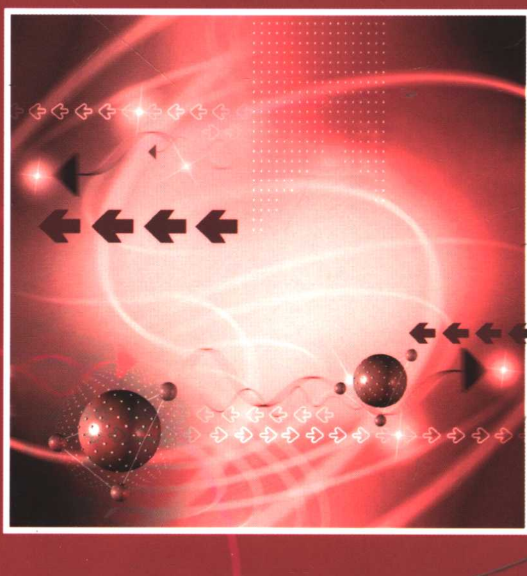
普通高等教育“十一五”计算机类规划教材

离散数学及其应用

魏雪丽 主编



免费
电子

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”计算机类规划教材

离散数学及其应用

主　编　魏雪丽
副主编　于　青
参　编　冯美玲　孙俊清　张玉琍
主　审　韩天锡　岳廷海

机　械　工　业　出　版　社

本书作为计算机科学与技术及信息类专业的基础理论教材，主要内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、映射、代数结构、格与布尔代数、图论等知识，对相关知识的专业应用内容也作了介绍。离散数学与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析、逻辑设计、系统结构、容错诊断、机器定理证明等理论课程联系紧密。

本教材在内容的组织上，力求提供培养学生抽象思维、慎密概括和严密的逻辑推理能力的同时，注重展现离散数学在计算机科学及信息科学中的应用，以增强学生使用离散数学知识分析问题和解决问题的能力，为今后处理离散信息，从事计算机软件的开发与设计以及计算机科学及信息科学中的其他实际应用打好数学基础。

为方便教师教学，本书配有教学课件，欢迎选用本书作为教材的老师索取，索取邮箱：11m7785@sina.com。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用/魏雪丽主编. —北京：机械工业出版社，2008.4

普通高等教育“十一五”计算机类规划教材

ISBN 978-7-111-23535-4

Ⅰ. 离… Ⅱ. 魏… Ⅲ. 离散数学—高等学校—教材 Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 023690 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑：刘丽敏 责任校对：张晓蓉

封面设计：张 静 责任印制：洪汉军

北京铭成印刷有限公司印刷

2008 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 18.5 印张 · 456 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-23535-4

定价：30.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：(010)68326294

购书热线电话：(010)88379639 88379641 88379643

编辑热线电话：(010)88379726

前　　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学中基础理论的核心课程。离散数学是以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象是有限个或可数个元素，因此它充分描述了计算机科学离散性的特点，计算机科学中的程序设计语言、数据结构、操作系统、数据库技术、编译理论、算法分析、可计算性与计算复杂性理论、逻辑设计、系统结构、容错诊断、人工智能与机器人、机器定理证明等理论课程都是以离散数学为基础的。

本教材是作者根据二十多年的教学经验和较成熟的教案整理而成。离散数学包括4大部分，各部分内容都十分丰富，自成体系。本教材将这4大体系中最基本、最重要的内容选入，并努力做到简明扼要、深入浅出，既保持各体系的独立性，又展现出它们的密切联系。本教材的主要特色是：

1. 通过大量的实例从不同的角度对一些抽象的概念进行诠释，使其易于被学生接受和理解。

2. 将同类且对比鲜明的概念（如关系的自反与反自反性、对称与反对称性，偏序集中子集的极大极小元、最大最小元等）集中定义，并通过典型的实例进行对比说明，使学生深刻理解它们的区别与联系。

