普通高等教育"十一五"规划教材

大学数学全程解决方案系列

数学建模

陈东彦　李冬梅　王树忠　编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材
大学数学全程解决方案系列

数学建模

陈东彦　李冬梅　王树忠　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书包括数学建模概述、初等方法建模、微分方程方法建模、差分方程方法建模、概率方法建模、数学规划方法建模、微分方程稳定性方法建模、层次分析方法建模、统计分析方法建模、回归分析方法建模、图与网络方法建模、交通流方法建模、排队论方法建模、模糊数学方法建模、灰色系统方法建模和模拟方法建模等16章内容，并且在前11章的各章均配有相应的数学建模案例，全书各章均配有一定量的习题. 本书建模方法由浅入深，内容丰富，适合课堂教学和竞赛培训.

本书适合数学、应用数学、工程及经济与管理等各专业的本科生和非数学专业的研究生使用，可根据学时数及学生构成情况选择不同部分内容讲授.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/陈东彦，李冬梅，王树忠编著. —北京：科学出版社，2007
(普通高等教育"十一五"规划教材. 大学数学全程解决方案系列)

ISBN 978-7-03-019277-6

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①陈… ②李… ③王… Ⅲ. 数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第184007号

责任编辑：李鹏奇 王 静 杨 然/责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠/封面设计：卢秋红

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年12月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年12月第一次印刷 印张：25 3/4
印数：1—4 000 字数：490 000

定价：36.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

《大学数学全程解决方案系列》编委会

《大学数学全程解决方案系列》序

目前，高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学类公共课的教材版本比较多，其中不乏一些优秀教材，它们在教育部统一的教学规范、教学设计、教学安排等框架内，为全国高等院校师生的教学和学习提供了方方面面的服务. 但从另一方面来说，不同区域的高校在师资力量、教学习惯、教学环境、学生来源、学生层次、学生求学目的等方面都存在着不小的差异，由此造成对教材的需求也存在着一些差异. 在遵照执行教育部对大学数学类公共课教学的统一要求的前提下，我想，这些差异主要来自于对这些统一要求的具体实施和尝试.

为了更好地提高教学效果，充分挖掘区域内的教学资源，增加区域内教师的交流与互动，优化创新和谐的教研氛围，培育更加适应本地区高校的优秀教材，科学出版社在广泛调研的基础上，组织了黑龙江地区高校最优秀、最有经验的教师，拟编写一套集主教材、教辅、课件为一体的立体化教材，并努力争取进入国家级优秀教材的行列. 为此科学出版社、哈尔滨工业大学数学系联合于 2006 年 5 月 27 日在哈尔滨工业大学召开了《大学数学全程解决方案系列》规划教材会议. 在这次会议上，大家推荐我作为这套丛书的编委会主任，盛情难却，我想，若能和大家共同努力，团结协作，认真领会教育部的有关精神，凭借科学出版社的优秀品牌，做出一套大学数学类的优秀教材，也的确是一件有意义的事情.

为此，我们编委会成员就这套教材作了几次讨论和交流，希望在以下方面有所突破：

在教学内容上，有较大创新，紧跟时代步伐，从知识点讲述，到例题、习题，都要体现时代的特色.

在教学方法上，充分体现各学校的优秀教学成果，集中黑龙江地区优秀的教学资源，力求代表最好的教学水平.

在教学手段上，充分发挥先进的教学理念，运用先进的教学工具，开发立体化的教学产品.

在教材设计上，节约课时，事半功倍（比如在教材上给学生预留较大的自主空间，让有进一步学习愿望的学生能够自主学习；开发的课件让老师节约课时，精心设计的练习册，让老师节约更多的检查作业的时间）.

在教学效果上，满足对高等数学有不同要求的教师、学生，让教师好用，让学生适用.

如今，这套丛书终于要面世了，今年秋季有《微积分（经管类）》、《线性代数（经

管类)》、《线性代数(理工类多学时)》、《线性代数(理工类少学时)》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等教材陆续出版.但我想,尽管我们的初衷是美好的,教材中必定还会存在这样那样的问题,敬请各位读者、专家批评指正.

