HIGHER MATHEMATICS FOR BIOLOGY AND CHEMISTRY

南开大学公共数学系列教材

高等数学(生化类)

上册

主编 姜作廉

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

南开大学公共数学系列教材

高等数学
（生化类）

上册

主编　姜作廉
主审　胡龙桥
编委（按姓氏笔画排序）
由同顺　陈怀鹏　陈学民
姜作廉　赖学坚

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是南开大学根据新世纪教学改革成果而编写的系列教材之一. 全书分上、下两册，本书为上册. 内容包括极限与函数的连续性，一元函数微分学，一元函数积分学和空间解析几何(含向量代数).

本书在基本概念、基本方法、基本理论、基本运算和基本技巧方面阐述清晰，由浅入深，富有系统性.

本书可作为综合性大学和高等师范院校的化学、生命科学、环境工程与环境科学、医学、心理学等各专业的本科生教材，也可以作为工科院校相关专业的本科生教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 生化类. 上册/姜作廉主编. —天津：天津大学出版社，2005.9

ISBN 7-5618-2179-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. 姜… Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 093606 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话 发行部：022-27403647 邮购部：022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 170mm×240mm
印　　张 16
字　　数 353 千
版　　次 2005 年 9 月第 1 版
印　　次 2005 年 9 月第 1 次
印　　数 1－4 000
定　　价 23.00 元

前　言

多年来，高等数学一直是南开大学非数学类专业本科生必修的校级公共基础课.由于各个学科门类的情况差异较大，该课程又形成了包含多个层次、多个类别的体系结构.层次不同，类别不同，教学目标和教学要求有所不同，课程内容的深度与宽度也有所不同，自然所使用的教材也应有所不同.

教材建设是课程建设的一个重要方面，是属于基础性建设.时代在前进，教材也应适时更新而不能一劳永逸.因此，教材建设是一项持续的不可能有“句号”的工作.20世纪80年代以来，南开大学的老师们就陆续编写出版了面向物理类、经济管理类和人文类等多种高等数学教材.这些教材为当时的数学教学做出了重要贡献，也为公共数学教材建设奠定了基础，积累了经验.

21世纪是一个崭新的世纪.随着新世纪的到来，人们似乎对数学也有了一个崭新的认识：数学不仅是工具，更是一种素养，一种能力，一种文化.已故数学大师陈省身先生在其晚年为将中国建设成为数学大国乃至最终成为数学强国而殚精竭虑.他尤其对大学生们寄予厚望.他不仅关心着数学专业的学生，也以他那博大胸怀关心着非数学专业的莘莘学子.2004年他挥毫为天津市大学生数学竞赛题词，并与获奖学生合影留念.这也是老一辈数学家对我们的激励与鞭策.另一方面，近年来一大批与数学交叉的新兴学科如金融数学、生物数学等不断涌现.这也对我们的数学教育和数学教学提出了许多新要求.而作为课程基础建设的教材建设自当及时跟进.现在呈现在读者面前的便是新世纪南开大学公共数学系列教材中的一种——高等数学(生化类).

全书分上、下两册，主要内容是极限与函数的连续性，一元函数微分学与积分学，多元函数微分学与积分学，常微分方程以及空间解析几何(含向量代数).讲授全书约需150学时.

高等数学是一门重要的基础课.本书在基本概念、基本方法、基本理论、基本运算和基本技巧方面阐述清晰，由浅入深，富有系统性.本书可作为综合性大学和高等师范院校的化学、生命科学、环境工程与环境科学、医学、心理学等各专业的本科生教材，也可以作为工科院校相关专业的本科生教材。

本书的编写得到了南开大学“新世纪教学改革”项目“公共数学课程建设改革与实践”的资助，得到了南开大学教务处和南开大学数学学院的大力支持和帮助.在教材编

写、录入和出版过程中，南开大学数学学院的张效成教授为本书的出版进行了精心的指导与帮助；薛锋老师周密细致的组织协调工作为我们提供了有力的保障．韩志欣同学运用 CTex 为本书的初稿进行录入．对来自方方面面的关心、支持和帮助，我们在这里一并表示衷心感谢．

由于我们的水平有限，缺点和不足在所难免，诚望读者批评指正．

编者

2005 年 6 月于南开园

目　录

第 1 章　函数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一,也是微积分学研究的对象.本章主要是复习过去所学知识.由于实数是微积分的基础,所以在本章开头,先来简单叙述一下实数的特性.