3. 介绍了离散数学理论在计算机科学及信息科学中的一些典型应用，使学生认识到离散数学的重要性，激发学生学习的积极性。

4. 精心安排各部分内容的先后顺序，使教材的结构更合理、内容更充实、语言更通俗易懂。

5. 对离散数学中的主要专业术语给出了英文标注，便于学生参阅一些国外相关教材和专著。

总之，本教材在内容的组织上，力求提供培养学生抽象思维、慎密概括和严密的逻辑推理能力的同时，注重展现离散数学在计算机科学及信息科学中的应用，以增强学生使用离散数学知识分析问题和解决问题的能力，为今后处理离散信息，从事计算机软件的开发与设计以及计算机科学及信息科学中的其他实际应用打好数学基础。

本书的主要内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合与关系、代数结构和图论等知识，可作为计算机科学与技术及信息类本科专业的基础理论教材，也可供有关技术人员学习参考。本教材的基本教学时数约为80学时，标有*号的内容需另行安排约20学时。

本书由冯美玲撰写第1、2章和第7章的7.1~7.4节，于青撰写第3、4章，魏雪丽撰写第5章和第6章的6.1~6.4节，对全书中的主要专业术语给出了英文标注，并对全书进行了修改、统稿和定稿，孙俊清教授撰写第6章的6.5、6.6节，并对全书的内容进行了认真审阅，张玉琍撰写第7章的7.5~7.9节。韩天锡教授和岳廷海博士对全书的内容进行了认真审阅，并提出了许多修改意见，在此深表谢意。

在编写本书的过程中参阅了许多国内外离散数学教材及专著，在此对这些作者们表示感谢。

由于水平和经验有限，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第 1 章　命 题 逻 辑

逻辑是研究人的思维的科学，包括辨证逻辑和形式逻辑。辨证逻辑是研究反映客观世界辨证发展过程的人类思维的形态的。形式逻辑是研究思维的形式结构和规律的科学，它撇开具体的、个别的思维内容，从形式结构方面研究概念、判断和推理及其正确联系的规律。数理逻辑是用数学方法研究推理的形式结构和推理的规律的数学学科。所谓的数学方法也就是用一套有严格定义的符号，即建立一套形式语言来研究，因此数理逻辑也称为符号逻辑。

数理逻辑的基础部分是命题逻辑和谓词逻辑。本章主要讲述命题逻辑，谓词逻辑将在第 2 章进行讨论。

1.1　命题及其表示

1.1.1　命题的基本概念

数理逻辑研究的中心问题是推理(Inference)，而推理就必然包含前提和结论，前提和结论都是表达判断的陈述句，因而表达判断的陈述句就成为推理的基本要素。在数理逻辑中，将能够判断真假的陈述句称为命题，因此命题就成为推理的基本单位。在命题逻辑中，对命题的组成部分不再进一步细分。

定义 1.1.1　能够判断真假的陈述句称为命题(Proposition)。命题的判断结果称为命题的真值，常用 T(True)(或 1)表示真，F(False)(或 0)表示假。真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。

从上述的定义可知，判定一个句子是否为命题要分为两步：一是判定是否为陈述句，二是能否判定真假，二者缺一不可。

例 1.1.1　判断下列句子是否为命题：

(1) 北京是中国的首都。

(2) 请勿吸烟!

(3) 雪是黑的。

(4) 明天开会吗?

(5) $x+y=5$。

(6) 我正在说谎。

(7) $9+5\leqslant 12$。

(8) $1+101=110$。

(9) 今天天气多好啊!

(10) 别的星球上有生物。

解　在上述的 10 个句子中，(2)、(9)为祈使句，(4)为疑问句，(5)、(6)虽然是陈述句，但(5)没有确定的真值，其真假随 x、y 取值的不同而有改变，(6)是悖论(Paradox)(即

由真能推出假，由假也能推出真），因而(2)、(4)、(5)、(6)、(9)均不是命题。(1)、(3)、(7)、(8)、(10)都是命题，其中(10)虽然现在无法判断真假，但随着科技的进步是可以判定真假的。

需要进一步指出的是，命题的真假只要求它有就可以，而不要求立即给出。如例 1.1.1 的(8)$1+101=110$，它的真假意义通常和上下文有关，当作为二进制的加法时，它是真命题，否则为假命题。还有的命题的真假不能马上给出，如例 1.1.1 的(10)，但它确实有真假意义。