感谢哈尔滨工程大学、哈尔滨理工大学、黑龙江大学、哈尔滨师范大学、哈尔滨商业大学、黑龙江工程学院、黑龙江科技学院、哈尔滨医科大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、绥化学院、黑龙江农垦职业学院、黑龙江建筑职业技术学院、黑龙江农业工程职业学院等兄弟院校领导的支持,科学出版社高等教育出版中心,哈尔滨工业大学理学院、数学系的领导与老师为这套丛书的出版也付出了努力,在此一并致谢.

王　勇

2007 年 7 月于哈尔滨工业大学

前　言

从20世纪80年代初开始，数学建模课程已经逐渐进入我国大学课堂.现已有数百所院校开设了形式多样的数学建模类课程，20多年来数十本教材也已出版.1992年开始举办并迅速发展的全国大学生数学建模竞赛，更是极大地推动了数学建模教学及其课外活动在各个院校的开展.作为培养大学生创新能力最有效的手段之一，与数学建模相关的教学活动已被教学管理部门、学校、学生及社会多方广泛承认.参加数学建模竞赛并取得好成绩也已成为一些学生求学、求职成功的重要经历.

教育教学工作必须反映社会发展、适应社会需要.在我国高等教育逐步大众化的新形势下，基础课教学活动必须适应受教育对象的培养定位，融入其整体育人的大目标.从我们国家的教育现状看，可以认为，重点院校仍然承担着精英教育的任务，普通院校则已经变成了大众教育的主战场.教学组织形式相对松散的数学建模教学活动已成为普通院校中培养学生应用创新能力的主要手段之一.新形势下，普通院校的教学工作面临着诸多新问题，大力开展具有针对性的教学活动十分必要.为此，我们在总结多年从事数学建模教学与指导数学建模竞赛经验的基础上，顾及大众教育阶段普通院校教学的新情况，编写了这本《数学建模》教材，旨在通过本教材，使学生了解如何应用数学的最基础的思想和方法解决一些实际问题，重在介绍数学建模方法及数学模型的建立过程，不在模型求解环节上展开.

本教材的第1章概述了数学建模；第2～6章主要讲解初等方法、微分方程方法、差分方程方法、概率方法和数学规划方法等与大学工科教学课程密切相关的数学建模方法；第7～11章主要讲解微分方程稳定性方法、层次分析方法、统计分析方法、回归分析方法以及图与网络方法等需要一些专门知识的数学建模方法；第12～16章主要讲解交通流方法、排队论方法、模糊数学方法、灰色系统方法和模拟方法等近年发展起来的数学建模方法.本书在第2～11章各章配有相应的数学建模案例，大多选自历年国内外数学建模竞赛试题，以帮助学生深入学习有关建模方法在解决实际问题中的综合运用过程.此外，全书各章均配有一定量的习题，对学生基本概念和基本方法的掌握及思维的启发很有帮助.凡具有大学工科数学基础知识及以上者均可使用本教材.

“大学数学全程解决方案系列”编委会对本书的出版给予了大力支持，特别感谢清华大学谢金星教授审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见.这些对本书的顺利出版和质量的提高都大有裨益.本书在编写过程中还得到了哈尔滨理工大学教

务处及应用数学系的多方鼓励与帮助，应用数学系主任计东海教授为本书的编写和出版提供了很多具体的指导，应用数学系青年教师刘凤秋协助编者校对了全部书稿，在此一并表示衷心的感谢.

编者

2006 年 11 月

目　　录

第1章　数学建模概述

随着科学技术对所研究客观对象的日益精确化、定量化和数学化，随着电子计算机技术的广泛应用，及相应数学软件的开发使用，“数学模型”已成为处理科技领域中各种实际问题的重要工具，并在自然科学、工程技术科学与社会科学的各个领域中得到了广泛的应用，诸如经济、管理、工农业，甚至社会学领域等. 什么是数学模型，如何建立数学模型，这是现代科技工作者感兴趣的问题.