1.1　实数

1.集合与区间

集合是数学中的一个基本概念.通过例子来说明这个概念.比方说,一个书柜中的书构成一个集合,所有能产生氧气的植物也可以构成一个集合.一般地,所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的全体.组成这个集合的事物称为该集合的元素.我们采用记号

$$M=\{x \mid x\ \text{所具有的特征}\}$$

表示 M 是具有此种特征的元素 x 的全体.如果事物 a 是集合 M 的元素,记作 $a\in M$;事物 a 不是 M 的元素记作 $a\notin M$.需要强调的是,这种特征必须具有确定性,不允许含糊不清.

在数学中也经常使用“区间”这个概念.引进数轴(即在一条直线上取定了原点,并规定了单位长度及正方向)后,全体实数与数轴上的全体点之间便有了一一对应的关系.

给定两个实数 a 与 $b(a<b)$,我们把满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体 x 组成的数集称为闭区间,记作 $[a,b]$.即 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b,\ x\in\mathbf{R}\}$,其中 $\mathbf{R}$ 为实数集.它在数轴上表示从 a 到 b 的有限线段(包含两个端点).满足 $a<x<b$ 的全体实数 x 的数集称为开区间,记作 (a,b).满足 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的全体 x 的数集称为半开或半闭区间,分别记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$,而无穷区间 $(a,+\infty)$ 是指满足不等式 $x>a$ 的全体 x 的数集.此外还有 $(-\infty,b)$,$[a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,+\infty)$ 等等,含义类似.需要注意,“$+\infty$”与“$-\infty$”都是符号,不能当作数来看待.

2.实数

在生产实践中,人类最早认识的是自然数:1,2,3,….由于加减法的需要,增添了 0 与负整数,便将自然数扩充为一般整数.对整数做乘除法,便产生了有理数.任一有理数都可表示为 $\frac{m}{n}$ 的形式,其中 m,n 为整数且 $n\neq0$.古希腊人发现了边长为 1 的正方形的对角线的长度不能用 $\frac{m}{n}$ 表示,从而证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数.这样人们便发现了无理数的

存在.所谓无理数,可理解为无限不循环小数.全体有理数与全体无理数合并所成的集合,称为实数集,通常用 $\mathbf{R}$ 表示.

刚才提到,随着生产活动的发展和生活的需要逐步将自然数集扩充成整数集以及有理数集.而从有理数集扩充到实数集却经过了漫长的岁月.

我们知道,两个自然数之间不一定还存在自然数(对于整数也是一样).从几何直观上说,如果我们把整数与实数轴上的某些点对应起来,那么这些点中间还存在着很大的"空隙",或者说整数点并不充满着整个数轴.而对于有理数来说,情况将大大不同.可以证明任何两个有理数之间还存在着有理数,换个说法,就是任何两个有理数之间还有"无数个"有理数,若把有理数和数轴上的点对应起来,则从直观上看,有理数点已经够密了,这种性质我们叫作数的稠密性,也就是说有理数集具有稠密性(而整数集则没有这种稠密性).于是,人们曾误以为有理数点之间已没有"空隙"了,有理数已充满了整个实数轴.以上的事实也可以从另一个角度来说明.大家知道任何两个自然数的和仍为自然数(这一性质又叫作自然数对于加法运算是封闭的.然而自然数对于减法运算则是不封闭的);整数集虽然对于加、减、乘运算都封闭,但对于除法运算却不封闭;而有理数集对加、减、乘、除四则运算都封闭,这似乎已经完美无缺了,但到了公元 5 世纪的时候,这一"完美"性质受到了挑战,人们终于发现了有理数集对于开方运算是不封闭的.因此,人们引进了无理数,有理数与无理数的全体就是实数集.那么,在两个实数之间,除了实数之外是否还有其他的数呢?也就是从直观上说,实数是否已经没有"空隙"地充满了整个数轴呢?回答是肯定的,也就是说,实数集不再能够扩充,它已"连绵不断"地布满了整个数轴(我们因而称之为实数轴).这一性质叫作实数集的连续性.从这个意义上说,实数集已足够完备了.这也是实数集所特有的本质,也是微积分赖以建立的"基石".在本书中,如果没有特别声明,均是在实数集上讨论各种问题.

