场论解题指南

CHANGLUNJIETIZHINAN

邓居智　莫　撼　编著

原子能出版社

东华理工大学核特色系列教材

场论解题指南

邓居智
莫　撼　编著

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

场论解题指南/邓居智,莫撼编著.—北京:原子能出版社,2007.12

ISBN 978-7-5022-4070-7

Ⅰ.场 Ⅱ.①邓… ②莫… Ⅲ.场论-解题 Ⅳ.0412.3-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 200023 号

场论解题指南

出版发行 原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100037)
责任编辑 谭 俊
责任校对 徐淑惠
责任印制 丁怀兰
印　　刷 保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销 全国新华书店
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 11.25
字　　数 281 千字
版　　次 2007 年 12 月第 1 版 2007 年 12 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5022-4070-7
定　　价 **28.00 元**

 网址:http://www.aep.com.cn

总　序

东华理工大学(原华东地质学院)创建于1956年,经过50余年的办学历程,该校形成了以本科教育为主体,以研究生教育为先导,以高职、专科、成人教育为补充的多层次办学格局,发展成为一所以工为主,理工结合,文、管、经、法兼备的多科性普通高等学校。

在光荣而曲折的办学历程中,东华理工大学始终牢记办学使命,形成、保持、发展了鲜明的"东华理工特色":**艰苦奋斗,为国奉献,构建核军工学科群优势**。伴随着祖国核工业前进的步伐,学校自力更生,艰苦奋斗,励精图治,勤俭办学,成为我国核工业开路先锋——核燃料循环工程人才培养的摇篮,为我国国防科技工业和社会经济发展做出了重大贡献。面对新的挑战和机遇,学校紧抓住发展这个第一要务,牢记"两个务必",以邓小平理论和"三个代表"重要思想为指导,与时俱进,开拓创新,以质量求生存,以特色求发展,以社会需求为导向,主动适应高等教育由精英式教育向大众化教育的转变,稳定外延,注重内涵拓展和可持续发展,为早日实现"省内一流,全国知名,部分优势学科进入国际先进行列"而不懈努力。

东华理工大学被联合国国际原子能机构指定为铀矿地质和同位素水文学高级培训中心以及东亚地区同位素水文数据库主办单位,学校的国家级"分析测试研究中心"被国际原子能机构指定为参比实验室。依托"核设施数字工程实验中心"和"地理信息与数字影像技术研究中心"建设的"江西省空间信息与数字国土实验室",于2004年2月被确定为省级重点实验室。2005年,"核资源与环境工程"省、部共建教育部重点实验室又获批准立项建设。

为了系统地总结东华理工大学在核科学技术相关学科教学和科研中积累的知识和经验，更好地培养核科技人才，促进我国核科技事业的发展，我校决定组织出版《东华理工大学核特色系列教材》，并选定《应用水文地球化学》、《水文地球化学》、《场论》、《场论解题指南》、《核辐射测量原理》、《水文地质学》、《环境水文地质学》、《铀矿石的化学分析》、《同位素水文学导论》和《应用地球物理仪器》等10本教材首批出版，今后还将组织撰写更多的特色教材纳入本教材系列。

《东华理工大学核特色系列教材》出版委员会

前　言

场论是工科类勘查技术与工程专业和理科类地球物理学专业的重要基础课，该课程由于理论性强、概念抽象、所需的数学知识较多，给学生学习带来了一定的困难，特别是做习题，往往难以下手。针对这一问题，编写了这本习题集，将作者长期从事场论教学的实践经验和大量解题的熟练技巧总结出来，融注此书。本书试图通过对各种典型习题的分析和求解范例，向学生介绍场论习题的解题思路、方法和技巧，以提高学生的解题能力。

本书是东华理工大学核特色系列教材《场论》(莫撼、邓居智编著，原子能出版社 2006 年 10 月出版)的配套参考书，全书共分 5 章，按教材的顺序安排，内容包括场论的数学基础、引力场、稳定电场、稳定磁场、时变电磁场。全书共选习题 208 道，除包括了教材的全部习题内容外，还有一部分选自国内外优秀教材，具有一定的广度、深度。本书通过对这些题目的解题示例，帮助学生更好地理解场论的基本内容，掌握解题方法与技巧，提高分析问题、解决问题的能力，培养创新思维。

在使用本书时，同学们不要仅仅满足于看懂，对于书中典型题目应当认真演算一遍，并且力争找到不同于本书的解题方法，这样才能对基本概念和方法产生深刻的印象，从而对场论达到融会贯通。

本书由邓居智、莫撼共同编写，全书经莫撼教授修改、定稿后又请刘庆成教授对本书进行了审阅。在编写过程中得到了东华理工大学核特色系列教材出版委员会和江西省“十一五”重点学科“地球探测与信息技术”的大力支持和资助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

2007 年 10 月

目　　录

第一章　场论的数学基础

1. 证明 $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ 相互平行.

