

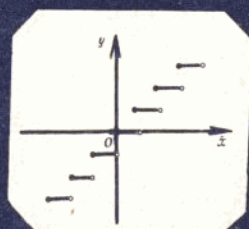
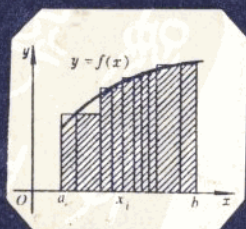
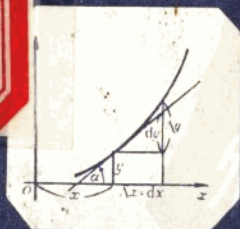


普通高等教育地质矿产类规划教材

高等数学

上册

魏贵民 主编



地质出版社

前 言

按照国家教委批准的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”，地质矿产部数学课程教学研究委员会悉心组织，编者认真整理、提炼了广大教师在多年教学实践中创造和积累的教学经验，博采国内外优秀教材之长，编写了这套书。

170—210学时可以讲完全书内容。书中有*号的内容可根据专业需要取舍。阅读材料是为拓宽学生知识面及提高兴趣而编排的，供学生课外阅读。各节配置了基本习题，各章后又配置了一定数量的补充题，它是综合运用所学知识的练习题，仅供学有余力的学生参考练习。

参加本书编写的有：彭裕元（编写预备知识、第一、二、三章），张一球（编写第四、五、六、七章），邓本让（编写第八、九、十章），魏贵民（编写第十一、十二、十三、十四章及对全部书稿进行统编），高瑞峰（编写第十五章，参加全书统编工作并补写了一些章节的内容）。

侯吉占教授、何宝侃教授、杨天行教授认真细致地审阅了本书的初稿和终稿，对各章的取材、结构直至叙述的严格性都提出了很多宝贵的意见和建议，对提高本书的质量具有重要的指导意义。

在本书编写过程中，还有许多教师提供了宝贵的经验、支持和帮助，他们是：许伯济、张卿、王本鉴、简静生、黄南强、师万瑞、云贵、韩生、曾文祁、郭科、楚道玉、叶富荣、尹翔云、胥泽银、罗立、李苹、杜鹃、苑金臣、唐桂荣、刘常青、喻秉钧、杜伯仁、诸克军、李星、蒲和平等同志。

对给本书写作予以帮助的各位专家和教师，在此谨致以衷心的感谢！

因时间仓促、水平所限，错误在所难免。恳请读者不吝指正。

前 言

编 者

1991年5月

本书是根据《中学数学教学大纲》（1980年）和《中学数学教学大纲》（1980年）的精神，结合我国中学数学教学的实际，参照国外有关教材，经过反复修改，并经有关专家、学者、教师、学生等广泛征求意见，最后定稿的。本书可作为高中一年级数学教材，也可供中学数学教师参考。

本书共分五章。第一章为集合、逻辑、命题、函数、数列、不等式、三角、复数、向量、概率、统计、微积分初步。第二章为集合、逻辑、命题、函数、数列、不等式、三角、复数、向量、概率、统计、微积分初步。第三章为集合、逻辑、命题、函数、数列、不等式、三角、复数、向量、概率、统计、微积分初步。第四章为集合、逻辑、命题、函数、数列、不等式、三角、复数、向量、概率、统计、微积分初步。第五章为集合、逻辑、命题、函数、数列、不等式、三角、复数、向量、概率、统计、微积分初步。

本书在编写过程中，参考了国内外有关教材，如：《集合论》（张金生）、《逻辑学》（张金生）、《命题逻辑》（张金生）、《函数论》（张金生）、《数列论》（张金生）、《不等式论》（张金生）、《三角论》（张金生）、《复数论》（张金生）、《向量论》（张金生）、《概率论》（张金生）、《统计论》（张金生）、《微积分初步》（张金生）等。本书在编写过程中，参考了国内外有关教材，如：《集合论》（张金生）、《逻辑学》（张金生）、《命题逻辑》（张金生）、《函数论》（张金生）、《数列论》（张金生）、《不等式论》（张金生）、《三角论》（张金生）、《复数论》（张金生）、《向量论》（张金生）、《概率论》（张金生）、《统计论》（张金生）、《微积分初步》（张金生）等。

