新世纪高校经济学·管理学系列教材

XINSHIJIGAOXIAOJINGJIXUE · GUANLIXUEXILIEJIAOCAI

Xianxingdaishu

经济应用数学：线性代数

主　编　姚　立

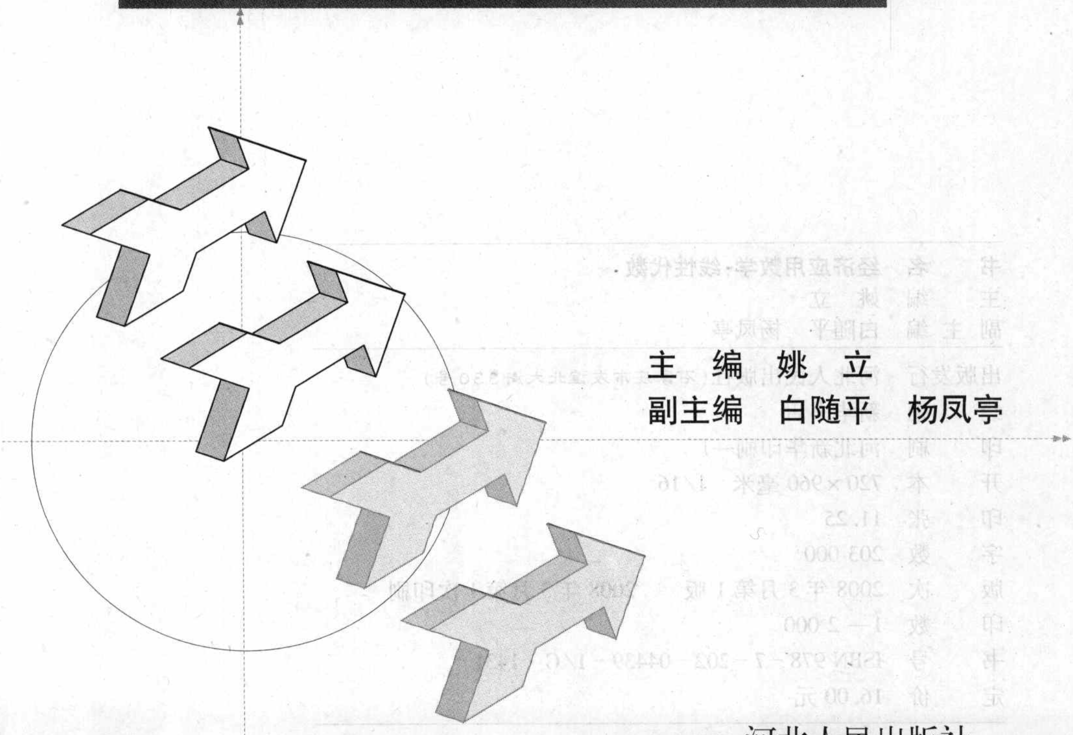
副主编　白随平　杨凤亭

河北人民出版社

新世纪高校经济学·管理学系列教材

XINSHIJIGAOXIAOJINGJIXUE · GUANLIXUEXILIEJIAOCAI

经济应用数学：线性代数



主　编　姚　立

副主编　白随平　杨凤亭

河北人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学．线性代数/姚立主编．—石家庄：河北人民出版社，2008.3
（新世纪高校经济学·管理学系列教材）
ISBN 978-7-202-04439-1

Ⅰ．经…　Ⅱ．姚…　Ⅲ．①经济数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材　Ⅳ．F224.0　0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 123776 号

书　　名	**经济应用数学:线性代数**
主　　编	姚　立
副 主 编	白随平　杨凤亭
出版发行	河北人民出版社(石家庄市友谊北大街330号)
经　　销	新华书店
印　　刷	河北新华印刷一厂
开　　本	720×960 毫米　1/16
印　　张	11.25
字　　数	203 000
版　　次	2008 年 3 月第 1 版　　2008 年 3 月第 1 次印刷
印　　数	1—2 000
书　　号	ISBN 978-7-202-04439-1/G·1431
定　　价	16.00 元