证:$\boldsymbol{A}$ 的方向余弦为:$\cos\alpha = \dfrac{A_x}{|A|} = \dfrac{2}{\sqrt{38}}$;$\cos\beta = \dfrac{A_y}{|A|} = \dfrac{5}{\sqrt{38}}$;$\cos\gamma = \dfrac{A_z}{|A|} = \dfrac{3}{\sqrt{38}}$

$\boldsymbol{B}$ 的方向余弦为:$\cos\alpha' = \dfrac{B_x}{|B|} = \dfrac{2}{\sqrt{38}}$;$\cos\beta' = \dfrac{B_y}{|B|} = \dfrac{5}{\sqrt{38}}$;$\cos\gamma' = \dfrac{B_z}{|B|} = \dfrac{3}{\sqrt{38}}$

可见它们方向完全相同,即它们是相互平行的.

2. 试求圆柱螺线 $r = a\cos\theta\, i + a\sin\theta\, j + b\theta k\,(-\infty < \theta < \infty)$ 在 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时的切线方程.

解:其切线方程可表示为:$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial\theta}$,当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时有

$$\boldsymbol{r}_0 = a\boldsymbol{j} + \frac{\pi b}{2}\boldsymbol{k};\ \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial\theta} = -a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{k}$$

于是
$$\boldsymbol{r} = -a\boldsymbol{i} + a\boldsymbol{j} + \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)b\boldsymbol{k}$$

3. 若一质点沿上述圆柱螺线作匀线速运动,求运动质点的速度和加速度.

解:它的速度为 $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$　其中　$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta} = -a\sin\theta\,\boldsymbol{i} + a\cos\theta\,\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$;

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\mathrm{d}s')^2 + (b\mathrm{d}\theta)^2}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(a\mathrm{d}\theta)^2 + (b\mathrm{d}\theta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}};\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$$

式中 $\mathrm{d}s'$ 是 $\mathrm{d}s$ 在 xoy 平面上的投影,于是

$$\boldsymbol{v} = \frac{v(-a\sin\theta\,\boldsymbol{i} + a\cos\theta\,\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k})}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

它的加速度为
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{av^2(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j})}{a^2 + b^2}$$

4. 一质点沿曲线 $\boldsymbol{l} = r(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j})$ 运动,其中 r、φ 都是时间 t 的函数,求:

(1) 速度 $\boldsymbol{v}$ 在矢径方向及与其垂直方向上的投影 v_r 和 v_φ;

(2) 加速度 $\boldsymbol{a}$ 在上述两个方向上的投影 a_r 和 a_φ.

解:$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}) + r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}_0 + r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\varphi_0$

因此:
$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t};\ v_\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

又:
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j}) + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}) +$$
$$(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j})\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}) -$$

$$r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2(\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j})=\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{r}_0+\left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\boldsymbol{\varphi}_0$$

因此
$$a_r=\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2;\ a_\varphi=2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

式中：$\boldsymbol{r}_0=\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+\sin\varphi\,\boldsymbol{j}$；$\boldsymbol{\varphi}_0=-\sin\varphi\,\boldsymbol{i}+\cos\varphi\,\boldsymbol{j}$

5. 已知标量场 $\varphi(m)=\ln r$，其中 r 是空间点 $m(x,y,z)$ 到固定点 $m_0(x_0,y_0,z_0)$ 之距离，求通过坐标原点之等值面方程.

解：由题意知：$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$；于是等值面方程为：$\ln r=c$

而通过坐标原点(0,0,0)的等值面方程为：$\ln\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=c$

于是
$$\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\ln\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$$

整理得
$$x^2+y^2+z^2-2(xx_0+yy_0+zz_0)=0$$

6. 若已知标量场在 M 点对任意两个方向的导数值为：$\frac{\partial\varphi}{\partial S_1}$ 及 $\frac{\partial\varphi}{\partial S_2}$，用作图方法确定该点之梯度值 $\nabla\varphi$.