3. 实数的绝对值

任一实数 a 的绝对值记作 $|a|$,它的定义是

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

从数轴上看,a 的绝对值 $|a|$ 就是 a 到原点的距离.今后经常要用到形如 $|x - x_0| < \delta$ 的不等式,其中 x_0,δ 是给定的数且 $\delta > 0$,有

$$|x - x_0| < \delta \quad \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta.$$

也就是说,满足 $|x - x_0| < \delta$ 的全部 x 组成的数集合,是一个以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间(图 1.1).我们把这个开区间称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0, \delta)$,即

$$U(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

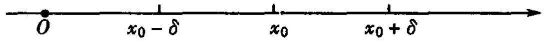

图 1.1

1.2　变量与函数

1.常量与变量

在生产实践和科学实验中，人们常常遇到各种各样的量，如长度、面积、时间、重量、压力等等.在某个过程中，有的量保持固定的值，称之为常量；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，称为变量.例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数是常量，而气体的温度和压力是变量.值得注意，一个量是常量还是变量，这是相对的，有时候要根据具体情况作出分析.例如，重力加速度在小范围地区内视为常量；但就广大地域来说则是变量.

2.函数

在同一过程中所碰到的各种变量中，通常不都是独立变化的.常能发现其中一个变量依赖于另外一个或几个变量.粗略地说，两个变量之间的函数关系，就是它们的数值之间的一种对应关系.我们首先考察几个具体例子.

例 1　在初速为 0 的自由落体运动中，落体的下降距离 s 与时间 t 是两个变量，且有规律

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \quad (0\leqslant t\leqslant T),$$

其中 g 是重力加速度，T 是着地时间.根据上面的公式，可以求出在每一时刻 $t=t_1(0\leqslant t_1\leqslant T)$落体的下降距离.

例 2　一个地区一天中的气温 T 是随着时间 t 而变化的.某地区的气象台用自动记录器记录了某一天 24 小时的气温的变化情况.自动记录器记录下来的是一条曲线.虽然我们不可能找到像例 1 中那样的解析表达式，但是根据这个图形可以知道这个地区在这一天的每一时刻 t_0 的气温 T_0（见图 1.2）.事实上，这种图示的方法在实际问题中经常使用，因为在实际问题中能找出像例 1 中由公式给出的函数关系毕竟是少数.

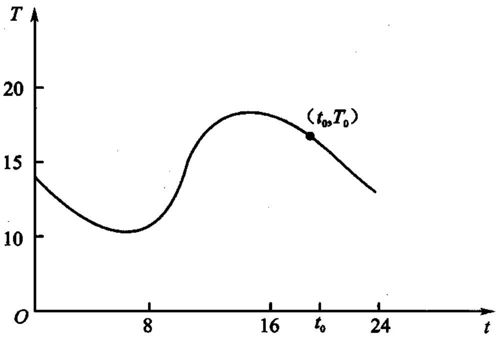

图 1.2

例 3　天津市内固定电话的通话费 M 是由通话时间 t 来确定的.按电信公司规定，通话时间在 3 min 以内的，一律收费 0.4 元；通话时间超过 3 min 的，按前 3 min 收费 0.4元，然后每增加一分钟，收费增加 0.1 元.因此可以把 M 与 t 的关系列成表 1.1.