本书在编写过程中，参考了国内外有关教材，如：《集合论》（张金生）、《逻辑学》（张金生）、《命题逻辑》（张金生）、《函数论》（张金生）、《数列论》（张金生）、《不等式论》（张金生）、《三角论》（张金生）、《复数论》（张金生）、《向量论》（张金生）、《概率论》（张金生）、《统计论》（张金生）、《微积分初步》（张金生）等。本书在编写过程中，参考了国内外有关教材，如：《集合论》（张金生）、《逻辑学》（张金生）、《命题逻辑》（张金生）、《函数论》（张金生）、《数列论》（张金生）、《不等式论》（张金生）、《三角论》（张金生）、《复数论》（张金生）、《向量论》（张金生）、《概率论》（张金生）、《统计论》（张金生）、《微积分初步》（张金生）等。

本书在编写过程中，参考了国内外有关教材，如：《集合论》（张金生）、《逻辑学》（张金生）、《命题逻辑》（张金生）、《函数论》（张金生）、《数列论》（张金生）、《不等式论》（张金生）、《三角论》（张金生）、《复数论》（张金生）、《向量论》（张金生）、《概率论》（张金生）、《统计论》（张金生）、《微积分初步》（张金生）等。本书在编写过程中，参考了国内外有关教材，如：《集合论》（张金生）、《逻辑学》（张金生）、《命题逻辑》（张金生）、《函数论》（张金生）、《数列论》（张金生）、《不等式论》（张金生）、《三角论》（张金生）、《复数论》（张金生）、《向量论》（张金生）、《概率论》（张金生）、《统计论》（张金生）、《微积分初步》（张金生）等。本书在编写过程中，参考了国内外有关教材，如：《集合论》（张金生）、《逻辑学》（张金生）、《命题逻辑》（张金生）、《函数论》（张金生）、《数列论》（张金生）、《不等式论》（张金生）、《三角论》（张金生）、《复数论》（张金生）、《向量论》（张金生）、《概率论》（张金生）、《统计论》（张金生）、《微积分初步》（张金生）等。

（张金生）

序

《高等数学》在几乎所有学科中都占据相当重要的位置，其内容已基本定型。现行教材为数很多，但用起来确有许多不尽人意之处。编一套具有一定特色的《高等数学》教材，以适应教改的新形势是很必要的，这套教材的组织编写正是朝这个方向迈出的一步。其主要特点是：

与中学教材衔接紧密，由浅入深，承前启后，不搞简单的重复；

以映射的观点给出了一元、多元和矢量函数的定义，对定义域、值域和解析式子定值域等概念阐述得清楚准确，同现代分析相一致；

由距离引进极限，用邻域作了解释，隐含拓扑观点。以代数的观点和方法处理了矢量代数，取代了以几何为主的传统写法，不仅蕴含近世代数的思想，而且重点突出，论证简洁；

对级数的收敛区间和收敛域，微分方程的通解与全部解，任意常数的无关与线性无关，解方程过程中解的增遗等，都给出了明确的论述，指出了相互的区别和由此引起的有关结论的异同，从而消除了现行教材中的一些似是而非的问题；

取材适当，选例典型，概念严谨，论述简洁，分析透彻，行文流畅，易教易学，编者在这些方面下了不少功夫；

在重要章节之后搭配了12个阅读材料，短小精悍，富有趣味，与课文交相呼应，使人耳目一新。

本教材尽管有许多特色，但未增加内容和篇幅，全书约75万字，用（170~210）学时可以讲完，不仅可作为地质院校通用教材，亦适于其他工科院校。

审 者

1991年5月

目 录

预备知识 函数	1
§ 1 实数	1
一、实数集(1) 二、绝对值(3) 三、邻域(3)	
习题 0.1 (4)	
§ 2 函数	4
一、函数概念(4) 二、函数的几个常用性质(8)	
习题 0.2(11)	
§ 3 复合函数	13
习题 0.3 (14)	
§ 4 反函数	15
习题 0.4 (17)	
§ 5 初等函数	17
一、基本初等函数(17) 二、初等函数(22) 习题	
0.5 (22)	
§ 6 双曲函数	23
习题 0.6 (25)	
补充题	25
阅读材料一 函数概念的形成与发展	26
第一章 极限	28
§ 1 数列的极限	28
习题 1.1 (33)	
§ 2 函数的极限	33
一、自变量趋向无穷大时函数的极限(33) 二、自变量	
趋向定值时函数的极限(35) 三、左极限与右极限(37)	
习题 1.2 (38)	
§ 3 无穷小量与无穷大量	39