解：分别作垂直 $\frac{\partial\varphi}{\partial S_1}$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial S_2}$ 的两个平面 S_1 和 S_2. 两平面的相交直线为 PQ(应为无限长直线).

于是 PQ 上任一点 N 至 M 点的距离便为梯度的模($|\nabla\varphi|$)，从 M 指向 N 的矢量方向为该梯度之方向.(见图 1.1)

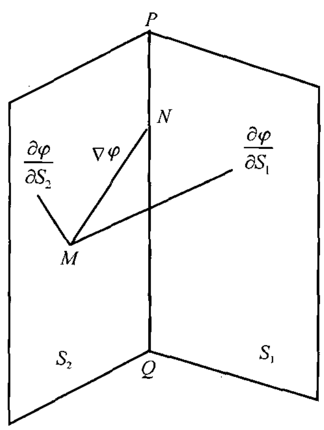

图 1.1

7. 设 $\varphi(M)=2xy-z^2$，求 $\varphi(M)$ 从 $M(2,-1,1)$ 点指向 $N(3,1,-1)$ 点方向的方向导数，在 M 点，沿什么方向的方向导数最大？有多大？

解：$\boldsymbol{MN}$ 的单位矢量为
$$\boldsymbol{l}_0=\frac{(3-2)\boldsymbol{i}+(1+1)\boldsymbol{j}+(-1-1)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(3-2)^2+(1+1)^2+(-1-1)^2}}=\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

M 点的梯度为
$$\nabla\varphi=2y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k}=2(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$$

其方向导数为
$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{l}_0=\frac{2}{3}(-1+4+2)=\frac{10}{3}$$

梯度的单位矢量为$\boldsymbol{n}_0 = \dfrac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} = \dfrac{2(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})}{2\sqrt{6}} = \dfrac{-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}}{\sqrt{6}}$

沿 $\boldsymbol{n}_0$ 方向的方向导数最大，$\boldsymbol{n}_0$与三个坐标轴的夹角分别为

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 114.09°;\beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 35.26°;$$

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 114.09°.$$

其模为：
$$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{6} = 4.9$$

8. 求下列矢量的散度和旋度.

(1) $\boldsymbol{A} = (3x^2y+z)\boldsymbol{i} + (y^3 - xz^2)\boldsymbol{j} + 2xyz\boldsymbol{k}$；

(2) $\boldsymbol{A} = \dfrac{6z-\cos\varphi}{3}\rho_0 + 5z^2\cos^2\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0 - z\rho\sin^2\varphi\,\boldsymbol{z}_0$；

(3) $\boldsymbol{A} = 3r\sin^2\theta\,\boldsymbol{r}_0 + 4r^2\sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{\theta}_0 + 5r^3\sin\theta\cos^2\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0$.

解：(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y+z) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y^3-xz^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(2xyz)$

$$= 6xy + 3y^2 + 2xy = y(8x+3y)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\boldsymbol{k}$$

$$= 4xz\boldsymbol{i} + (1-2yz)\boldsymbol{j} - (z^2+3x^2)\boldsymbol{k}$$

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial}{\rho\partial\rho}(\rho A_\rho) + \dfrac{\partial}{\rho\partial\varphi}(A_\varphi) + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$

$$= \frac{6z-\cos\varphi-30z^2\cos\varphi\sin\varphi-3\rho^2\sin^2\varphi}{3\rho}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left[\frac{\partial A_z}{\rho\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\rho_0 + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_Z}{\partial\rho}\right]\varphi_0 + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{z}_0$$

$$= -2z\cos\varphi(\sin\varphi+5\cos\varphi)\rho_0 + (2+z\sin^2\varphi)\boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{15z^2\cos^2\varphi-\sin\varphi}{3\rho}\boldsymbol{z}_0$$

(3) $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial(r^2A_r)}{r^2\partial r} + \dfrac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{r\sin\theta\,\partial\theta} + \dfrac{\partial A_\varphi}{r\sin\theta\,\partial\varphi}$

$$= 9\sin^2\theta + 8r\cos\theta\cos\varphi - 10r^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\sin\theta A_\varphi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{\theta}_0 + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{\varphi}_0$$

$$= 2r(5r\cos\theta\cos^2\varphi + 2\sin\varphi)\boldsymbol{r}_0 - 20r^2\sin\theta\cos^2\varphi\,\theta_0 + 6\sin\theta(2r\cos\varphi - \cos\theta)\boldsymbol{\varphi}_0$$