表 1.1

t(min)	$0<t\leqslant 3$	$3<t\leqslant 4$	$4<t\leqslant 5$	…
M(元)	0.4	0.5	0.6	…

以上三个实例的内容虽然各不相同,但是它们有一些共同点:第一,每一个例子中都有两个变量,它们的地位有所不同,其中一个变量随另一个变量的变化而变化;第二,一个变量的变化范围为已知,对这个变量在变化范围中的每一个值,都可以唯一地确定另一个变量的值.把这两点数学化,并把上面的实例抽象化,就可得到函数的定义.

定义 设在同一过程中有两个变量 x 与 y,f 为某一对应规则,又设 x 的变化范围是非空实数集 X.如果对于变量 x 在 X 中的每一个值,按照对应规则 f,变量 y 都有唯一确定的一个实数值与之对应,那么我们就称变量 y 是变量 x 的函数,这时 x 称为自变量,y 称为因变量,记作

$$y=f(x) \qquad (x\in X),$$

其中 f 表示定义在 X 上的函数,X 是函数 f 的定义域,$f(X)=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数 f 的值域.

注意,除非特别说明,我们这里讨论的函数都是指单值函数,即对同一个自变量 x,不允许有两个不同的函数值 y 与之对应.再来看前面的三个例子.它们分别由解析表达式、曲线和表格给出函数关系.一般来说,函数关系表示方法大致就是这样三种.而微积分学中我们主要研究由公式给出的函数,亦即具有解析表达式的函数.

通常情况下,一个由表达式给出的函数的定义域是使得该表达式有意义的自变量的一切值,如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$.在实际问题中提出的函数的定义域由其实际意义来确定,如例 1 中的 $t\geqslant 0$.

例 4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的图形如图 1.3.

例 5 取整函数 $y=[x]$, $x\in(-\infty,+\infty)$,表示不超过 x 的最大的整数,即 $[x]=\max\{z\mid z\leqslant x_1$ 而且 z 是整数$\}$.如 $[4.6]=4$,$[-4.6]=-5$.其图形如图 1.4 所示.

例 6 已知函数

$$y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0\end{cases}$$

的图形如图 1.5.

像例 6 中的这种函数关系,当自变量在不同的范围内由不同的公式给出,把这种函数称为分段函数.

借助函数的图形可以立刻看出函数的某些特性.正因为这种直观性,所以常常借助

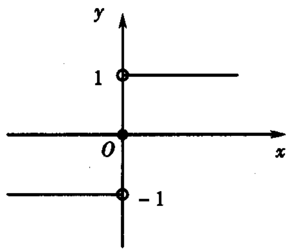

图 1.3

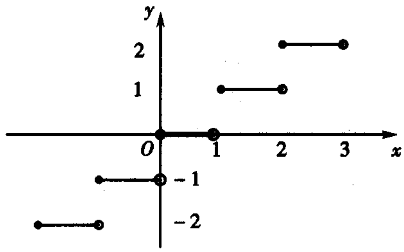

图 1.4

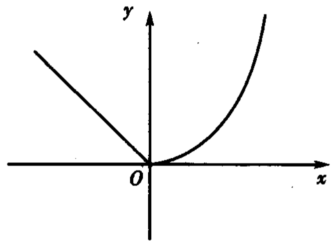

图 1.5

图形来研究函数.

