控制科学与工程研究生系列教材

线性系统理论

史忠科／编著

科学出版社
www.sciencep.com

控制科学与工程研究生系列教材

线性系统理论

史忠科　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

线性系统理论是控制科学与工程、系统科学等领域的一门基础理论课。本书为适应近年来理工科学生的教学需求，详细介绍了线性系统中的状态空间分析和综合方法，简要介绍了矩阵分式及多项式矩阵描述以及对角优势等多变量频域方法。书中注意数学概念和系统概念的结合，考虑了系统概念的应用问题。根据作者的教学体会，对第六章线性反馈系统的状态空间综合部分的描述和分析方法等也做了改进。

本书可作为理工科硕士研究生教材，也可供高年级本科生及科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论／史忠科编著．—北京：科学出版社，2008
(控制科学与工程研究生系列教材)
ISBN 978-7-03-021493-5

Ⅰ．线…　Ⅱ．史…　Ⅲ．线性系统理论-高等学校-教材　Ⅳ．O231.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 041432 号

责任编辑：巴建芬　吴伶伶／责任校对：朱光光
责任印制：张克忠／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 一 版　开本：B5 (720×1000)
2008 年 6 月第一次印刷　印张：20 1/2
印数：1—3 500　字数：390 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

线性系统理论的主要内容是研究系统的运动规律，揭示系统中固有的结构特性，建立系统的结构、参数与性能之间的定性、定量关系，以及为改善系统性能以满足工程指标要求而采取的各类控制器设计方法。线性系统理论的内容极其丰富，研究的方法体系多种多样。基于传递函数的经典线性系统频域理论可成功处理单输入-单输出(SISO)问题，并建立了系统稳定性、快速性、准确性等性能指标体系。为了处理多变量系统问题，人们将其概念推广，将多输入-多输出(MIMO)系统化为一系列的 SISO 系统，建立了多变量线性系统的频域分析和设计方法。状态空间法可以直接处理 SISO 和 MIMO 系统问题，特别是系统状态的能控性、能观测性等概念的引入，标志着线性系统理论的建立。线性系统的几何理论及代数理论也是研究线性系统强有力的工具。

虽然实际系统都含有非线性因素，但是非线性系统理论并不成熟，直接使用现有的非线性分析方法可能使问题非常复杂。虽然系统描述可能更准确，但系统分析和计算的复杂性可能带来的计算误差较大。为此，许多实际系统可用线性系统模型近似描述，加之在数学上处理线性系统又较为方便，于是线性系统理论在系统和控制理论领域中首先得到研究和发展，并成为应用最广、成果最丰的部分。线性系统的概念、原理、方法、结论等已经成为最优控制、最优估计、过程控制、非线性控制、系统辨识、自适应控制、鲁棒控制等许多学科分支的基础。因此，线性系统理论是控制类、系统工程类以及电类、计算机类、机电类等许多学科专业硕士研究生的一门基础理论课，是控制、信息、系统方面系列理论课程的先行课程。

本书为适应近年来理工科学生的教学需求，详细介绍了线性系统中的状态空间分析和综合方法，简要介绍了矩阵分式及多项式矩阵描述以及对角优势等多变量频域方法。书中注意数学概念和系统概念的结合，考虑了系统概念的应用问题。根据作者的教学体会，对第六章线性反馈系统的状态空间综合部分的描述和分析方法等也做了改进。

本书共 8 章。第一章为线性系统的描述方法；第二章为线性系统的运动分析；第三章为线性系统的能控性和能观测性；第四章为传递函数的状态空间实现；第五章为稳定性理论；第六章为线性反馈系统的状态空间综合；第七章为多变量系统的矩阵分式描述和多项式矩阵描述；第八章为多变量系统频域法。

在本书的编写过程中，唐炜、庞瑞、宋蕾、薛洁妮、杨君、王培等对打印稿做了校对，在此表示感谢！

由于作者的水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请读者批评指正。

作　者

2008 年 1 月

目　录

第一章　线性系统的描述方法

系统是泛指一些互相作用的部分构成的整体，它可能是一个反馈控制系统，也可能是某一控制装置或受控对象。工程中的系统，是由一些具有特定功能的组件，为了完成预定的目标，相互联结在一起而成的整体。

若系统受到几个信号同时作用的结果为各个信号单独作用的结果之和，则把具有这样性质的系统称为线性系统。严格而言，实际系统都是非线性系统。幸而大多数系统在具体应用时，在工作点附近往往可以近似地看作线性系统，所以，对线性系统的深入研究仍然是很有意义的。