总　序

高校教材是各门科学中人类所取得的既有成果的集中体现，是一门学科教学内容和知识体系的载体，是展开教学的基本依据。所以，教材建设是学科建设的基础工程。在人类已经进入21世纪的背景下，科学技术发展突飞猛进，知识更新速度加快。中国社会主义市场经济体制的确立，中国加入“WTO”所带来的冲击，对中国高校的教育教学改革提出了更高的要求，也对中国高校的教材建设提出了更高的要求。基于发展河北高等教育、推动河北高校教材建设的历史责任感，河北人民出版社组织河北各高校经济学、管理学各学科的学术带头人和教学骨干，共同编写了这套“新世纪高校经济学·管理学系列教材”。参加的院校有河北大学、燕山大学、河北师范大学、河北农业大学、河北经贸大学、石家庄铁道学院、河北科技大学、河北理工大学、石家庄经济学院等。

本套教材第一批以高校经济类、管理类的核心课程为主体，包括《政治经济学（资本主义部分）》、《政治经济学（社会主义部分）》、《微观经济学》、《宏观经济学》、《管理学》、《统计学》、《财政学》、《货币银行学》、《基础会计学》、《国际贸易》、《市场营销学》、《管理信息系统》、《运筹学》等，已于2003年8月出版。

第二批以高校经济类、管理类基础课程为主体，包括《金融市场学》、《产业经济学》、《经济法》、《国家税收》、《财务管理》、《证券投资学》、《国际经济学》、《经济应用数学：概率论与数理统计》、《经济应用数学：微积分》、《数据库原理

及应用》、《风险管理》共计11本，已于2005年9月出版。

第三批有：《职业生涯规划与大学生就业指导》、《税务会计》，于2006年9月出版。

《经济应用数学：线性代数》是第四批中的一本。

本套教材编委会组织编委、各教材主编和部分作者在石家庄多次就本套教材编写的指导思想、编写体例及主编、副主编、作者的入选资格等进行研究，力图从主编负责制、作者筛选、统一编写体例与编写要求等方面，确保本套教材的编写质量，力图使本套教材能充分地体现近年来相关学科科学研究、教学内容和课程体系改革研究的新成果，使之适应新世纪高校厚基础、宽口径、高素质的培养要求。本套教材曾送经济学家、河北大学博士生导师刘永瑞教授等专家审阅，他们都给予高度评价。

本套教材主要是按照高校经济学类、管理学类本科学生的教学要求规划设计的，也可供各类继续教育的教学使用。

新世纪高校经济学·管理学系列教材编委会

2008.2

前　言

本教材是基于发展河北高等教育、推动河北高校教材建设，打造河北精品教材，由河北人民出版社推出的新世纪高校经济学管理学系列教材之一。它与《微积分》、《概率论与数理统计》一起作为经济管理类各专业基础数学课程，它们不仅为经济管理类各专业学习专业课程提供必须的数学知识，而且对培养和提高学生分析和解决问题能力，训练学生严谨的逻辑思维能力至关重要。

受河北人民出版社委托，我们组织河北经贸大学、河北理工大学、河北科技大学、唐山学院等高校具有多年教学经验的教授或副教授参加编写。在编写过程中先是根据教育部关于“21世纪教学内容和课程体系改革总体目标和要求”，对教材体系、内容和教法处理等问题展开深入调查研究，在此基础上参考1990年原国家教委制订的“经济应用数学教学大纲”特别是近年来教育部制订的“经济管理类专业硕士研究生入学考试数学大纲”，结合地方高等教育特点，并广泛征求教师和学生意见制订了编写大纲。

本教材内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换*。涵盖了经济管理类硕士入学考试数学三、四大纲对线性代数要求的全部内容。