3.函数的几种特性

1)偶函数和奇函数

设函数 $f(x)$定义在对称区间 D 上,且满足 $f(-x)=f(x)$, $x\in D$,则称 $f(x)$为偶函数;如果函数 $f(x)$满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.例如 x^2,$\cos x$ 为偶函数,而 x^3,$\sin x$ 为奇函数,而 $x^2+\sin x$ 则既非奇函数,也非偶函数.从几何上看,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.此外偶函数和奇函数还有如下性质:

(1)两个偶函数或两个奇函数的乘积是偶函数;

(2)偶函数与奇函数的乘积是奇函数;

(3)一个函数总可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

性质(1)与(2)的证明是显然的,留给读者.对性质(3),我们有

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

不难看出上式等号右端第一项为偶函数,第二项为奇函数.

2)周期函数

设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,若存在不为零的常数 l,使得对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$为周期函数,并称 l 为$f(x)$的一个周期.

通常我们说的周期是指最小正周期.如函数 $y=\cos x$ 有周期 2π,而 $y=|\cos x|$有周期π.

值得注意的是并不是所有的周期函数都具有最小正周期.例如狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

容易看出,任何有理数 r 都是它的周期,但它显然没有最小正周期.

3)单调函数

设函数 $y=f(x)(x\in X)$,如果对于 X 内任意两点,$x_1<x_2$,都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$

(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$在区间 X 上单调增加(或单调减少),也称 $y=f(x)$为单增函数(或单减函数). 在上面的定义中,如果等号恒不成立,即 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在 X 上严格单调增加(或减少). 单增函数和单减函数统称为单调函数. 严格单增函数和严格单减函数统称为严格单调函数. 例如函数 $y=x^2$在$[0,+\infty)$是严格单增的,而在$(-\infty,0]$是严格单减的. 由此可见函数 $y=f(x)$的单调性与所考虑的区间也是有关的.

4)有界函数

设函数 $y=f(x)$,$x\in X$. 若存在一个实数 M,使得对一切 $x\in X$,都有

$$f(x)\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 X 上是有上界的,并称 M 为 $f(x)$的一个上界. 如函数 $y=\sin x+\cos x$在$(-\infty,+\infty)$是有上界的,而函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$[1,2]$也是有上界的. 函数 $y=e^x$在$(-\infty,+\infty)$是无上界的.

不难看出,$\sqrt{2}$是 $\sin x+\cos x$ 的一个上界,且任何大于$\sqrt{2}$的实数也都是 $\sin x+\cos x$的上界. 由此可见,具有上界的函数,它的上界不是唯一的. 此外函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上显然没有上界,这表明一个函数是否有上界,和考虑的区间有关.

类似地,若存在一个实数 N,使得对一切 $x\in X$,都有

$$f(x)\geqslant N,$$

则称 $f(x)$在 X 上是有下界的,并称 N 是 $f(x)$的一个下界. 如函数 $y=\sin x+\cos x$与 $y=e^x$在$(-\infty,+\infty)$上都是有下界的. 但函数 $y=-e^x$在$(-\infty,+\infty)$上就没有下界.

既有上界又有下界的函数称为有界函数. 即若存在两个实数 M 与 N,使得

$$N\leqslant f(x)\leqslant M,\quad \forall x\in X,$$

则称 $f(x)$在 X 是有界函数. 如 $y=\sin x+\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$是有界函数,而 $y=e^x$在$(-\infty,+\infty)$不是有界函数.

我们不难得到一个与上面有界函数定义相等价的另外一个定义:若存在大于零的实数 K,使得

$$|f(x)|\leqslant K,\quad \forall x\in X,$$

则称 $f(x)$在 X 上是有界的.

1.3 反函数与复合函数

1.反函数

在函数概念中,我们强调了像的唯一性,即对于定义域是 X,值域是 Y 的函数 $y=f(x)$,当函数值 $y_1\neq y_2$时,必有 $x_1\neq x_2$. 然而反过来不一定,即我们不要求逆像的唯一性. 但如果 f 是一个一一对应,那么就有 $x_1\neq x_2\Rightarrow y_1\neq y_2$,也就是说,一个函数 y 值所对应的 x 值只有一个,即具有了逆像的唯一性.