1.1.2 命题分类

根据命题的结构形式，命题分为原子命题和复合命题。

定义 1.1.2 不能被分解为更简单的陈述语句的命题称为原子命题(Simple Proposition)。由两个或两个以上原子命题组合而成的命题称为复合命题(Compound Proposition)。

例如，例 1.1.1 中的命题全部为原子命题，而命题“小王和小李都去公园。”是复合命题，是由“小王去公园。”与“小李去公园。”两个原子命题组成的。

1.1.3 命题标识符

定义 1.1.3 表示原子命题的符号称为命题标识符(Identifier)。

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots,P,Q,\cdots$ 表示命题，如 P：今天下雨。

命题标识符依据表示命题的情况，分为命题常元和命题变元。一个表示确定命题的标识符称为命题常元(或命题常项)(Propositional Constant)；没有指定具体内容的命题标识符称为命题变元(或命题变项)(Propositional Variable)。命题变元的真值情况不确定，因而命题变元不是命题。只有给命题变元 P 一具体的命题取代时，P 有了确定的真值，P 才成为命题。

习题 1.1

1. 判断下列语句是否为命题，若是，指出其真值。

(1) 外面下雨吗?

(2) 7 能被 2 整除。

(3) $2x+3<4$。

(4) 请关上门。

(5) 小红在教室里。

2. 指出下列命题是原子命题还是复合命题。

(1) 小李一边看书，一边听音乐。

(2) 北京不是中国的首都。

(3) 大雁北回，春天来了。

(4) 不是东风压倒西风，就是西风压倒东风。

(5) 张三与李四在吵架。

1.2 逻辑联结词

本节主要介绍 5 种常用的逻辑联结词(Logical connectives)，分别是“非”(否定联结词)、“与”(合取联结词)、“或”(析取联结词)、“若…则…”(条件联结词)、“…当且仅

当…”（双条件联结词），通过这些联结词可以把多个原子命题复合成一个复合命题。

下面分别给出各自的符号形式及真值情况。

1.2.1 否定联结词

定义 1.2.1 设 P 为一命题，P 的否定（Negation）是一个新的命题，记为 $\neg P$（读作非 P）。规定若 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F；若 P 为 F，则 $\neg P$ 为 T。

$\neg P$ 的取值情况依赖于 P 的取值情况，真值情况见表 1-1。

表 1-1 联结词“¬”的定义

P	$\neg P$
1	0
0	1

在自然语言中，常用“非”、“不”、“没有”、“无”、“并非”等来表示否定。

例 1.2.1 P：上海是中国的城市。$\neg P$：上海不是中国的城市。

P 是真命题，$\neg P$ 是假命题。

Q：所有的海洋动物都是哺乳动物。$\neg Q$：不是所有的海洋动物都是哺乳动物。Q 为假命题，$\neg Q$ 为真命题。

1.2.2 合取联结词

定义 1.2.2 设 P、Q 为两个命题，P 和 Q 的合取（Conjunction）是一个复合命题，记为 $P \wedge Q$（读作 P 与 Q），称为 P 与 Q 的合取式。规定 P 与 Q 同时为 T 时，$P \wedge Q$ 为 T，其余情况下，$P \wedge Q$ 均为 F。

联结词“∧”的定义见表 1-2。

显然 $P \wedge \neg P$ 的真值永远是假，称之为矛盾式。

表 1-2 联结词“∧”的定义

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

在自然语言中，常用“既…又…”、“不但…而且…”、“虽然…但是…”、“一边…一边…”等表示合取。

例 1.2.2 （1）今天下雨又刮风。

设 P：今天下雨。Q：今天刮风。则（1）可表示为 $P \wedge Q$

（2）猫吃鱼且太阳从西方升起。

设 P：猫吃鱼。Q：太阳从西方升起。则（2）可表示为 $P \wedge Q$

（3）张三虽然聪明但不用功。

设 P：张三聪明。Q：张三用功。则（3）可表示为 $P \wedge \neg Q$

需要注意的是，在自然语言中，命题（2）是没有实际意义的，因为 P 与 Q 两个命题是互不相干的，但在数理逻辑中是允许的，数理逻辑中只关注复合命题的真值情况，并不关心原子命题之间是否存在着内在联系。