教材处理上尽量适应经济管理类专业教学特点，使有关概念、理论与方法易

于学生接受。在不影响线性代数学科系统性、科学性前提下，简化和略去了某些结论冗长的推导而仅给出直观解释。力求概念、理论与方法的表述简单、直观、通俗易懂。

教材中“*”标出的内容为选学内容，可根据课时决定是否讲授。

本书由姚立教授任主编，白随平教授、杨凤亭教授任副主编，其中第一章由岳凤桐编写，第二章由安润秋编写，第三章由魏玉冬编写，第四章由白随平编写，第五章由姚立编写，第六章由杨凤亭编写。全书由姚立、白随平统稿。

由于编者水平有限，本书难免会有欠妥和错误之处，我们衷心希望得到专家、学者和读者的批评指正，使这部教材在教学实践中不断改进完善。

编　者

2008.2

目　录

第一章　行列式……………………………………………………（1）
第一节　二阶与三阶行列式……………………………………（1）
第二节　全排列及其逆序数……………………………………（5）
第三节　n 阶行列式的定义……………………………………（6）
第四节　n 阶行列式的性质……………………………………（9）
第五节　行列式按行（列）展开………………………………（14）
第六节　克莱姆法则……………………………………………（20）
第二章　矩阵及其运算………………………………………（30）
第一节　矩阵……………………………………………………（30）
第二节　矩阵的运算……………………………………………（33）
第三节　逆矩阵…………………………………………………（38）
第四节　矩阵分块法……………………………………………（44）
第三章　矩阵的初等变换与线性方程组……………………（51）
第一节　线性方程组的消元法与矩阵的初等变换……………（51）
第二节　初等矩阵………………………………………………（55）
第三节　矩阵的秩………………………………………………（59）

第四节　线性方程组的解…………………………………………………（63）
第四章　向量组的线性相关性…………………………………………………（71）
第一节　n维向量的概念及其线性运算 ……………………………………（71）
第二节　向量组及其线性组合……………………………………………（73）
第三节　向量组的线性相关性……………………………………………（78）
第四节　向量组的秩………………………………………………………（83）
第五节　线性方程组的解的结构…………………………………………（85）
第六节　向量空间…………………………………………………………（96）
第五章　相似矩阵与二次型……………………………………………………（105）
第一节　向量的内积、长度及正交性……………………………………（105）
第二节　方阵的特征值与特征向量………………………………………（112）
第三节　相似矩阵…………………………………………………………（117）
第四节　对称矩阵的对角化………………………………………………（121）
第五节　二次型及其标准形………………………………………………（126）
第六节　化二次型为标准形的其他方法…………………………………（132）
第七节　正定二次型………………………………………………………（135）
第六章　线性空间与线性变换…………………………………………………（141）
第一节　线性空间的概念…………………………………………………（141）
第二节　维数、基与坐标…………………………………………………（146）
第三节　基变换与坐标变换………………………………………………（149）
第四节　线性变换…………………………………………………………（154）
第五节　线性变换的矩阵表示……………………………………………（156）
习题参考答案……………………………………………………………………（162）

第一章

行　列　式

本章学习目的和要求

通过学习本章内容要了解行列式的概念，掌握行列式的性质，会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

行列式是研究线性方程组的一个重要工具，而线性方程组是线性代数中一个重要组成部分.本章在复习二阶、三阶行列式的基础上，把行列式的概念推广到 n 阶行列式，并介绍 n 阶行列式的性质、计算以及用行列式解线性方程组——克莱姆法则.

第一节　二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

含有两个未知数两个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases}$$

其中 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}、b_1、b_2 是常数，x_1，x_2 是未知数. a_{ij} 表示第 i 个方程第 j 个未知数的系数.

用消元法解此二元线性方程组，可得

$$\begin{cases}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}\end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

其中，分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 由数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{matrix}$$

中的四个数运算而成，称 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式，记为 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$，即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

由此，方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$ 的解为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$$

这里的分母，是方程组未知数的系数按它们在方程中的位置排列构成的行列式，称为方程组的系数行列式. 分子则是常数项 b_1、b_2 分别代替系数行列式中 x_1、x_2 的系数得到的行列式.