1.1　数学的应用与数学建模

从初等数学、高等数学到现代数学，数学作为一门自然科学学科为我们所熟悉、所了解，数学尤其是现代数学中的许多理论分支从来都给人以抽象的印象，似乎是数学研究得越深入离现实生活及实际工作就越遥远. 但是，近半个世纪以来，数学的形象发生了重大的变化，数学已不仅仅是数学家、物理学家等的专利，除了传统的物理学、天文学、力学等学科与数学密不可分之外，在工程技术、社会生活、信息技术等诸多领域，数学发挥着越来越重要的作用，各种途径表明数学正在广泛地应用于各个领域.

在数学应用于各个领域的过程中，数学已经由一门自然科学学科发展成为一门数学技术，在控制科学、信息科学、计算机科学、管理科学等学科中，数学技术的应用必不可少. 同时，一些新的数学分支不断涌现，比如，生物数学、经济数学、金融数学、数理医药学等，又促使数学的应用更深入、更广泛.

纵观数学在各个领域的应用过程，我们不难发现数学的应用主要在于应用数学的思维、数学的方法和数学的成果去解决相关领域中的实际问题，数学的应用过程就是一个发明创造的过程，在这一过程中发明了新思想、新知识、新规律，创造了新理论、新方法、新成果.

计算机技术的发展更为数学的广泛应用创造了条件，尤其是相关数学软件的开发使用，使得很多数学思想、方法能够顺利地实现.

数学是研究数量关系的科学，应用数学知识解决各个领域中的实际问题主要是研究实际问题中的数量关系，而在很多实际问题中各个量之间的关系非常复杂，很难用数量关系将它们联系起来，有时即使找到了数量关系又会由于其太复杂而不能用现有的数学方法进行处理，或者量与量之间就没有明显的数量关系，不能用现有的数学理论、数学公式去套用. 因此，数学在其他领域中的成功应用不仅仅需

要掌握大量的数学知识，还需要对实际问题有充分的了解，并能从众多的事物和复杂的现象中找到共同的本质的东西，抓住问题的本质，然后通过大量的定性和定量分析，寻找并发现量与量之间的数量关系，再用数学的理论与方法加以解决，并最后应用于实际问题.

数学在各个领域中的成功应用，要求我们应具有认知事物能力、抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、数学运算能力、数值计算与数据处理能力和更新数学知识的能力，数学建模正是培养我们具有这些能力的有效过程.

数学建模是指应用数学的方法解决某一实际问题的全过程，这一过程往往包括：对实际问题的较详细的了解、分析和判断，为解决问题所需相关数学方法的选择，针对实际问题的数学描述，数学模型的建立，对数学模型的求解和必要的计算，数学结果在实际问题中的验证，将合理的数学结果应用于实际问题之中，从而解决实际问题.

我们所说的数学模型是实际问题的一种抽象模拟，它用数学符号、数学公式、图表、算法或程序描述现实对象中的数量关系. 一般地说，数学模型可以描述为，对于现实世界中的一个特定对象，为了一个特定的目的，根据其特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构. 也就是说，数学模型是通过抽象、简化的过程，用数学语言对实际对象的一个近似的刻画，以便于人们更深刻地认识所研究的对象.

我们对数学模型并不陌生，比如，物理学中的“万有引力定律”、“能量转换定律”等都是非常典型的数学模型. 再比如，与我们日常生活密切相关的“储蓄问题”、“天气预报”、“疾病诊断”、“人口预测”等活动中也都含有数学模型. 可以说数学模型无处不在.

1.2　数学建模的基本问题

1.2.1　数学建模的方法

数学建模面临的问题是多种多样的，问题中所给出的已知信息也各不相同，有的是一组实测数据或模拟数据，还有的是对问题的定性描述，不同的信息将用不同的方法去处理，从而得到不同的模型. 即使面对相同的已知信息，由于建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同，所以得到的模型也不同. 因此，数学建模的方法及数学模型的分类都只能是从一般意义上区分.