1.2.3 析取联结词

定义 1.2.3 设 P、Q 为两个命题，P 和 Q 的析取（Disjunction）是一个复合命题，记为 $P \vee Q$（读作 P 或 Q），称为 P 与 Q 的析取式。规定当且仅当 P 与 Q 同时为 F 时，$P \vee Q$ 为 F，否则 $P \vee Q$ 均为 T。

析取联结词“$\vee$”的定义见表1-3。

显然 $P\vee\neg P$ 的真值永远为真，称之为永真式。

析取联结词“$\vee$”与汉语中的“或”二者表达的意义不完全相同，汉语中的“或”可表达“排斥或”，也可以表达“可兼或”，而从析取联结词的定义可看出，“$\vee$”允许 P、Q 同时为真，因而析取联结词“$\vee$”是可兼或。对于“排斥或”将在1.6节中论述。

例1.2.3 （1）小王爱打球或跑步。

（2）他身高1.8m或1.85m。

（1）为可兼或，（2）为排斥或。

设 P：小王爱打球。Q：小王爱跑步。则(1)可表示为 $P\vee Q$

设 P：他身高1.8m。Q：他身高1.85m。则(2)可表示为 $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

1.2.4 条件联结词

定义1.2.4 设 P、Q 为两个命题，P 和 Q 的条件(Conditional)命题是一个复合命题，记为 $P\to Q$(读作若 P 则 Q)，其中 P 称为条件的前件，Q 称为条件的后件。规定当且仅当前件 P 为T，后件 Q 为F时，$P\to Q$ 为F，否则 $P\to Q$ 均为T。

条件联结词“$\to$”的定义见表1-4。

表1-3 联结词“$\vee$”的定义

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表1-4 联结词“$\to$”的定义

P	Q	$P\to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

在自然语言中，常会出现的语句如“只要 P 就 Q”、“因为 P 所以 Q”、“P 仅当 Q”、“只有 Q 才 P”、“除非 Q 才 P”等都可以表示为“$P\to Q$”的形式。

例1.2.4 （1）如果雪是黑色的，则太阳从西方升起。

（2）仅当天气好，我才去公园。

对于(1)，设 P：雪是黑色的。Q：太阳从西方升起。则(1)可表示为 $P\to Q$

（2）设 R：天气好。S：我去公园。则(2)可表示为 $S\to R$

1.2.5 双条件联结词

定义1.2.5 设 P、Q 为两个命题，其复合命题 $P\leftrightarrow Q$ 称为双条件(Biconditional)命题，$P\leftrightarrow Q$ 读作 P 当且仅当 Q。规定当且仅当 P 与 Q 真值相同时，$P\leftrightarrow Q$ 为T，否则 $P\leftrightarrow Q$ 均为F。

双条件联结词“$\leftrightarrow$”的定义见表1-5。

例1.2.5 （1）雪是黑色的当且仅当 $2+2>4$。

（2）燕子北回，春天来了。

（1）设 P：雪是黑色的。Q：$2+2>4$。则(1)可表示为 $P\leftrightarrow Q$，其真值为T。

（2）设 R：燕子北回。S：春天来了。则(2)可表示为 $R\leftrightarrow S$，其真值为T。

与前面的联结词一样，条件联结词和双条件联结词连接的两个命题之间可以没有任何的

因果联系，只要能确定复合命题的真值即可。

表 1-5 联结词“↔”的定义

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1

习题 1.2

1. 指出下列命题的真值：
(1) 若 $2+2>4$，则太阳从西方升起。
(2) 若 $a\in\varnothing$，则 $a\in A$。
(3) 胎生动物当且仅当是哺乳动物。
(4) 指南针永指北方，除非它旁边有磁铁。
(5) 除非 ABCD 是平行四边形，否则它的对边不都平行。
2. 令 P：天气好。Q：我去公园。请将下列命题符号化。
(1) 如果天气好，我就去公园。
(2) 只要天气好，我就去公园。
(3) 只有天气好，我才去公园。
(4) 我去公园，仅当天气好。
(5) 或者天气好，或者我去公园。
(6) 天气好，我去公园。