如果用 D，D_1，D_2 分别表示 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}$，则方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$ 的解可表示为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$.

可以看到，对于含有两个未知数两个方程的线性方程组的解，用二阶行列式表示既方便又容易记忆.

【例 1.1】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & -5\end{vmatrix}$$

解:$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -5\end{vmatrix}=1\times(-5)-2\times3=-11$

【例 1.2】 解线性方程组

$$\begin{cases}\cos\theta\cdot x_1-\sin\theta\cdot x_2=a\\ \sin\theta\cdot x_1+\cos\theta\cdot x_2=b\end{cases}$$

解:$D=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1\neq0$

而

$$D_1=\begin{vmatrix}a & -\sin\theta\\ b & \cos\theta\end{vmatrix}=a\cos\theta+b\sin\theta$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\cos\theta & a\\ \sin\theta & b\end{vmatrix}=b\cos\theta-a\sin\theta$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=a\cos\theta+b\sin\theta,x_2=\frac{D_2}{D}=b\cos\theta-a\sin\theta$$

二、三阶行列式

将二阶行列式的定义推广,可得三阶行列式.

定义 1.1 设有 9 个数,排成 3 行 3 列的数表,

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}$$

称 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 为三阶行列式,记为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

即 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$,

对角线法则:

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

（次对角线）$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$（主对角线）

其中，主对角线上三个元素的积取正号，次对角线上三个元素的积取负号，将这六项相加便得到该三阶行列式的值（注意这一方法只适用于三阶行列式）.

有了三阶行列式，含有三个未知数三个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的解就可表示为 $x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, x_3=\frac{D_3}{D}$.

这里 D, D_1, D_2, D_3 构成的规律与二阶行列式中 D, D_1, D_2 的构成规律是一样的，即 D 是由方程组未知数 x_1, x_2, x_3 的系数按它们在方程组的位置构成的行列式；D_1, D_2, D_3 是用常数 b_1, b_2, b_3 分别代替 D 中的 x_1, x_1, x_3 的系数得到的行列式.

【例 1.3】 用对角线法则计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$$

解：$D=4\times(-2)\times(-5)+(-3)\times 8\times 1+5\times 3\times(-7)-5\times(-2)\times 1-4\times 8\times(-7)-(-3)\times 3\times(-5)=100$

【例 1.4】 解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3=-2 \\ 2x_1-2x_2+5x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=-10 \end{cases}$$

解：因为 $D=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-56, D_1=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ -10 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-112,$

$$D_2=\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -10 & 2 \end{vmatrix}=168, D_3=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -10 \end{vmatrix}=112$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2, x_2=\frac{D_2}{D}=-3, x_3=\frac{D_3}{D}=-2$$

第二节　全排列及其逆序数

我们已经熟悉二、三阶行列式，利用它们可将二元、三元线性方程组的解简洁地表示出来．为研究 n 元线性方程组，须引进 n 阶行列式的概念．为了给出 n 阶行列式的概念，先介绍排列和逆序的知识．

定义 1.2　由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为一个 n 阶排列．（简称排列）

例如，由数码 1，2，3 所组成的所有不同的 3 阶排列共有 $3!=6$ 个．它们是

123，132，213，231，312，321．

对于一个 n 阶排列，如果这 n 个自然数是按从小到大的顺序排列的则称为标准排列．在一个排列中任何两个数，它们的先后顺序可以同标准排列中的一样，或者与之相反．而后一情形，称为这一对数有一个逆序．一个排列中的所有逆序之和称为这个排列的逆序数．当一个排列是标准排列时，它的逆序数为零，除此以外，一个排列的逆序数总是大于零的．

逆序数的计算方法：分别计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，即算出排列中每个元素的逆序数，每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数．