9. 已知 $\boldsymbol{F} = (axz+x^2)\boldsymbol{i} + (by+xy^2)\boldsymbol{j} + (z-z^2+cxz-2xyz)\boldsymbol{k}$，当 a,b,c 等于什么值时 $\boldsymbol{F}$ 为无源矢量？

解：令 $\nabla\cdot\boldsymbol{F} = (az+2x) + (b+2xy) + (1-2z+cx-2xy) = 0$

上式整理得 $(2x+cx) + (a-2)z + (b+1) = 0$

上式成立的条件显然是 $a = 2; b = -1; c = -2.$

10. 计算$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$,其中 S 为 xoy 平面上由 $x=0$、$x=a$、$y=0$、$y=b$ 所围成的矩形平面域,$\boldsymbol{A}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2yx\boldsymbol{j}$.

解:
$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 4y\boldsymbol{k}$$

于是
$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_S 4y\mathrm{d}s = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b 4y\mathrm{d}y = 2ab^2$$

11. 沿上题的矩形回路计算$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$.

解:$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L \left[(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}\right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L [(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}] \cdot (\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j})$

$$= \oint_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = \int_0^a x^2\mathrm{d}x + \int_a^0 (x^2-b^2)\mathrm{d}x + \int_0^b 2ay\mathrm{d}y = 2ab^2$$

12. 计算$\oiint_s 3\sin\theta\, \boldsymbol{r}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$,式中,$s$ 是半径为 5,球心在坐标原点的球面.

解法一:因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{r}_0$,所以

$$\oiint_s 3\sin\theta\, \boldsymbol{r}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oiint_s 3\sin\theta\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} 3r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta|_{r=5} = 75\pi^2$$

解法二:$\oiint_s 3\sin\theta\, \boldsymbol{r}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_v \nabla \cdot (3\sin\theta\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}v = \iiint_v \frac{\partial(3r^2\sin\theta)}{r^2\partial r}\mathrm{d}v = \iiint_v \frac{6\sin\theta}{r}\mathrm{d}v$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^5 6r\mathrm{d}r = 75\pi^2$$

13. 计算球坐标系中 $M\left(6,\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 点和 $N\left(4,\frac{\pi}{3},0\right)$ 点的距离.

解:对于 M 点有 $r_1=6,\theta_1=\frac{2\pi}{3},\varphi_1=\frac{2\pi}{3}$;对于 N 点有 $r_2=4,\theta_2=\frac{\pi}{3},\varphi_2=0$.当以球心为直角坐标系的原点时,$M,N$ 两点的直角坐标分别为

$$x_1 = r_1\sin\theta_1\cos\varphi_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$y_1 = r_1\sin\theta_1\sin\varphi_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2};$$

$$z_1 = r_1\cos\theta_1 = 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3;$$

$$x_2 = r_2\sin\theta_2\cos\varphi_2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = 2\sqrt{3};$$

$$y_2 = r_2\sin\theta_2\sin\varphi_2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0 = 0;$$

$$z_2 = r_2\cos\theta_2 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

于是 M,N 两点的距离为：$L=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{82}=9.055$

14. 已知 $\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{i}+(xy)^2\boldsymbol{j}+24(xy)^2z^3\boldsymbol{k}$；求 $\iiint\limits_v \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}v$．式中 v 为中心在直角坐标原点，边长为 1 的立方体.

解：$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=2x+2x^2y+72(xyz)^2$；于是

$$\iiint\limits_v \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}v=2\int_{-0.5}^{0.5}\mathrm{d}x\int_{-0.5}^{0.5}\mathrm{d}y\int_{-0.5}^{0.5}(x+x^2y+36x^2y^2z^2)\mathrm{d}z=\frac{1}{24}$$

15. 已知 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+y^2z\boldsymbol{k}$；求 $\oint\limits_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$. 式中 L 为 xoy 平面上，角点在坐标原点，边长为 2 的正方形边界.（见图 1.2）

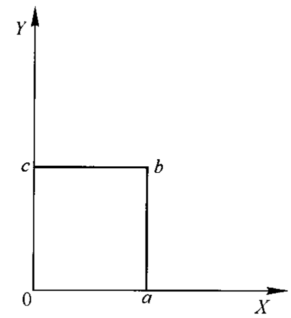

图 1.2

解：$\oint\limits_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_o^a A_x\mathrm{d}x_{|y=0}+\int_a^b A_y\mathrm{d}y_{|x=2}-\int_b^c A_x\mathrm{d}x_{|y=2}-\int_0^c A_y\mathrm{d}y_{|x=0}=8$