一、无穷小量 (39) 二、无穷大量 (41) 习题1.3 (44)	
§ 4 关于极限的几个定理	45
习题1.4 (46)	
§ 5 极限运算法则	46
一、无穷小的运算性质 (47) 二、极限四则运算法则 (48) 习题1.5 (52)	
§ 6 极限存在准则 两个重要极限	54
一、夹逼准则(54) 二、单调有界准则(58) *三、柯西极限存在准则 (62) 习题1.6 (63)	
§ 7 无穷小的比较	63
习题1.7 (66)	
§ 8 函数的连续性	66
一、函数的连续性概念(67) 二、函数的间断点(68) 习题1.8 (70)	
§ 9 连续函数的运算与初等函数的连续性	71
一、连续函数的和、差、积、商的连续性 (71) 二、连续函数的反函数 (72) 三、连续函数的复合函数 (72) 四、初等函数的连续性(74) 习题1.9(75)	
§ 10 闭区间上连续函数的性质	75
一、最大值最小值定理 (75) 二、介值定理(77) *三、函数的一致连续性 (78) 习题1.10 (79)	
补充题	79
阅读材料二 极限概念的形成	80
第二章 导数与微分	81
§ 1 导数概念	81
一、关于变化率的例 (81) 二、导数的定义 (83) 三、按定义求导数举例(84) 四、导数的几何意义(88) 习题2.1 (89)	
§ 2 初等函数的导数	90
一、导数的四则运算法则 (91) 二、复合函数的求导法则 (93) 三、反函数的导数 (97) 四、初等函数求导的基本公式和法则 (99) 习题2.2 (100)	

§ 3 高阶导数	102
习题2.3 (106)	
§ 4 隐函数及参量函数的导数 相关变化率	107
一、隐函数的导数 (107) 二、参量函数的导数 (110)	
三、相关变化率 (112) 习题2.4 (113)	
§ 5 函数的微分	114
一、微分 (115) 二 微分的几何意义 (117) 三、一阶	
微分形式不变性 微分公式 (117) 习题2.5 (120)	
§ 6 微分在近似计算上的应用	121
一、函数的近似公式 (121) 二、函数的误差估计 (122)	
习题2.6 (123)	
补充题	124
阅读材料三 生动的直观 确切的概念	125
第三章 导数的应用	126
§ 1 中值定理	126
一、罗尔定理 (126) 二、拉格朗日中值定理 (127)	
三、柯西中值定理 (130) 习题3.1 (131)	
§ 2 罗必塔法则	133
习题 3.2 (138)	
§ 3 泰勒公式	139
习题 3.3 (143)	
§ 4 函数的单调性	144
习题 3.4 (148)	
§ 5 函数的极值	149
一、函数的极值 (149) 二、最大值与最小值问题 (153)	
习题 3.5 (154)	
§ 6 曲线的凹凸与拐点	156
习题 3.6 (159)	
§ 7 渐近线	160
习题 3.7 (163)	
§ 8 函数图形的描绘	163

习题 3.8 (167)	
§ 9 曲率	167
一、弧长的微分 (167) 二、曲率 (169) 三、曲率圆 (172) *四、曲率中心的计算公式 (173) *五、渐屈线与渐伸线 (174) 习题 3.9 (175)	
§ 10 方程的近似解	175
一、弦位法 (175) 二、切线法 (177) 习题 3.10 (179)	
补充题	179
阅读材料四 不等式的微分证法	181
第四章 不定积分	186
§ 1 不定积分的概念	186
§ 2 基本积分表和不定积分的性质	188
习题 4.2 (191)	
§ 3 换元积分法	193
一、第一换元法 (193) 二、第二换元法 (198) 习题 4.3 (202)	
§ 4 分部积分法	203
习题 4.4 (208)	
§ 5 几种特殊类型函数的积分	209
一、有理函数的积分 (209) 二、三角函数的有理式的积分 (214) 三、某些简单无理函数的积分 (216) 习题 4.5 (218)	
§ 6 积分表的使用	219
习题 4.6 (221)	
§ 7 不定积分的基本方法概述	222
补充题	224
阅读材料五 分部积分法的一个分部经验	225
第五章 定积分	227
§ 1 定积分概念	227
一、定积分问题的例 (227) 二、定积分的定义 (230)	