例如，5 阶排列 15432，25341，35412 的逆序数分别是

$$0+0+1+2+3=6$$

$$0+0+1+1+4=6$$

$$0+0+1+3+3=7.$$

排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数为

$$0+1+2\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 1.3　逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列．

例如，排列 15432 的逆序数为 6，它是偶排列．而排列 35412 的逆序数为 7，为奇排列．排列 $123\cdots n$ 的逆序数为零，是偶排列．

一个 n 阶排列，如果对调其中的两个数，而其余数字保持不变，就可得到另一

个 n 阶排列. 对于排列所施行的这种变换称为对换.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性(证略).

例如,32514 的逆序数为 5,对换 1,5 后变为 32154,逆序数为 4.

定理 1.2 在 n 阶排列中($n\geqslant 2$),奇排列与偶排列的个数相等,各为$\frac{n!}{2}$个.

很显然,所有的 n 阶排列共有 $n!$ 个,将每个排列中的第 1、2 个数字对换,其余数字保持不变,这时得到的仍是原来的 $n!$ 个 n 阶排列,然而每个排列的奇偶性都改变了. 由此可见,在 n 阶排列中,奇排列与偶排列的个数是相同的,且各占$\frac{n!}{2}$.

第三节 n 阶行列式的定义

一、概念的引入

利用二阶和三阶行列式,得到了二元和三元线性方程组的求解公式,那么对于 n 元线性方程组能否得到类似的求解公式呢? 为此,先研究二阶和三阶行列式的结构规律,在此基础上定义 n 阶行列式.

下面分析三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

展开式是 6 项,即 3! 项的代数和;每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积. 其一般形式(除正负号外)可以写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

这里元素的行下标形成标准排列,列下标的排列 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的某一个排列;当该排列是偶排列时,此项带正号;若为奇排列则带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数.

二、n 阶行列式的定义

定义 1.4 设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$,排成 n 行 n 列的数表

$$a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}$$
$$a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}$$

所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和 $\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$.

称为 n 阶行列式.记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$.或 $|a_{ij}|_n$,数 a_{ij} 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列的元素.

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数.

说明:

1. 行列式是一种特定的算式,它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的;

2. n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

3. n 阶行列式的每项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积;

4. 一阶行列式 $|a|=a$ 不要与绝对值记号相混淆.

定义表明,为计算 n 阶行列式,要先作所有位于不同行不同列的元素的乘积,并把构成这些乘积的元素按行标排成标准排列,然后由列标所构成的排列的奇偶性来确定这一项的符号.

【例 1.5】 用定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解:这是一个四阶行列式,展开式应有 $4!=24$ 项,但由于该行列式的元素中含有多个零,所以不等于零的项数大大减少了.展开式中的一般形式是

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$$

显然,对于 a_{1p_1},如果 $p_1\neq 4$,那么 $a_{1p_1}=0$,只有 $p_1=4$ 时不为零;同理,对于 a_{2p_2},a_{3p_3},a_{4p_4},只有 $p_2=3$,$p_3=2$,$p_4=1$ 时不为零.所以该行列式中,不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$,而 4321 的逆序数为 6,这一项前面的符号是正的.所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\times 2\times 3\times 4=24$$

【例 1.6】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解:行列式一般形式是

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

因为行列式中第 n 行除 a_{nn} 以外全为零,故只能取 $p_n=n$ 时不为零;再考察 $n-1$ 行 p_{n-1}不能再取 n,因此这时只能取 $p_{n-1}=n-1$,依次可知 $p_{n-2}=n-2,\cdots,p_1=1$. 不难看出,展开式中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 可能不为零外,其余项都是零. 而这一项的列标排列为偶排列,所以这一项前面的符号是正的,于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式称为上三角形行列式,即上三角形行列式等于主对角线上元素的积.

例如,$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=1\times 2\times 3=6.$

除此以外,常见的特殊的行列式还有:

1. 主对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中