在系统的分析与综合过程中，第一步工作就是建立系统行为的数学描述，也即建立起系统中各变量间的因果关系和变换关系。它是系统分析与综合的前提条件。由于分析的方法不同或由于解决问题的目的不同，描述系统行为的数学方程也有所不同。同时，系统的相似性使得同一数学描述可以用来表征不同的系统。系统的变量可以分为外部变量和内部变量。以此为基础，在线性系统时域理论中所使用的数学描述也可以分为两大类，即系统的输入-输出描述和系统的状态空间描述。

本章中，我们首先介绍了系统描述中的一些基本概念和性质，并对系统的输入-输出描述进行简要的回顾，然后着重讨论系统的状态空间描述的基本概念、建立方法，以及和系统传递函数描述之间的相互转换，对两种不同描述方法的优缺点进行分析对比。本章是研究采用状态空间法分析、综合线性系统的基础，在后续的章节中，我们将在建立系统状态空间描述的基础之上，就系统分析、综合中的各种问题分别进行研究。

1.1　系统描述中的基本概念

1.1.1　系统数学描述的基本类型

通常假定所研究的系统具有若干输入端和输出端。外部环境对系统的作用称为系统输入，以向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,\cdots,u_p]^{\mathrm{T}}$ 表示，施于输入端；系统对外部环境的作用称为系统输出，以向量 $\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_q]^{\mathrm{T}}$ 表示，可在输出端量测，它们均为系统的外部变量。描述系统内部所处行为状态的变量以向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 表示，它们为内部变量。

系统的数学描述通常也可分为下列两种基本类型。

(1) 系统的外部描述，即输入-输出描述。这种描述将系统看成是一个“黑箱”，只能接触系统的输入端和输出端，不去表示系统内部的结构及变量，只从输入-输出的因果关系中获悉系统特性。若系统是一个单输入-单输出线性定常系统，其外部描述的数学方程就是一个 n 阶微分方程及对应的传递函数。

(2) 系统的内部描述，即状态空间描述。这种描述将系统视为由动力学部件和输出部件组成，将系统的动态过程细化为两个过程：①输入引起内部状态的变化，$(x_1,\cdots,x_n)$和$(u_1,\cdots,u_p)$间的因果关系常用一阶微分方程组或差分方程组表示，称为状态方程；②内部状态和输入一起引起输出的变化，$(y_1,\cdots,y_q)$和$(x_1,\cdots,x_n)$、$(u_1,\cdots,u_p)$间的因果关系是一组代数方程，称为输出方程。

外部描述仅描述系统的终端特性；内部描述则是既描述系统内部特性又描述终端特性。系统的两种基本描述如图 1.1 所示。从以后的研究可以看出，外部描述通常是一种不完全的描述，具有完全不同的内部结构特性的两个系统可能具有相同的外部特性；内部描述是一种完全的描述，能完全表示系统的一切动态特性。仅当系统具有一定属性的条件下，两种描述才具有等价关系。

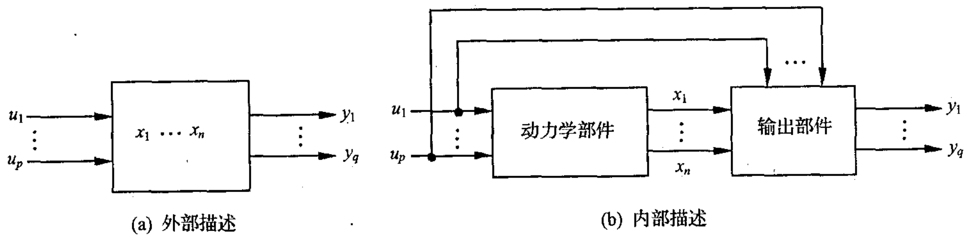

图 1.1 系统的两种基本描述

1.1.2 系统描述中常用的几个基本概念

无论是外部描述还是内部描述，下列概念都是经常用到的，通过对这些概念的学习有助于理解系统性质以及系统分类。

(1) 松弛性。系统在时刻 t_0 称为松弛的，当且仅当输出 $\boldsymbol{y}[t_0,\infty)$ 由输入 $\boldsymbol{u}[t_0,\infty)$唯一确定。从能量的观点看，在时刻 t_0 不存储能量，则称系统在时刻 t_0 是松弛的。$\boldsymbol{u}[t_0,\infty)$表示定义在时间区间$[t_0,\infty)$的输入。