1.3 命题公式与翻译

1.3.1 命题公式

上一节介绍了 5 种常用的逻辑联结词，利用这些逻辑联结词可将具体的命题表示成符号化的形式。对于较为复杂的命题，需要由这 5 种逻辑联结词经过各种相互组合以得到其符号化的形式，那么怎样的组合形式才是正确的、符合逻辑的表示形式呢？

定义 1.3.1 (1) 单个的命题变元是命题公式。

(2) 如果 A 是命题公式，那么 $\neg A$ 也是命题公式。

(3) 如果 A、B 是命题公式，那么 $(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$ 和 $(A\leftrightarrow B)$ 也是命题公式。

(4) 当且仅当能够有限次地应用(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是命题公式(又称为合式公式,或简称为公式)。

上述定义是以递归的形式给出的，其中(1)称为基础，(2)、(3)称为归纳，(4)称为界限。

由定义知，命题公式是没有真假的，仅当一个命题公式中的命题变元被赋以确定的命题时，才得到一个命题。例如在公式 $P\rightarrow Q$ 中，把命题“雪是白色的。”赋给 P，把命题“$2+2>4$。”赋给 Q，则公式 $P\rightarrow Q$ 被解释为假命题；但若 P 的赋值不变，而把命题“$2+2=4$。”赋给 Q，则公式 $P\rightarrow Q$ 被解释为真命题。

定义中的符号 A、B 不同于具体公式里的 P、Q、R 等符号，它可以用来表示任意的命题公式。

例 1.3.1　$\neg(P \wedge Q)$，$(P \rightarrow (Q \wedge R))$，$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R))$等都是命题公式，而$P \rightarrow (\wedge Q)$，$(P \rightarrow Q, (P \rightarrow Q) \rightarrow R)$等都不是命题公式。

为了减少命题公式中使用括号的数量，规定：①逻辑联结词的优先级别由高到低依次为$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$；②具有相同级别的联结词，按出现的先后次序进行计算，括号可以省略；③命题公式的最外层括号可以省去。

例 1.3.2　$(P \wedge Q) \rightarrow R$ 也可以写成 $P \wedge Q \rightarrow R$，$(P \vee Q) \vee R$ 也可写成 $P \vee Q \vee R$，$((P \leftrightarrow Q) \rightarrow R)$也可写成$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow R$，而 $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$中的括号不能省去。

定义 1.3.2　设 P 是命题公式 Q 的一部分，且 P 也是命题公式，则称 P 为 Q 的子公式。

例如，$P \wedge Q$ 及 R 都是公式 $P \wedge Q \rightarrow R$ 的子公式；$\neg P$、$\neg P \vee Q$ 及 $P \rightarrow R$ 都是公式$(\neg P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R)$的子公式。

1.3.2　命题的符号化

有了命题公式的概念之后，就可以把自然语言中的一些命题翻译成命题逻辑中的符号化形式。把一个文字描述的命题相应地写成由命题标识符、逻辑联结词和圆括号表示的命题形式称为命题的符号化或翻译。

命题符号化的一般步骤：①明确给定命题的含义；②找出命题中的各原子命题，分别符号化；③使用合适的逻辑联结词，将原子命题分别连接起来，组成复合命题的符号化形式。

把命题符号化，是不管具体内容而突出思维形式的一种方法。注意在命题符号化时，要正确地分析和理解自然语言命题，不能仅凭文字的字面意思进行翻译。

例 1.3.3　张三或李四都可以做这件事。

设 P：张三可以做这件事。Q：李四可以做这件事。

则命题符号化为：$P \wedge Q$，而不是 $P \vee Q$。

例 1.3.4　(1) 只有你走，我才留下。

这个命题的意义也可以理解为：如果我留下了，那么你一定走了。

设 P：你走。Q：我留下。则命题符号化为：$Q \rightarrow P$。

与原命题类似的命题如：仅当你走我才留下。我留下仅当你走。当我留下你得走。

注意：在一般的命题表述中，“仅当”是必要条件，译成条件命题时其后的命题是后件，而“当”是充分条件，译成条件命题时其后的命题是前件。

(2) 仅当天不下雨且我有时间，我才上街。

设 P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。命题符号化为：$R \rightarrow (\neg P \wedge Q)$。