数学建模的方法大致有两类：

1）机理分析的方法. 根据对客观事物特性的认识，分析其因果关系，通过推理分析找出反映事物内部机理的数量规律，建立的模型常常有明确的物理或现实意义. 如，“万有引力定律”、“能量转换定律”.

2）测试分析的方法. 对客观事物的特性不能准确认识，看不清其内部机理，而将客观对象看作一个内部机理无法直接寻求的“黑箱系统”，采用系统辨识的方法，即通过对系统的输入、输出数据的测量和分析，按照一定的准则在某一类模型中找出与数据拟合得最好的模型. 如，“天气预报问题”、“疾病诊断问题”.

在这两类方法中又可根据所应用的数学方法的不同而分为许多具体的方法，如，机理分析方法中有微分方程方法、最优化方法等；测试分析方法中有回归分析方法、方差分析方法等. 而且在实际建模中往往是两类方法的综合运用，即用机理分析方法确定数学模型的结构，再用测试分析的方法确定模型中的参数，比如人口预测模型.

1.2.2 数学建模的基本过程

尽管数学建模方法多种多样，但是针对实际问题，建立数学模型所经历的基本过程大体相同. 一般有如下步骤：

1）建模准备. 了解实际问题的背景（属于哪一个领域），明确数学建模的目的（解决什么问题），收集数学建模的必要信息（相关数据和参考资料），分析研究对象的主要特征（内在机理或输入输出），从而对实际问题有一个比较清晰的了解.

2）模型假设. 根据所研究对象的特征及建模目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，对问题做出合理的简化的假设，假设的合理性主要是指假设要基本符合实际情况，假设的简化性主要是为了能够用数学的语言描述问题. 能否做出合理的简化的假设，取决于对问题的了解是否准确、深入，还取决于是否具有直观判断力、丰富想象力，以及是否具有足够的知识储备.

3）模型建立. 根据所做出的假设，用数学的语言、符号描述出研究对象的内在规律，并建立包含常量、变量等的数学模型，可以是函数表达公式、数学方程、算法或图形等. 建立模型的原则是要尽量用简单的数学工具.

4）模型求解. 采用各种计算方法对所建立的数学模型进行求解，可能是求函数的极值、求方程的解、算法或图形的实现等. 此时可以应用各种计算工具，特别是数学软件和计算机技术.

5）模型分析. 对求解结果进行数学上的分析，如，结果的误差分析（误差是否在允许的范围内）、统计分析（结果是否符合特定的统计规律）、模型对数据的灵敏度分析（模型的结果是否会因数据的微小改变而发生大的变化）、对假设的鲁棒性分析（模型的结果是否对某一假设非常依赖）等.

6）模型检验. 将求解结果和分析结果翻译回到实际问题之中，与实际现象、实际数据进行比较，检验是否与实际吻合. 如果吻合较好，则模型及其结果可以应用于实际问题；如果吻合不好，则需对模型进行修正. 此时问题常常出现在模型假设上，所以应对模型假设进行修正或补充，然后重新建模. 有时，一个好的模型需要

反复修正几次才能得到.

7）模型应用. 当模型经过检验已成为一个具有合理性和实用性的模型后，即可以用来解决实际问题了.

数学模型的建立过程告诉我们，数学模型是对客观对象归纳抽象的产物，它源于客观实际，又高于客观实际. 数学建模的过程就是“实践——理论——实践”的过程. 因此，与其说数学建模是一门技术，不如说数学建模是一门艺术. 它需要熟练的数学技巧、丰富的想象力和敏锐的洞察力，需要大量阅读、思考别人所做的模型，尤其要自己动手、亲身体验.

