高等学校优秀教材辅导丛书
GAODENG XUEXIAO YOUXIUJIAOCAI FUDAOCONGSHU

- 知识点深入总结
- 各章习题详解详析
- 相关习题课后训练

线性代数
知识要点与习题解析

主编 毋丽华 徐 晶 主审 王 锋

哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等学校优秀教材辅导丛书

线性代数
知识要点与习题解析

（配同济大学第四版教材·高教版）

主　编　母丽华　徐　晶
主　审　王　锋

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书内容主要包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换共六章。每章均由知识要点、书后习题解析、同步训练题及其解答构成。

本书是与同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第四版)教材配套的辅导书,除可供非数学专业的理工科本科生使用外,也可供报考非数学专业硕士研究生的考生复习时使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数知识要点与习题解析/母丽华,徐晶主编.
哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2008.4
ISBN 978-7-81133-287-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①母…②徐… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 048907 号

出版发行	哈尔滨工程大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码	150001
发行电话	0451-82519328
传　　真	0451-82519699
经　　销	新华书店
印　　刷	黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本	787mm×960mm 1/16
印　　张	12.25
字　　数	224 千字
版　　次	2008 年 4 月第 1 版
印　　次	2008 年 4 月第 1 次印刷
定　　价	16.00 元

http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

Preface 前言

线性代数是工科数学的重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。为了帮助广大学生扎实掌握线性代数的基础知识，提高解题能力，我们精心编写了这本书。本书与同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第四版)教材同步。在编写过程中，编者精选同步训练题，归纳每类题的特点，详细介绍解题方法，因此可以说本书是一本简洁、易懂的教学辅导书。

本书共分六章，分别是第1章行列式；第2章矩阵及其运算；第3章矩阵的初等变换与线性方程组；第4章向量组的线性相关性；第5章相似矩阵及二次型；第6章线性空间与线性变换。每章均包括知识要点、书后习题解析、同步训练题三个部分内容。

全书由母丽华、徐晶担任主编，由哈尔滨工程大学理学院王锋担任主审。

由于编者水平所限，本书不足、疏漏之处难免，恳请读者批评指正。

编　者

Contents 目录

第1章 行列式 …… 1
知识要点 …… 1
1.1 n 阶行列式的定义 …… 1
1.2 行列式的性质与计算 …… 2
1.3 拉普拉斯定理 …… 5
1.4 克莱姆法则 …… 6
书后习题解析 …… 7
同步训练题 …… 20
第2章 矩阵及其运算 …… 29
知识要点 …… 29
2.1 矩阵的定义及其运算 …… 29
2.2 矩阵的逆 …… 32
2.3 矩阵的分块法 …… 33
2.4 几类特殊矩阵 …… 34
书后习题解析 …… 36
同步训练题 …… 53
第3章 矩阵的初等变换与线性方程组 …… 60
知识要点 …… 60
3.1 矩阵的初等变换 …… 60
3.2 初等矩阵 …… 61
3.3 矩阵的秩 …… 62
3.4 线性方程组的解 …… 62
书后习题解析 …… 63
同步训练题 …… 79
第4章 向量组的线性相关性 …… 84
知识要点 …… 84
4.1 向量组及其线性组合 …… 84
4.2 向量组的线性相关性 …… 86
4.3 向量组的秩 …… 87

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

4.4 线性方程组解的结构 …… 88
4.5 向量空间的基与维数 …… 90
书后习题解析 …… 91
同步训练题 …… 117
第5章 相似矩阵及二次型 …… 124
知识要点 …… 124
5.1 向量的内积、长度及正交阵 …… 124
5.2 方阵的特征值与特征向量 …… 127
5.3 相似矩阵 …… 128
5.4 对称矩阵的对角化 …… 128
5.5 二次型及其标准形 …… 129
5.6 用配方法化二次型成标准形 …… 131
5.7 正定二次型 …… 131
书后习题解析 …… 132
同步训练题 …… 163
第6章 线性空间与线性变换 …… 169
知识要点 …… 169
6.1 线性空间的定义与性质 …… 169
6.2 基、维数与坐标 …… 170
6.3 基变换与坐标变换 …… 171
6.4 线性变换 …… 172
6.5 线性变换的矩阵表示式 …… 173
书后习题解析 …… 174
同步训练题 …… 182
参考文献 …… 188

第1章 行列式

1.了解行列式的定义和性质;

2.掌握二阶与三阶行列式的计算方法;

3.会计算简单的 n 阶行列式;

4.掌握克莱姆法则.