(3) 你将失败，除非你努力。

这个命题的意义可以理解为：如果你不努力，那么你将失败。

设 P：你努力。Q：你失败。则命题符号化为：$\neg P \rightarrow Q$。

含有“除非”的命题，“非…”是充分条件，译成条件命题时，“非…”是条件的前件。

(4) A 中没有元素，A 就是空集。

设 P：A 中有元素。Q：A 是空集。则命题符号化为：$\neg P \leftrightarrow Q$

(5) 张三与李四是表兄弟。

此命题是一个原子命题，“…与…是表兄弟。”表示两个对象之间的关系。“张三是表兄弟。”及“李四是表兄弟。”都不是命题。所以上述命题只能符号化为 P 的形式。其中 P:

张三与李四是表兄弟。

例 1.3.5 将下列命题符号化：

（1）如果明天早上下雨或下雪，则我不去学校。

（2）如果明天早上不下雨且不下雪，则我去学校。

（3）如果明天早上不是雨夹雪，则我去学校。

（4）当且仅当明天早上不下雨且不下雪时，我才去学校。

设 P：明天早上下雨。Q：明天早上下雪。R：我去学校。

（1）符号化为：$(P \vee Q) \rightarrow \neg R$。

（2）符号化为：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。

（3）符号化为：$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$。

（4）符号化为：$\neg P \wedge \neg Q \leftrightarrow R$。

例 1.3.6 将下列命题符号化。

（1）如果小王和小张都不去，则小李去。

（2）如果小王和小张不都去，则小李去。

设 P：小王去。Q：小张去。R：小李去。

（1）符号化为：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$。

（2）符号化为：$\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$ 或 $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow R$。

例 1.3.7 将下列命题符号化：

（1）说离散数学无用且枯躁无味是不对的。

（2）若天不下雨，我就上街；否则在家。

对于(1)，设 P：离散数学是有用的。Q：离散数学是枯燥无味的。则命题符号化为：$\neg(\neg P \wedge Q)$。

对于(2)，设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。则命题符号化为

$$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

通过上述的例题可以看出，要正确地将自然语言中的联结词翻译成恰当的逻辑联结词，必须要正确地理解各原子命题之间的关系。

习题 1.3

1. 判断下列各式子是否是命题公式：

（1）$P \rightarrow (Q \wedge R)$。

（2）$(P \leftrightarrow (Q \rightarrow R))$。

（3）$(P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow R))$。

（4）$PQ \rightarrow T$。

（5）$((R \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow Q))$。

（6）$(P \vee QR) \rightarrow S$。

2. 将下列命题符号化(句中括号内提示的是相应的原子命题的符号表示)：

（1）我去新华书店(P)，仅当我有时间(Q)。

（2）我们不能既划船(P)又跑步(Q)。

（3）只要努力学习(P)，成绩就会好的(Q)。

（4）或者你没有给我写信(P)，或者它在路上丢了(Q)。

(5) 如果上午不下雨(P)，我就去看电影(Q)，否则我就在家里读书(R)或看报纸(S)。
(6) 我今天进城(P)，除非下雨(Q)。
(7) 如果太阳没出来(P)，则或者下雨(Q)或者阴天(R)而且温度下降(S)。
(8) 指南针永指南北(P)，除非它旁边有磁铁(Q)。
(9) 说逻辑枯燥无味(P)和毫无价值(Q)是不对的。
(10) 人不犯我(P)，我不犯人(Q)；人若犯我，我必犯人。

1.4 真值表与等价公式

1.4.1 真值表

定义 1.4.1 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在命题公式 A 中的全部命题变元，给 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 各指定一个真值，称为对公式 A 的一个赋值(或解释或真值指派)。