例如，一个 RLC 网络，若所有电容两端的电压和流过电感的电流在 t_0 时刻均为零(即初始条件为零)，则网络称为在 t_0 时刻是松弛的。若网络不是松弛的，其输出响应不仅由 $\boldsymbol{u}[t_0,\infty)$决定，还与初始条件有关。

在松弛假定下，系统的输入-输出描述有

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{u} \tag{1.1}$$

式中，$\boldsymbol{H}$ 是某一算子或函数，如传递函数就是一种算子。

(2) 因果性。若系统在时刻 t 的输出仅取决于时刻 t 及在 t 之前的输入，而与 t 之后的输入无关，则称系统具有因果性。本书所研究的实际物理系统都具有因果性，并称为因果系统。若系统在 t 时刻的输出尚与 t 之后的输入有关，则称该系统不具有因果性，不具有因果性的系统能够预测 t 之后的输入并施加于系统而影响其输出。

(3) 线性。一个松弛系统称为线性的，当且仅当对于任何输入 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$，以及任何实数 α，均有

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_2 \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{H}(\alpha\boldsymbol{u}_1) = \alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_1 \tag{1.3}$$

否则称其为非线性的。式(1.2)称为可加性；式(1.3)称为齐次性。若松弛系统具有这两种特性，则称该系统满足叠加原理。式(1.2)和式(1.3)可合并表示为

$$\boldsymbol{H}(\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2) = \alpha_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}_2 \tag{1.4}$$

线性系统数学方程中的各项，只含变量及各阶导数的一次项，不含变量或其导数的高次项，也不含不同变量的乘积项。

(4) 时不变性(定常性)。一个松弛系统称为时不变的(定常的)，当且仅当对于任何输入 $\boldsymbol{u}$ 和任何实数 α，有

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q}_\alpha\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Q}_\alpha\boldsymbol{H}\boldsymbol{u} \tag{1.5}$$

否则称其为时变的。式(1.5)中 $\boldsymbol{Q}_\alpha$ 称为位移算子，$\boldsymbol{Q}_\alpha\boldsymbol{u}$ 表示对于所有的 t 有

$$\boldsymbol{Q}_\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t-\alpha) \tag{1.6}$$

意为 $\boldsymbol{Q}_\alpha\boldsymbol{u}$ 的波形与延迟 α(s)的 $\boldsymbol{u}(t)$ 的波形完全相同。式(1.5)也可写作

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Q}_\alpha\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Q}_\alpha\boldsymbol{y} \tag{1.7}$$

意为当输入 $\boldsymbol{u}$ 的波形位移 α(s)时，输出 $\boldsymbol{y}$ 的波形也位移 α(s)。

线性时不变(定常)系统数学方程中各项的系数必为常数，只要有一项的系数是时间的函数，则其是时变的。

1.2　系统的传递函数描述法

经典控制理论中的时间域理论对单输入-单输出线性定常系统用高阶微分方程或传递函数来描述输入-输出变量间的因果关系。在讨论线性系统的状态空间描述之前，我们先来介绍一下熟知的传递函数描述。

在介绍描述系统的方法时，我们已经知道传递函数描述就是系统的外部描述，也即输入-输出描述。用它描述系统时，假定对系统结构的内部信息一无所知，能够得到的只是系统的输入信息和输出信息。在这种情况下，对我们来说，系统的内部结构就像一个“黑箱”一样。使用传递函数方法描述系统所用的数学工具主要是

拉普拉斯(Laplace,以下简称拉氏)变换。因此,它主要用于描述线性定常系统。对于单输入-单输出线性定常系统,传递函数是指在初始条件为零的前提下,输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比。

系统传递函数的建立方法通常分为两种情况:一种是通过系统的物理学特性列出微分方程,然后利用拉氏变换求出系统的传递函数;另一种是对系统的内部结构物理学特性一无所知时,通常通过系统的输入-输出数据,采用系统辨识方法来确定系统的微分方程,从而得到系统的传递函数描述。但有关这部分的内容已经超过了本书所讨论的范围。

下面分别就单输入、多输入情况下系统的传递函数描述进行简单回顾。

1.2.1 单输入-单输出系统的传递函数描述

已知由下列常系数微分方程描述的线性定常系统:

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) \\ = & b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

