = 2S_{n-1} - a_{n-1}$.

$$\text{两式相减得 } a_n^2 - a_{n-1}^2 = 2(S_n - S_{n-1}) - a_n + a_{n-1} = 2a_n - a_n + a_{n-1} = a_n + a_{n-1}.$$

因为 $a_n + a_{n-1} > 0$, 故 $a_n - a_{n-1} = 1$.

即数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列.

故 $a_n = n$.

(3) 因为 $a_n = n$, 故 $b_n = 3^n + (-1)^{n-1} \lambda \cdot 2^n$.

由于 $b_{n+1} - b_n = 3^{n+1} + (-1)^n \lambda \cdot 2^{n+1} - [3^n +$

$$(-1)^{n-1} \lambda \cdot 2^n] = 2 \cdot 3^n - 3\lambda(-1)^{n-1} \cdot 2^n.$$

要使 $b_{n+1} > b_n$ 恒成立, 必须且只需

$$2 \cdot 3^n - 3\lambda(-1)^{n-1} \cdot 2^n > 0 \text{ 恒成立, 则 } \lambda(-1)^{n-1} <$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \text{ 恒成立.}$$

当 n 为奇数时, 即 $\lambda < \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 恒成立.

又 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 的最小值为 1, 故 $\lambda < 1$.

当 n 为偶数时, 即 $\lambda > -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 恒成立.

又 $-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 的最大值为 $-\frac{3}{2}$, 故 $\lambda > -\frac{3}{2}$.

因此 $-\frac{3}{2} < \lambda < 1$, 因为 λ 为非零整数, 故 $\lambda = -1$.

所以当 $\lambda = -1$ 时, 使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $b_{n+1} > b_n$ 成立.

合情推理

合情推理指的是合理的猜测方法, 它与通常所说的论证推理是有差异的, 高考中对合情推理的考查主要是归纳推理与类比推理.

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{10} = 0$, 则有等式 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{19-n}$ ($n < 19$, $n \in \mathbf{N}$) 成立, 类比上述性质, 相应地: 在等比数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_9 = 1$, 则有等式 _____ 成立.

解析 由经验可知: 一般地, 在等差数列中有项的和的性质, 在等比数列中就有类似的项的积的性质. 而由已知性质中的关键数是 19, 注意到 19 与 10 的关系为 $19 = 2 \times 10 - 1$, 则在等比数列中, 由 $b_9 = 1$ 可得 $2 \times 9 - 1 = 17$, 因而可猜想 “ $b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_{17-n}$ ($n < 17$, $n \in \mathbf{N}$)” 成立, 经检验知此等式成立.

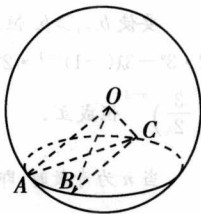
点评 由给出的性质探索新情境的类似性质, 其策略有: 一是直推类比, 即从分析给定的性质入手, 找到其本质特征, 再类比到新情境中; 二是直觉猜想类比, 即抓住题目某些关键特征, 借助经验



和直觉,大胆地类比猜想.

例 2 如右图, A,

B, C 是表面积为 48π 的球面上三点, $AB=2$, $BC=4$, $\angle ABC=60^\circ$, O 为球心, 则直线 OA 与截面 ABC 所成的角等于().



A. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{6}$

B. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$

解析 要求直线 OA 与截面 ABC 所成的角, 关键是作平面 ABC 的垂线, 垂足落在哪成了我们关注的焦点. 由题意知 $OA=OB=OC$, 因此垂足应该是三角形 ABC 的外心, 而在三角形中外心最好确定的是正三角形与直角三角形, 由条件知它不可能是正三角形, 因此我们期待着它是直角三角形, 通过简单的验算它是直角三角形, 故垂足是斜边的中点, 且 OA 在面 ABC 内的射影长是 2, 而球的半径是 $2\sqrt{3}$, 故 $\cos \alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}}$, $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$, 选 D.

例 3 根据统计资料, 我国能源生产自

1985 年以来, 发展速度很快. 下面是我国能源生产总量的几个统计数据: 1985 年 8.6 亿吨, 1990 年 10.4 亿吨, 1995 年 12.9 亿吨. 有关专家预测: 到 2000 年我国能源生产总量将超过 16.1 亿吨, 实践证明专家的预测是合理的, 请给出一个简单模型的表达式.

解析 这是一个数据拟合问题, 为了方便, 我们把已知的三组数据 (1985, 8.6), (1990, 10.4), (1995, 12.9) 变换为 (0, 8.6), (5, 10.4), (10, 12.9), 用图像或代数方法易知此题不适合一次函数对数据拟合, 因此选用二次函数进行拟合.

假设各数据满足二次函数 $y=ax^2+bx+c$, 将各数据代入得

$$\begin{cases} c=8.6, \\ 25a+5b+c=10.4, \\ 100a+10b+c=12.9, \end{cases}$$

解之得 $a=0.014$, $b=0.29$, $c=8.6$.

于是 $y=0.014x^2+0.29x+8.6$.

对应于 2000, 取 $x=15$ 代入上式得 $y=16.1$, 这与专家的预测值相同.

故填 $y=0.014x^2+0.29x+8.6$.

点评 要从熟知的简单函数中选一个合乎题意的函数, 需要大胆猜想. 本题把年号按比例化小, 使运算简单明快.



直觉思维

直觉思维是在没有经过严格推理之前, 迅速对事物作出判断, 得出结论. 直觉思维是不受固定的逻辑规则约束, 直接领悟事物的本质的一种思维方式. 在直觉思维过程中, 人们根据所掌握的知识, 对问题提出合理的猜测和假设, 因此它得出的结论是以扎实的知识为基础, 对事物敏锐的观察和深刻的理解为前提的, 且往往表现为突然的领悟.

例 1 已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 与直线

$y=\frac{1}{2}$ 的交点中, 距离最近的两点间的距离为 $\frac{\pi}{3}$, 那么此函数的最小正周期是().

A. $\frac{\pi}{3}$

B. π

C. 2π

D. 4π

解析 由于 $y=\sin x$ 与直线 $y=\frac{1}{2}$ 的交

间距离最近的两点间的距离为 $\frac{2\pi}{3}$, 它正好是 $\frac{\pi}{3}$ 的 2 倍, 故 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $y=\sin x$ 的周期的一半, 故选 B.

例 2 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7 a_{11}=6$, a_4+a_{14}

$=5$, 则 $\frac{a_{20}}{a_{10}}$ 等于().

A. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$

解析 解法一 因为 $a_7 \cdot a_{11}=a_4 \cdot a_{14}=6$, $a_4+a_{14}=5$. 所以 a_4, a_{14} 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两根.