这时,我们可以把 y 作为自变量,把 x 作为因变量,定义一个新的函数,记为 f^{-1},即

$$x=f^{-1}(y)\quad(y\in Y)$$

称为 $y=f(x)$ 的反函数.因而严格单调函数必有反函数.

例1　函数 $y=2x+1(-\infty<x<+\infty)$ 的反函数是

$$x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\quad(-\infty<y<+\infty).$$

例2　考虑 $y=x^2(-\infty<x<+\infty)$,求其反函数.

解　对于值域 $[0,+\infty)$ 内的每一个值 y_0,定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有两个值 $x=\pm\sqrt{y_0}$ 满足原来函数 $y=x^2$.这不符合反函数定义.所以在整个 $(-\infty,+\infty)$ 上不能确定出 $y=x^2$ 的反函数.为此,把定义域分为 $(-\infty,0]$ 与 $[0,+\infty)$ 两部分,在每一部分上 $y=x^2$ 都是严格单调函数,因而有反函数,分别为 $x=-\sqrt{y}$ 与 $x=\sqrt{y}$.

设 $x=f^{-1}(y)\ (y\in Y)$ 是 $y=f(x)\ (x\in X)$ 的反函数,其实 x 与 y 的对应关系并未改变.从几何上看,若把它们画在同一坐标系内,则它们的图形显然重合.但是,习惯上我们常用字母 x 来表示自变量,用字母 y 表示因变量,所以把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.经过这种符号的调换后,实际上相当于把坐标系中的 x 轴与 y 轴相应地变为 y 轴与 x 轴,若把 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标系内,那么它们关于直线 $y=x$ 对称(见图1.6).

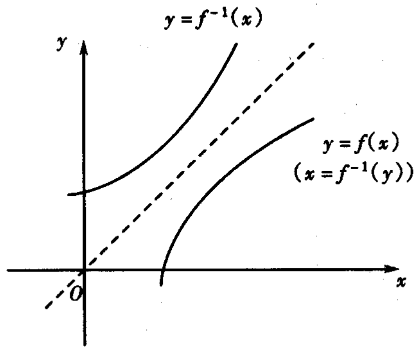

图1.6

2.复合函数

今后我们常常会遇到两个复合起来得到的函数,如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成的.这里的 u 通常称为中间变量.一般说来,设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 U,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域是 X,值域是 U',如果 U' 包含在 U 中,我们就可以在 X 上确定一个函数

$$y=f(\varphi(x))\qquad(x\in X).$$

这个函数称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.有时,也写成 $(f\circ\varphi)(x)$.

考虑复合函数的定义域时,必须注意要求 $u=\varphi(x)$ 的值域 U' 包含在 $y=f(u)$ 的定义域 U 内.例如函数 $y=\sqrt{u}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$,于是复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 $[-1,1]$.这是因为只有当 $x\in[-1,1]$ 时,才能保证 $u=1-x^2$ 的值域包含在区间 $[0,+\infty)$ 内.

需要注意,不是任何两个函数都能够复合成一个有意义的复合函数的.例如,$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.

复合函数也可以由三个或三个以上的函数复合而给出.

1.4 初等函数

1.基本初等函数

所谓基本初等函数,是指以下这五类函数.

1)幂函数

函数

$$y=x^{\mu} \quad (\mu \text{ 是实常数})$$

称为幂函数.它的定义域与 μ 的值有关.例如 $\mu=\frac{1}{3}$ 时,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$;$\mu=\frac{1}{2}$ 时,其定义域为 $[0,+\infty)$;而当 $\mu=-\frac{1}{2}$ 时,其定义域为 $(0,+\infty)$.但是不论 μ 为何值,幂函数的定义域总含有区间 $(0,+\infty)$.幂函数 $y=x^{\mu}$ 的性质,当 $\mu>0$ 与 $\mu<0$ 时有极大的不同(见图 1.7 与图 1.8).