式中,$y(t)$为系统的输出;$u(t)$为系统的输入;$y^{(i)}=\mathrm{d}^i y/\mathrm{d}t^i$;$u^{(j)}=\mathrm{d}^j u/\mathrm{d}t^j$;$m\leqslant n$;$t$表示时间;$a_i(i=0,1,\cdots,n-1)$和$b_j(j=0,1,\cdots,m)$都是实常数。假设$y(t)$以及它的直到$n-1$阶导数和$u(t)$以及它的直到$m-1$阶导数的初始值全为零,并且取$t_0=0$为初始时刻(这并不失一般性),这时,对方程(1.8)两边取拉氏变换,得

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s)$$

或者

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{1.9}$$

式中,$Y(s)$和$U(s)$分别为$y(t)$和$u(t)$的拉氏变换;s为拉氏算子。

令

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{1.10}$$

那么,依定义和式(1.10),称$G(s)$为系统(1.8)的传递函数。如果$m\leqslant n$,则$G(s)$为s的真有理式,这时称系统(1.8)为物理能实现的。今后,我们总是讨论物理能实现的系统。因此,一个系统的传递函数如果是有理分式,它必是真有理分式。

多项式

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

叫做系统(1.8)的特征多项式,代数方程

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

叫做系统(1.8)的特征方程。特征方程的根或者说特征多项式的零点叫做系统(1.8)的极点。多项式

$$b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

的零点叫做系统(1.8)的零点。如果系统(1.8)有相同的零点和极点，则称这个系统可零极点相消。零极点相消后剩下的系统极点和零点分别称为传递函数 $G(s)$ 的极点和零点。如果相消后剩下的系统极点和零点都在复平面的左半开平面内，那么称这个系统是最小相位的。

系统(1.8)的特征多项式的次数称为系统的阶。按照这个定义，系统(1.8)是 n 阶的。一个系统的阶，实际上是指描述其动力学行为所需要的独立变量的最少个数。

用传递函数描述系统(1.8)时，有

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

因此，如果给了一个传递函数，也就相当于确定了一个系统。从系统的这种描述法可知，传递函数的确描述了系统的输入-输出关系，反映了系统的外部信息。因此，从传递函数本身无法了解系统的内部结构，所以两个内部结构完全不同的系统其传递函数可以完全一样。

1.2.2　系统的传递函数矩阵

考察多输入-多输出的线性定常系统，令输入变量组为 $\{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$，输出变量组为 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$，且假设系统的初始条件为零。用 $\hat{y}_i(s)$ 和 $\hat{u}_j(s)$ 分别表示 y_i 和 u_j 的拉氏变换，$g_{ij}(s)$ 表示由系统的第 j 个输入端到第 i 个输出端的传递函数，其中 $i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,r$，那么由系统的线性属性(即满足叠加原理)可以导出

$$\begin{cases} \hat{y}_1(s) = g_{11}(s)\hat{u}_1(s) + g_{12}(s)\hat{u}_2(s) + \cdots + g_{1r}(s)\hat{u}_r(s) \\ \hat{y}_2(s) = g_{21}(s)\hat{u}_1(s) + g_{22}(s)\hat{u}_2(s) + \cdots + g_{2r}(s)\hat{u}_r(s) \\ \qquad \cdots\cdots \\ \hat{y}_m(s) = g_{m1}(s)\hat{u}_1(s) + g_{m2}(s)\hat{u}_2(s) + \cdots + g_{mr}(s)\hat{u}_r(s) \end{cases}$$

其向量方程的形式为

$$\hat{\boldsymbol{y}}(s) = \begin{bmatrix} \hat{y}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{y}_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_r(s) \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}(s)\hat{\boldsymbol{u}}(s)$$

我们称由上式所定义的 $\boldsymbol{G}(s)$ 为系统的传递函数矩阵。容易看出，$\boldsymbol{G}(s)$ 为一个 $m \times r$ 阶的有理分式矩阵。并且，当 $\boldsymbol{G}(s)$ 的元素传递函数 $g_{ij}(s)(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,r)$ 除严格真外，还包含真有理分式时，即它的一个或一些传递函数中分母和分子多项式具有相等的最高次幂时，称 $\boldsymbol{G}(s)$ 为真有理分式矩阵；而当 $\boldsymbol{G}(s)$ 为严格真有理分式时，即 $g_{ij}(s)$ 的分子多项式的最高次幂小于分母多项式的最高次

幂时，称 $\boldsymbol{G}(s)$ 为严格真有理分式矩阵。通常，当且仅当 $\boldsymbol{G}(s)$ 为真的或严格真的时，它才是物理上可以实现的。作为一个判别准则，当且仅当

$$\lim_{s\to\infty}\boldsymbol{G}(s) = 零阵$$

或

$$\lim_{s\to\infty}\boldsymbol{G}(s) = 非零常数矩阵$$

成立时，相应的传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}(s)$ 为严格真有理分式矩阵或真有理分式矩阵。