本题的另一种解法是 $\oint\limits_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint\limits_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$；其中

$\nabla\times\boldsymbol{A}=2yz\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{k}$；$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}s\boldsymbol{k}$；于是

$$\iint\limits_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint\limits_S(2yz\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{k})\cdot\mathrm{d}s\boldsymbol{k}=\iint\limits_S 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^2 2x\mathrm{d}x=8$$

16. 已知 $\boldsymbol{a}=(2x+z^2)\boldsymbol{i}+zj+(y+2xz)k$，求它的标势.

解：$\nabla\times\boldsymbol{a}=(1-1)\boldsymbol{i}+(2z-2z)j+(0-0)k=0$

故 $\boldsymbol{a}$ 有标势，设为 u，令 $\boldsymbol{a}=\nabla u$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+z^2 \quad \langle 1\rangle$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z \quad \langle 2\rangle$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y+2xz \quad \langle 3\rangle$$

由〈1〉式有

$$u = x^2 + xz^2 + f(y,z) \tag{4}$$

〈4〉式对 y 求导,结合〈2〉式,得 $\quad z = \dfrac{\partial f(y,z)}{\partial y}$

解得:$f(y,z) = yz + f(z)$,代入〈4〉式,于是

$$u = x^2 + xz^2 + yz + f(z) \tag{5}$$

〈5〉式对 z 求导并结合〈3〉式得 $\quad y + 2xz = 2xz + y + \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}$

由此得 $f(z) = c$,于是 $\qquad u = x^2 + xz^2 + yz + c$

17. 若 $\boldsymbol{F} = \nabla u, \nabla \cdot F = -4\pi\rho$;证明 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -4\pi\iiint_\Omega \rho \mathrm{d}\Omega$. 式中,$S$ 是域 Ω 的边界曲面.

证:由高斯公式:$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}\Omega$ 便得

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_\Omega \nabla \cdot F \mathrm{d}\Omega = -4\pi\iiint_\Omega \rho \mathrm{d}\Omega$$

18. 已知 $\boldsymbol{F} = -a\sin\theta\boldsymbol{r}_0 + b\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_0 + c\boldsymbol{\varphi}_0$;求 $\boldsymbol{S} = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\boldsymbol{F} \times \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\theta}\right)\mathrm{d}\theta$;式中 a,b,c 为常数.

解:$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\theta} = -(a\cos\theta\boldsymbol{r}_0 + b\sin\theta\,\boldsymbol{\theta}_0)$;$\boldsymbol{F} \times \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\theta} = bc\sin\theta\boldsymbol{r}_0 - ac\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_0 + ab\boldsymbol{\varphi}_0$;于是

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{F} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\theta})\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(bc\sin\theta\,\boldsymbol{r}_0 - ac\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_0 + ab\boldsymbol{\varphi}_0)\mathrm{d}\theta = ab\pi\boldsymbol{\varphi}_0$$

19. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$;求$\nabla r, \nabla r^n, \nabla f(r)$;其中 n 为正整数.

解:由题意知:$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;$r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$于是

$\nabla r = \dfrac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{r} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{r}_0$;

$\nabla(r^n) = nr^{n-2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = nr^{n-2}\boldsymbol{r} = nr^{n-1}\boldsymbol{r}_0$;

$\nabla f(r) = \dfrac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\nabla r = f'(r)\boldsymbol{r}_0$

式中 $\boldsymbol{r}_0 = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量.

20. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$;$\boldsymbol{c}$ 为常矢量,求:(1) $\nabla \times \boldsymbol{r}$;(2) $\nabla \times [f(r)\boldsymbol{r}]$;(3) $\nabla \times [f(r)\boldsymbol{c}]$;(4) $\nabla \cdot [\boldsymbol{r} \times f(r)\boldsymbol{c}]$.