1.2.3　数学模型的分类

数学建模的方法多种多样，数学模型千差万别，对数学模型的分类也可以有很多不同的角度. 可有以下分类：

1）按模型的应用领域划分. 有人口模型、交通模型、环境模型、资源模型等.

2）按模型的建立方法划分. 有初等模型、数学规划模型、微分方程模型、概率统计模型、网络模型、模糊模型、灰色模型等.

3）按模型中变量特点划分. 有随机模型和确定模型、连续模型和离散模型、线性模型和非线性模型、静态模型和动态模型等.

4）按建模目的划分. 有描述模型、预测模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

1.2.4　怎样学好数学建模

数学建模是应用数学知识解决实际问题的关键环节，是数学和客观对象连接的纽带，学习数学建模就是要培养我们用数学的语言表述实际问题及将数学计算结果回归到实际问题的双向翻译能力、严密的逻辑推理和精确的数学运算能力、熟练运用相关数学软件的能力，这就需要我们具有高度的观察力、丰富的想象力、综合的分析力以及一些灵感和顿悟，需要我们具有自我获取新知识的能力，因此学习数学建模课程在思考方法和思维方式上与学习其他数学课程有很大差别. 另外数学建模常常是以小组为单位的集体活动，因此，培养良好的交流、合作和表达能力也是非常重要的.

为了培养上述能力，我们要做到以下几点.

1. 在数学建模课堂上

认真学习常用的数学建模方法，对各种方法所涉及的问题不能只满足于掌握书中给出的或老师介绍的方法，要多提问题，学会从多个不同的角度去思考问题，想想还有更好的解决方法吗，如果问题中的条件变一下会怎么样，等等. 数学建模

是没有唯一正确的答案的，模型无所谓"对"与"错"，对同一个问题可能会建立多个不同的模型，评价模型好坏的唯一标准是实践的检验，看看模型是否更符合实际情况.

2. 在数学建模课余时间

1) 广泛了解多学科知识，尽量掌握多种数学建模方法，这样面对实际问题你才可能丰富地想象.

2) 注意观察生活中的各种事物，把握事物的内在本质，并用数学的眼光看待身边的事物，培养数学洞察力.

3) 学会类比，做到"由此及彼和由彼及此"，培养发散思维能力. 数学模型是对现实对象的抽象化产物，不为对象所属领域所独有，具有可移植性，一个数学模型经常可以应用于不同领域的多个问题.

4) 培养自学能力，能快速获取新知识，并能学以致用，因为数学建模问题是广泛的，所涉及的知识是相对无限的，我们不可能将所有的知识都储备好再去面对实际问题，常常需要现学现用.

5) 学会从杂乱无章的各种信息中快速收集出有用的信息，学会利用图书馆、网络查找相关资料. 熟练掌握计算机操作，会简单的计算机编程，学会使用常用的数学软件.

6) 学会撰写科技论文，数学建模的全过程及全部求解结果都体现在数学建模论文中，所以应该通过论文，让读者清楚地知道你用了什么方法、解决了什么问题，获得了怎样的结果，结果是否符合客观实际等.

3. 在数学建模集体活动期间

1) 学会与他人交流学习体会、交流对问题的看法，准确表述自己的观点；学会接受别人的意见和建议，及时调整和改进自身的不足；学会配合别人的工作，不能总是以自我为中心.

2) 要有坚忍不拔的刻苦钻研精神和持之以恒的工作态度. 遇到困难既不能回避，也不能丧失信心，应当勇于承担工作和责任，并以自己的精神鼓励同伴.

1.2.5 数学建模竞赛

教育的任务就是要教给学生最基本的知识，特别是要教给学生能使他们在今后的学习和工作中能展现其智慧和能力的思想、方法和顽强的意志力. 因此，教学的内容和教学的方式就变得十分重要了. 数学的思考方式有着根本的重要性. 简言之，数学为组织和构造知识提供方法. 一旦数学用于技术，它就能产生系统的、可再现的并能传授的知识. 分析、设计、建模、模拟和应用便会变成可能的高效的