其中,重点是二阶与三阶行列式的计算法和克莱姆法则;难点是 n 阶行列式的计算.

1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 全排列和逆序

把 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列).

n 个不同元素的所有排列的种数用 P_n 表示.n 元排列的种数有 $P_n = n!$ 个.在 n 元排列中,只有排列 $123\cdots n$ 特殊,它是按数的大小次序,由小到大从前往后排列的,称它为标准次序.其他任何一个 n 元排列都一定出现较小的数 i 排在大数 j 之后的情形,这时称 i 与 j 构成排列的一个逆序.一个排列中所有逆序的总和称为这个排列的逆序数.

计算排列的逆序数的方法:

设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数,设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $p_i(i = 1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i,全体元素的逆序数总和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

称为这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列,逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种做出新排列的过程叫做对换.将相邻两个元素对调,叫做相邻对换.

对换改变排列的奇偶性.奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

1.1.2 n 阶行列式的定义

定义 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

的项,其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数.由于这样的排列共有 $n!$ 个,把这 $n!$ 项的代数和称为 n 阶行列式,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

简记作 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为行列式 D 的元素.

1.2 行列式的性质与计算

1.2.1 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

由此性质可知,行列式中的行与列具有同等的地位.凡是对行成立的行列式的性质对列也同样成立,反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式的值为零.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此

行列式.

推论 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质4 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质5 如果行列式中某列(行)中各元素均为两项之和,即 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$,则行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j}+c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质6 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

性质7 行列式的值等于任一行(列)的所有元素分别与它们所对应的代数余子式的乘积之和.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

$$= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$$

性质8 行列式的任何一行(列)的元素,与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和必为零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

我们可以利用行列式的性质简化行列式的计算.为了以后计算方便,我们引用以下符号:

(1) 以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列;交换 i,j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$;

(2) 第 i 行(或列) 乘以 k,记作 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$);

(3) 第 i 行(或列) 提出公因子 k,记作 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$);

(4) 用 k 乘以第 j 行(或列) 加到第 i 行(或列) 上,记作 $r_i + kr_j$(或 $c_i + kc_j$).

1.2.2 行列式的计算

(1) 用对角线法则计算行列式,它只适用于二阶与三阶行列式.

(2) 用 n 阶行列式的定义计算行列式.显然有:

上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

另外

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1}$$

(3) 利用行列式的性质计算行列式.

(4) 利用行列式按某一行(列) 展开定理计算 n 阶行列式.

(5) 利用数学归纳法计算行列式.

(6) 利用递推公式计算 n 阶行列式.

(7) 利用范德蒙德行列式的结论计算特殊的行列式.

(8) 利用升阶(加边) 法计算 n 阶行列式.

(9) 化三角形法计算 n 阶行列式.

在实际计算中,常常根据行列式的具体特点,采用相应的方法(有时是几种方法结合使用).

1.3 拉普拉斯定理

1.3.1 拉普拉斯展开定理

定理 在 n 阶行列式 D 中,任意取出 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 行,由这 k 行元素所组成的一切 k 级余子式(共有 C_n^k 个,简记为 $t = C_n^k$) 与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t = \sum_{i=1}^{t} M_iA_i$$

1.3.2 利用拉普拉斯展开的两个特殊情形

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

1.4 克莱姆法则

1.4.1 非齐次线性方程组

如果非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式不等于0,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那么,方程组有惟一解.其为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中,$D_j(j = 1,2,\cdots,n)$是把系数行列式D中第j列的元素用方程组右端的自由项代替后所得的n阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

克莱姆法则可叙述为:

(1) 如果非齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$,则此方程组一定有解,且解惟一;

(2) 如果非齐次线性方程组无解或有两个不同的解,则它的系数行列式必为零.

1.4.2 齐次线性方程组

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组只有零解.若系数行列式 $D = 0$,那么方程组有非零解.两个结论反之也成立.

1.利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 (1) $D = 2\times(-4)\times 3 + 1\times 8\times 1 + 0\times(-1)\times(-1)$
$-1\times(-4)\times(-1) - 0\times 1\times 3 - 2\times 8\times(-1) = -4$;

(2) $D = acb + bac + bac - c^3 - b^3 - a^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$;

(3) $D = bc^2 + ab^2 + a^2c - a^2b - b^2c - ac^2 = (a-b)(b-c)(c-a)$;

(4) $D = x(x+y)y + xy(x+y) + (x+y)xy - (x+y)^3 - y^3 - x^3$
$= -2(x^3 + y^3)$.