解:(1) $\nabla \times \boldsymbol{r} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{\partial x}{\partial z} - \dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x} - \dfrac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0$;

(2) $\nabla \times [f(r)\boldsymbol{r}] = f(r)\nabla \times \boldsymbol{r} + \nabla f(r) \times \boldsymbol{r} = f'(r)\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{r} = 0$;

(3) $\nabla \times [f(r)\boldsymbol{c}] = f(r)\nabla \times \boldsymbol{c} + \nabla f(r) \times \boldsymbol{c} = f'(r)\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{c}$;

(4) $\nabla \cdot [\boldsymbol{r} \times f(r)\boldsymbol{c}] = (\nabla \times \boldsymbol{r}) \cdot f(r)\boldsymbol{c} = 0$.〈由 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$〉

21. 证明:$\oint_L u\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \nabla u \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}$;$L$ 为曲面 s 的边界.

证:引入常矢量 $\boldsymbol{c}$,则$\boldsymbol{c} \cdot \oint_L u\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L u\boldsymbol{c} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla \times u\boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_S (\nabla u \times \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$

$$= \boldsymbol{c} \cdot \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla u$$

故得 $$\oint_L u \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla u = -\iint_S \nabla u \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

22. 证明：若仅知矢量 $\boldsymbol{A}$ 的一个旋度，不可能惟一地确定该矢量.

证：设 $\boldsymbol{A}$ 的一个旋度为 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 则令 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\varphi$，$\varphi$ 为任意的标量函数. 于是 $\nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \times (\nabla\varphi) = \boldsymbol{B}$，可见 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 不是惟一对应的，故不能仅由 $\boldsymbol{B}$ 惟一地确定该矢量 $\boldsymbol{A}$.

23. 已知 $r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$，证明 $\ln r$ 为调和函数.

证：令 $u = \ln r$，则若 u 为调和函数，必定满足 $\nabla^2 u = 0$.

(1) 在圆柱坐标系中：$\nabla^2 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial \ln r}{\partial r}\right) = 0$

(2) 在直角坐标系中：
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ln r)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
$$= \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

故 $u = \ln r$ 为调和函数.（本题用圆柱坐标系显然比用直角坐标系简便，因此合理选择坐标系非常重要）.

24. 若 φ 为调和函数，$\boldsymbol{c}$ 为常矢量，$\boldsymbol{b} = -\nabla\varphi$，计算以下各式.

(1) $\nabla \cdot [\varphi\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{b}]$

解：$\nabla \cdot [\varphi\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{b}] = \nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{c}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{b}$

$= \varphi\nabla \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot \nabla\varphi + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\nabla \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})$

$= -\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})(-\nabla^2\varphi) + \boldsymbol{b} \cdot [\boldsymbol{c} \times (\nabla \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{r} \times (\nabla \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{c}]$

由于　$\nabla^2\varphi = 0$；$\nabla \times \boldsymbol{r} = 0$；$\nabla \times \boldsymbol{c} = 0$；$(\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{c} = 0$；$(\boldsymbol{c} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}$

所以　$\nabla(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c}$，于是：$\nabla \cdot [\varphi\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{b}] = -\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$

(2) $\nabla \cdot [\varphi\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}]$

解：$\nabla \cdot [\varphi\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}] = \varphi\nabla \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \nabla\varphi + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\nabla \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot \nabla(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})$

$= -\varphi\nabla^2\varphi - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = c^2 - b^2$

(3) $\nabla \times [\varphi\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{b}]$

解：$\nabla \times [\varphi\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{b}] = (\varphi\nabla \times \boldsymbol{c}) + (\nabla\varphi \times \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\nabla \times \boldsymbol{b} + \nabla(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{b}$

$= -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = 2(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b})$

(4) $\nabla \times [\varphi\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}]$

解：$\nabla \times [\varphi\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}] = \varphi\nabla \times \boldsymbol{b} + \nabla\varphi \times \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\nabla \times \boldsymbol{c} + \nabla(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{c}$

$= -\varphi(\nabla \times \nabla\varphi) - (\nabla\varphi \times \nabla\varphi) + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}) = 0$

25. 证明以下各式.