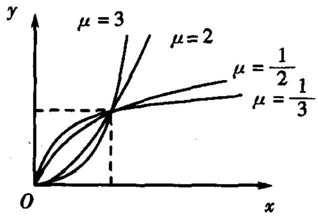

图 1.7

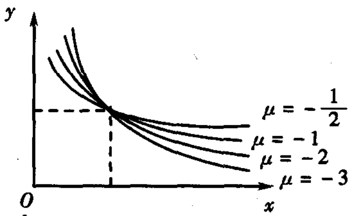

图 1.8

2)指数函数

函数

$$y=a^{x} \quad (a \text{ 是实常数,且 } a>0, a\neq 1)$$

称为指数函数.它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.因为对任意 x 总有 $a^{x}>0$,又 $a^{0}=1$,所以指数函数的图形总是在 x 轴的上方,且通过点 $(0,1)$(见图 1.9).

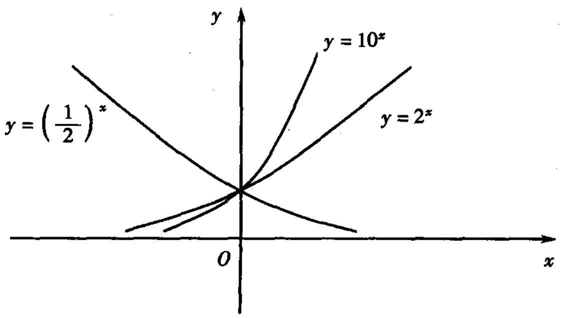

图 1.9

若 $a>1$，$y=a^x$ 单调增加. 若 $0<a<1$，$y=a^x$ 单调减少. 由于 $y=(\frac{1}{a})^x=a^{-x}$，所以 $y=a^x$ 与 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的图形关于 y 轴对称. 以常数 e = 2.718 281 8… 为底的指数函数 $y=e^x$ 是科技中常用的指数函数. 关于 e 的意义以后说明.

3) 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记作

$$y=\log_a x \quad (0<x<+\infty).$$

这类函数称为对数函数(见图 1.10).

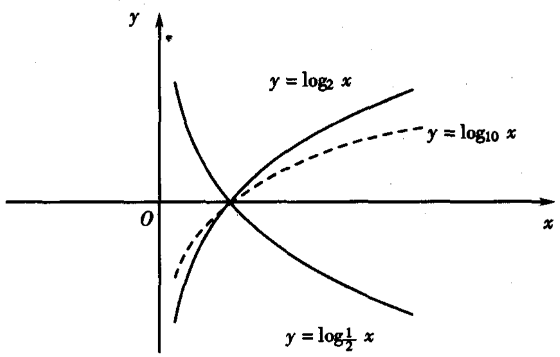

图 1.10

对数函数的图形，可以从与它对应的指数函数 $y=a^x$ 的图形按反函数作图的一般规则作出，即 $y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 关于直线 $y=x$ 对称. 在科技中经常以常数 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，记作 $y=\ln x$ 称为自然对数函数.

4) 三角函数

三角函数有 6 个：

$$y=\sin x, \quad y=\cos x, \quad y=\tan x,$$
$$y=\cot x, \quad y=\sec x, \quad y=\csc x,$$

其中 $\sin x$，$\cos x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；$y=\tan x$ 与 $y=\sec x$ 的定义域是除掉 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的一切实数；$\cot x$ 与 $y=\csc x$ 的定义域是除掉 $x=k\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 的一切实数(见图 1.11～图 1.14).

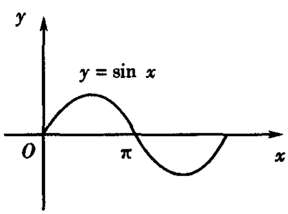

图 1.11

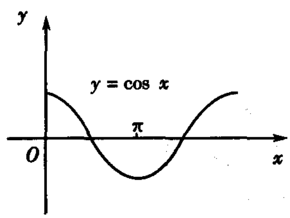

图 1.12