2.按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数.

(1)1 2 3 4;(2)4 1 3 2;(3)3 4 2 1;(4)2 4 1 3;(5)1 3 … $(2n-1)$2 4 … $(2n)$;(6)1 3 … $(2n-1)(2n)(2n-2)$ … 2.

解 (1) 此排列为标准排列,逆序数为 0;

(2) 此排列4的逆序数为0,1的逆序数为1,3的逆序数为1,2的逆序数为2,所以此排列的逆序数为 $0+1+1+2=4$;

(3) 因为3的逆序数为0,4的逆序数为0,2的逆序数为2,1的逆序数为3,所以此排列的逆序数为 $0+0+2+3=5$;

(4) 因为2的逆序数0,4的逆序数为0,1的逆序数为2,3的逆序数为1,所以此排列的逆序数为 $0+0+2+1=3$;

(5) 因为前 n 个数的逆序数为0,后 n 个数的逆序数分别为 $(n-1),(n-2),\cdots,1,0$,所以此排列的逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$;

(6) 因为前 n 个数的逆序数都为0,后 n 个数的逆序数分别为 $0,2,4,\cdots,(2n-2)$,所以此排列的逆序数为 $0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$.

3.写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 四阶行列式 $D=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中 $j_1j_2j_3j_4$ 是1,2,3,4的一个排列,令 $j_1=1,j_2=3$,则 j_3j_4 分别是2,4的某些排列,于是含 $a_{11}a_{23}$ 的项有两项,分别为 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4.计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xrightarrow[r_3-10r_2]{r_1-4r_2}\begin{vmatrix}0&-7&2&-4\\1&2&0&2\\0&-15&2&-20\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{按第一列展开}}-\begin{vmatrix}-7&2&-4\\-15&2&-20\\1&1&7\end{vmatrix}$

$\xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1}-\begin{vmatrix}-7&9&45\\-15&17&85\\1&0&0\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{按第三行展开}}-\begin{vmatrix}9&45\\17&85\end{vmatrix}$

$\xrightarrow{c_2-5c_1}-\begin{vmatrix}9&0\\17&0\end{vmatrix}=0$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_4} 0$

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{每行提取公因式}} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{每列提取公因式}} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[r_3 + r_1]{r_2 + r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一列展开}} -abcdef \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= 4abcdef$

(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{按第一行展开}} a \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第二项按第一列展开}]{\text{第一项按第一行展开}} ab \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & d \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} = ab(cd + 1) + ad + (cd + 1)$

$= abcd + ab + cd + ad + 1$

5.证明:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a + b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a - b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} ax + by & ay + bz & az + bx \\ ay + bz & az + bx & ax + by \\ az + bx & ax + by & ay + bz \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$

$\cdot(a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n .$

证明 (1) 左边 $\xrightarrow{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}}$ $\begin{vmatrix} a^2 & a(b-a) & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{按第三行展开}}$ $\begin{vmatrix} a(b-a) & (b+a)(b-a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix}$

$\xrightarrow{\text{各行提公因子}}$ $(b-a)^2 \begin{vmatrix} a & a+b \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= (b-a)^2(a-b) = (a-b)^3 =$ 右边

(2) 按行列式性质 左边 $= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ax & ay & az+bx \\ ay & az & ax+by \\ az & ax & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az+bx \\ ay & bx & ax+by \\ az & by & ay+bz \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} by & ay & az+bx \\ bz & az & ax+by \\ bx & ax & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & az+bx \\ bz & bx & ax+by \\ bx & by & ay+bz \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix}$

$$+\begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提取公因子}} a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}+0+0+0+0+0+0$$

$$+b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}=\text{右边}$$

(3) 左边 $\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

$=0=$ 右边

(4) 左边 $\xlongequal[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1\\c_3-c_1}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}}\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列提取公因子}}(b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}(b-a)(c-a)(d-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c-b)(c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac) & (d-b)(d^2+db+b^2+a^2+ab+ad) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac & d^2+db+b^2+a^2+ab+ad \end{vmatrix}$$

高等学校优秀教材辅导丛书 GAODENG XUEXIAO YOUXIUJIAOCAI FUDAOCONGSHU
此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com