若指定的一组值使公式 A 的真值为 1，则这组值称为公式 A 的成真赋值。

若指定的一组值使公式 A 的真值为 0，则这组值称为公式 A 的成假赋值。

例如，对公式$(P\to Q)\wedge R$，赋值 011(即令 $P=0,Q=1,R=1$)，则可得到公式的真值为 1；若赋值 000，则公式真值为 0。因此，011 为公式的一个成真赋值；000 为公式的一个成假赋值。除了上述的两种赋值外，公式的赋值还有 000,001,…。一般的在含有 n 个命题变元的命题公式中，共有 2^n 种赋值。

定义 1.4.2 将命题公式 A 在所有赋值下的取值情况列成表，称为公式 A 的真值表(Truth Table)。

构造真值表的基本步骤：

(1) 找出公式中所有的命题变元 P_1，P_2，…，P_n，按二进制从小到大的顺序列出 2^n 种赋值。

(2) 当公式较为复杂时，按照运算的顺序列出各个子公式的真值。

(3) 计算整个命题公式的真值。

例 1.4.1 写出下列公式的真值表，并求其成真赋值和成假赋值。

(1) $\neg P\vee Q$。

(2) $\neg(P\to Q)\wedge Q$。

(3) $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$。

解 (1) 的真值表见表 1-6。

表 1-6 $\neg P\vee Q$ 的真值表

P Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$
0 0	1	1
0 1	1	1
1 0	0	0
1 1	0	1

成真赋值为 00、01、11，成假赋值为 10。

(2) 的真值表见表 1-7。

表 1-7 $\neg(P\to Q)\wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P\to Q$	$\neg(P\to Q)$	$\neg(P\to Q)\wedge Q$	P	Q	$P\to Q$	$\neg(P\to Q)$	$\neg(P\to Q)\wedge Q$
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0

无成真赋值，成假赋值为 00、01、10、11。

（3）的真值表见表 1-8。

表 1-8　$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$ 的真值表

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

成真赋值为 00、01、10、11，无成假赋值。

1.4.2 等价公式

定义 1.4.3　给定两个命题公式 A、B，设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在命题公式 A、B 中的全部命题变元，若给 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 任一组赋值，公式 A 和 B 的真值都对应相同，则称公式 A 与 B 等价或逻辑相等(Equivalence)，记作 $A\Leftrightarrow B$。

需要注意的是，“$\Leftrightarrow$”不是逻辑联结词，因而“$A\Leftrightarrow B$”不是命题公式，只是表示两个命题公式之间的一种等价关系，即若 $A\Leftrightarrow B$，A 和 B 没有本质上的区别，最多只是 A 和 B 具有不同的形式而已。

“$\Leftrightarrow$”具有如下的性质：①自反性：$A\Leftrightarrow A$；②对称性：若 $A\Leftrightarrow B$，则 $B\Leftrightarrow A$；③传递性：若 $A\Leftrightarrow B$，$B\Leftrightarrow C$，则 $A\Leftrightarrow C$。

给定 n 个命题变元，根据公式的形成规则，可以形成许多个形式各异的公式，但是有很多形式不同的公式具有相同的真值表。因此引入公式等价的概念，其目的就是将复杂的公式简化。

下面介绍两种证明公式等价的方法。

1. 真值表法

由公式等价的定义可知，利用真值表可以判断任何两个公式是否等价。

例 1.4.2　证明 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)$。

证明　命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与 $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$ 的真值表见表 1-9。

由表 1-9 可知，在任意赋值下 $P\leftrightarrow Q$ 与 $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$ 两者的真值均对应相同。因此 $P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)$

表 1-9　$P\leftrightarrow Q$ 与 $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$ 的真值表

P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$	$P\leftrightarrow Q$	P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1

例 1.4.3　判断公式 $P\to Q$ 与 $\neg P\to\neg Q$ 二者是否等价。

证明　公式 $P\to Q$ 与 $\neg P\to\neg Q$ 的真值表见表 1-10。

可见真值表中的最后两列值不完全相同，因此公式 $P\to Q$ 与 $\neg P\to\neg Q$ 不等价。

从理论上来讲，利用真值表法可以判断任何两个命题公式是否等价，但是真值表法并不是一个非常好的方法，因为当公式中命题变元较多时，其计算量较大，例如当公式中有 4 个变元时，