1.2.3 传递函数描述的局限性

传递函数描述仅表示在初始条件为零的情况下，输入-输出变量的相互关系。对于非零初始条件，这种描述不能应用。更为重要的是，输入-输出描述不能揭示系统的内部行为。例如，图 1.2 给出的系统传递函数为

$$g(s) = \frac{s-1}{s+1}\cdot\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s+1}$$

从输入-输出角度来看，系统是稳定的。很显然，当初始条件不为零时，系统内部变量 x 的运动过程为

$$x(t) = x_0\mathrm{e}^t + \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中，x_0 为 $x(t)$ 在 $t=0$ 时的初值。在系统内部变量 x 的运动过程中具有 e^t 增长项，经过一段时间后，这个系统将达到饱和或失效。因此，系统不能令人满意地工作。若系统的内部结构未知，上述现象在其传递函数中不可能被表现出来。因此，系统的输入-输出描述不足以完全描述出一个系统的运动行为。

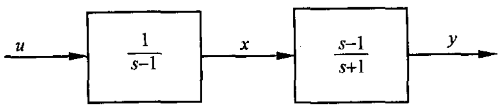

图 1.2

我们再来考虑图 1.3 所示系统。

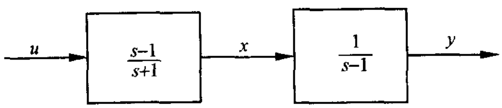

图 1.3

从输入-输出关系来看，图 1.3 和图 1.2 所示系统具有相同的传递函数，但事实上这是两个不同的系统。在以后的系统分析中可以看到，两个系统的确不是等价的：一个是能观不能控的；另一个是能控不能观的。这表明，系统的内部特性比

由传递函数表达的外部特性要复杂得多，输入-输出描述没有包含系统的全部信息，它不能完整地描述一个系统。为此必须探求更完善的系统描述方法，这就是线性系统时域理论中普遍采用的状态空间描述。

1.3　系统的状态空间描述法

从上面的分析中可以看到，传递函数描述一般只是对系统的一种不完全描述，它不能反映"黑箱"内部的某些部分。而状态空间描述则是系统的一种完全描述，它能完全表征系统的一切动力学特性。只有在系统满足一定属性的前提下，这两类描述之间才具有等价的关系。本节主要介绍了系统状态空间描述的基本概念和建立方法。

1.3.1　状态与状态空间的基本概念

系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念基础上的。状态与状态空间概念早在古典力学中就得到广泛应用，当将其引用到系统和控制理论中来，使之适用于描述系统的运动行为时，才使这两个概念具有了一般性的含义。

系统在时间域中的行为或运动信息的集合称为状态。但状态（行为或运动信息）需要变量来表征，故状态变量可简称为状态。

动力学系统的状态定义为：能够唯一地确定系统时间域行为的一组独立（数目最少的）变量。只要给定 t_0 时刻的这组变量和 $t\geqslant t_0$ 的输入，则系统在 $t\geqslant t_0$ 的任意时刻的行为随之完全确定。

众所周知，一个用 n 阶微分方程描述的系统，当 n 个初始条件 $x(t_0),\dot{x}(t_0),\cdots,x^{(n-1)}(t_0)$ 及 $t\geqslant t_0$ 的输入 $u(t)$ 给定时，可唯一确定方程的解，故变量 $x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)$ 是一组状态变量。对确定系统的时域行为来说，一组独立的状态变量既是必要的，也是充分的，独立状态变量的个数即系统微分方程的阶次 n。显然，当状态变量个数小于 n 时，便不能完全确定系统状态，变量个数大于 n 则必有不独立变量，对于确定系统状态是多余的。至于 t_0 时刻的状态，表征了 t_0 以前的系统运动的结果，故常称状态是对系统过去、现在和将来行为的描述，通常取参考时刻 t_0 为零。

状态变量的选择是不唯一的。选择与初始条件对应的变量作为状态变量是一种状态变量的选择方法，但也可以选择另外一组独立变量作为状态变量，特别应优先考虑在物理上可量测的量作为状态变量，如机械系统中的转角、位移以及它们的速度，电路系统中的电感电流、电容器两端电压等，这些可量测的状态变量可用于实现反馈控制以改善系统性能。在理论分析研究中，常选择一些在数学上才有意义的量作为状态变量，它们可能是一些物理量复杂的线性组合，但却可以导出某种