(1) $\iiint_\Omega \nabla\varphi \mathrm{d}\Omega = \oiint_S \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{s}$

证：引入一常矢量 $\boldsymbol{c}$，则

$$\boldsymbol{c} \cdot \oiint_S \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oiint_S (\varphi\boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_\Omega \nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{c}) \mathrm{d}\Omega = \boldsymbol{c} \cdot \iiint_\Omega \nabla\varphi \mathrm{d}\Omega$$

故得
$$\oiint_S \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_\Omega \nabla \varphi \mathrm{d}\Omega$$

(2) $\iiint_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}\Omega = \oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{a}$

证：引入常矢量 $\boldsymbol{c}$，则

$$\boldsymbol{c} \cdot \oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{a} = \oiint_S \boldsymbol{c} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{a}) = \oiint_S (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_\Omega \nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \mathrm{d}\Omega$$
$$= \iiint_\Omega [\boldsymbol{c} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{c})] \mathrm{d}\Omega = \boldsymbol{c} \cdot \iiint_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}\Omega$$

故得
$$\oiint_S \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{a} = \iiint_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{a}) \mathrm{d}\Omega$$

(3) $\iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla \varphi = \oint_L \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

证：引入常矢量 $\boldsymbol{c}$，则

$$\boldsymbol{c} \cdot \oint_L \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_L (\varphi \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla \times (\varphi \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_S (\varphi \nabla \times \boldsymbol{c} + \nabla \varphi \times \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$
$$= \iint_S (\nabla \varphi \times \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla \varphi) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla \varphi$$

故得
$$\oint_L \varphi \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla \varphi$$

(4) $\iint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla) \times \boldsymbol{a} = \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a}$

证：引入常矢量 $\boldsymbol{c}$，并把 ∇ 视为一个矢量，则

$$\boldsymbol{c} \cdot \oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a} = \oint_L (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$$
$$= \iint_S [(\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla) \times \boldsymbol{a}] \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot \iint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla) \times \boldsymbol{a}$$

故得
$$\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{a} = \iint_S (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \nabla) \times \boldsymbol{a}$$

26. 已知 $a = -r\cos\varphi \boldsymbol{r}_0 + r\sin\varphi \boldsymbol{\varphi}_0 + z\cos\varphi \boldsymbol{z}_0$，证其无源并求其矢势.

解：$\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(-r^2\cos\varphi) + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\varphi) + \dfrac{\partial}{\partial z}(z\cos\varphi)$

$= -2\cos\varphi + \cos\varphi + \cos\varphi = 0$

故 $\boldsymbol{a}$ 为无源矢量，设其矢势为 $\boldsymbol{A}$，令 $\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，则可建立下列方程组

$$\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = -r\cos\varphi \qquad \langle 1 \rangle$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = r\sin\varphi \qquad \langle 2 \rangle$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right) = z\cos\varphi \qquad \langle 3 \rangle$$

令 $A_r = 0$，则由〈2〉式得 $\qquad A_z = -\dfrac{r^2}{2}\sin\varphi + f(\varphi, z) \qquad \langle 4 \rangle$

又由〈3〉式得 $$A_\varphi = \frac{rz}{2}\cos\varphi + q(\varphi, z) \tag{5}$$

令 $q(\varphi,z) = 0$,〈4〉式对 φ 求导,〈5〉式对 z 求导后代入〈1〉式,得

$$-\frac{r}{2}\cos\varphi - \frac{r}{2}\cos\varphi + \frac{\partial f(\varphi,z)}{r\partial\varphi} = -r\cos\varphi$$

解得 $$f(\varphi,z) = f(z)$$

令 $f(z) = 0$,便得 $$\boldsymbol{A} = \frac{r}{2}(z\cos\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0 - r\sin\varphi\,\boldsymbol{z}_0).$$

验证: $$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(-\frac{1}{r}\,\frac{r^2}{2}\cos\varphi - \frac{r}{2}\cos\varphi\right)\boldsymbol{r}_0 + r\sin\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{1}{r}rz\cos\varphi\,\boldsymbol{z}_0$$

$$= -r\cos\varphi\,\boldsymbol{r}_0 + r\sin\varphi\,\boldsymbol{\varphi}_0 + z\cos\varphi\,\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{a}$$

27. 求下列矢量的标势或矢势.

(1) $\boldsymbol{a} = (12xy - yz - 2y)\boldsymbol{i} + (6x^2 - xz - 2x)\boldsymbol{j} + (6z - xy)\boldsymbol{k}$

解:$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = 12y + 6 \neq 0$

$\nabla\times\boldsymbol{a} = (-x+x)\boldsymbol{i} + (-y+y)\boldsymbol{j} + (12x - z - 2 - 12x + z + 2)\boldsymbol{k} = 0$

可见 $\boldsymbol{a}$ 无旋,因此存在标势,设为 u,并令 $\nabla u = \boldsymbol{a}$,可得以下方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12xy - yz - 2y \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 - xz - 2x \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - xy \tag{3}$$

由〈1〉式解得 $$u = 6x^2y - xyz - 2xy + f(y,z) \tag{4}$$

〈4〉式对 y 求导代入〈2〉式得 $$6x^2 - xz - 2x = 6x^2 - xz - 2x + \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$$

解得:$f(y,z) = f(z)$,代回〈4〉式,得

$$u = 6x^2y - xyz - 2xy + f(z) \tag{5}$$

〈5〉式对 z 求导代入〈3〉式得 $6z - xy = -xy + \dfrac{\partial f(z)}{\partial z}$

解得 $$f(z) = 3z^2 + C$$

代回〈5〉式得 $$u = 6x^2y - xyz - 2xy + 3z^2 + C$$

(2) $\boldsymbol{a} = -\dfrac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\boldsymbol{r}_0 + \dfrac{e^z}{r^2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,\boldsymbol{\varphi}_0 + \dfrac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r}\boldsymbol{z}_0$

解:$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{e^z}{r^2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r}$$

$$= \frac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} - \frac{e^z 4\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} + \frac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r} = \frac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r}\left(1 - \frac{3}{r^2}\right) \neq 0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \left[\frac{e^z}{r^2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \frac{e^z}{r^2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\right]\boldsymbol{r}_0 +$$

$$\left[-\frac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{e^z\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\right]\boldsymbol{\varphi}_0 +$$

$$\frac{1}{r}\left[-\frac{e^z(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{r^2} + \frac{e^z(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{r^2}\right]\boldsymbol{z}_0 = 0$$

可见 $\boldsymbol{a}$ 无旋，存在标势，设为 u，令 $\nabla u = \boldsymbol{a}$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{e^z \sin\varphi\cos\varphi}{r^2} \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{e^z}{r^2}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{e^z \sin\varphi\cos\varphi}{r} \tag{3}$$

由〈1〉式得
$$u = \frac{e^z \sin\varphi\cos\varphi}{r} + f(\varphi, z) \tag{4}$$

〈4〉式对 φ 求导，代入〈2〉式得
$$\frac{e^z}{r}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \frac{e^z}{r}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \frac{\partial f(\varphi, z)}{\partial \varphi}$$

解得
$$f(\varphi, z) = f(z)$$

代回〈4〉式，得
$$u = \frac{e^z \sin\varphi\cos\varphi}{r} + f(z) \tag{5}$$

〈5〉式对 z 求导，代入〈3〉式得
$$\frac{e^z \sin\varphi\cos\varphi}{r} = \frac{e^z \sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

解得
$$f(z) = C$$

于是
$$u = \frac{e^z}{r}(\sin\varphi\cos\varphi) + C$$

(3) $\boldsymbol{a} = -\dfrac{2\cos\theta\sin^2\varphi}{r^3}\boldsymbol{r}_0 - \dfrac{\sin\theta\sin^2\varphi}{r^3}\boldsymbol{\theta}_0 + \dfrac{2\cot\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\boldsymbol{\varphi}_0$

解：
$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\cos\theta\sin^2\varphi}{r}\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{r^3}\right) +$$
$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2\cot\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\right) = \frac{2\cos\theta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{r^4\sin^2\theta} \neq 0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a} = \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\theta\sin^2\varphi}{r^3}\right)\right]\frac{\boldsymbol{r}_0}{r\sin\theta} +$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{-2\cos\theta\sin^2\varphi}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\right)\right]\frac{\boldsymbol{\theta}_0}{r\sin\theta} +$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\sin\theta\sin^2\varphi}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2\cos\theta\sin^2\varphi}{r^3}\right)\right]\frac{\boldsymbol{\varphi}_0}{r} = 0$$

可见 $\boldsymbol{a}$ 无旋，存在标势，设为 u，令 $\nabla u = \boldsymbol{a}$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2\cos\theta\sin^2\varphi}{r^3} \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} = -\frac{\sin\theta\sin^2\varphi}{r^3} \tag{2}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \frac{2\cot\theta\sin\varphi\cos\varphi}{r^3} \tag{3}$$

由〈1〉式有
$$u = \frac{\cos\theta\sin^2\varphi}{r^2} + f(\theta, \varphi) \tag{4}$$

〈4〉式对 θ 求导，代入〈2〉式，得
$$-\frac{\sin\theta\sin^2\varphi}{r^2} = -\frac{\sin\theta\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial\theta}$$

解得：$f(\theta, \varphi) = f(\varphi)$，代回〈4〉式，得