三、定积分的几何意义 (232)	习题 5.1 (233)	
§ 2 定积分的性质		234
习题 5.2 (238)		
§ 3 微积分基本公式		239
习题 5.3 (245)		
§ 4 定积分的换元法与分部积分法		247
一、定积分的换元法 (247)	二、定积分的分部积分法 (253)	习题 5.4 (255)
* § 5 定积分的近似计算		258
一、矩形法与梯形法 (258)	二、抛物线法 (260)	
习题 5.5 (262)		
§ 6 广义积分		263
一、无穷限的广义积分 (263)	二、无界函数的广义积分 (266)	习题 5.6 (269)
补充题		270
阅读材料六 微积分史简述		272
第六章 定积分的应用		274
§ 1 微元分析法		274
§ 2 平面图形的面积		276
一、直角坐标系中的面积公式 (276)	二、极坐标系中的面积公式 (279)	习题 6.2 (280)
§ 3 体积		281
一、平行截面面积为已知的立体体积 (281)	二、旋转体的体积 (282)	习题 6.3 (285)
§ 4 平面曲线的弧长		286
习题 6.4 (290)		
§ 5 旋转体的侧面积		290
§ 6 功 引力 液体静压力		292
一、变力沿直线作功 (292)	二、引力 (294)	三、液体的静压力 (295)
习题 6.6 (295)		
§ 7 函数的平均值		296

习题 6.7 (298)	
补充题	298
第七章 矢量代数与空间解析几何	299
§ 1 空间直角坐标系	299
一、空间直角坐标系 (299)	
二、两点间的距离 (300)	
三、方程的几何意义 (301)	习题 7.1 (303)
§ 2 矢量基本概念	303
习题 7.2 (306)	
§ 3 矢量的运算	306
一、矢量的加减法 (306)	
二、矢量的数乘 (308)	
三、矢量的数积 (310)	
四、矢量的矢积 (310)	
五、矢量的混合积 (313)	习题 7.3 (314)
§ 4 平面与直线	316
一、平面的方程 (316)	
二、空间直线的方程 (319)	
三、点、直线、平面的位置关系 (322)	
*四、平面束 (324)	习题 7.4 (325)
§ 5 一些空间曲面与曲线	327
一、柱面 (327)	
二、旋转曲面 (329)	
三、锥面 (331)	
四、几种常见的二次曲面 (332)	
五、空间曲线的参数方程 (336)	
六、空间曲线在坐标平面上的投影 (338)	
*七、空间区域的简图 (340)	习题 7.5 (341)
补充题	343
阅读材料七 二次曲面的分类	344
附表 基本积分公式、积分表	346
习题答案	361

预备知识 函 数

函数是本课程研究的主要对象。它的概念和许多性质在中学数学课中已经介绍了。这里，我们仅择其要者略加陈述，以便读者加深理解，给后面的学习打下基础。

§1 实 数

一、实 数 集

集合是数学中一个原始的概念。读者在中学已经学习过关于集合的许多内容，如集、元素、子集、并集、交集、补集、空集 $\emptyset$ 等等，这里不再重述这些内容。以后用到的集合主要是元素的集合，即数集。本书用到的数集一般是实数集 $\mathbb{R}$ 及其一些非空子集，例如，自然数集 $\mathbb{N}$ 、整数集 $\mathbb{Z}$ 、有理数集 $\mathbb{Q}$ 、正实数集 $\mathbb{R}^+$ 等。

区间是用得较多的一类数集。设 a 和 b 是实数，且 $a < b$ 。数集

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

称为开区间， a 、 b 称为开区间 (a, b) 的端点。数集

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

称为闭区间， a 、 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点。

类似，

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ 和 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 都称为半开区间。

以上这些区间都称为有限区间，数 $b - a$ 称为这些区间的长

度。

引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间, 例如

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}, \quad (-\infty, b) = \{x | x < b\},$$

$$R = (-\infty, +\infty)$$

等等。

以后在不必辨明所论区间是否包含其端点, 以及有限区间还是无限区间的场合, 我们就简单地称它为区间, 且常用 I 表示。

实数集 R 并考虑到通常的实数的多种运算以及大小顺序, 就有了实数系。以后, 我们论及的问题一般都在实数系内讨论。

实数的几何表示, 通常借助实数轴上的点来完成。每一个实数都对应着实数轴上的一个点, 反之, 每一个点都对应着一个实数。因此, 实数与实数轴上的点是一一对应的。实数在实数轴上对应的点叫实点, 有理数对应的点叫有理点, 无理数对应的点叫无理点。由于实数与实数轴上的点一一对应, 以后“实数”与“实点”的含义不再区分。

实数系有以下几个重要性质

①有序性 任意二实数 a 与 b , 或者 $a < b$, 或者 $a = b$, 或者 $a > b$, 三者必居其一, 且只有一者成立。

②稠密性 任何相异二实数 a 与 b 之间, 必有其它的实数。

这就意味着任何相异二实数之间有无限多个实数, 例如, $\frac{a+b}{2}$

就是一个, 因之, 实数是稠密的。这个性质表明实数轴上一个无论多短的线段都密密麻麻排列着有理点和无理点, 这就是实数系的稠密性。

③连续性 由于直线是连续的, 根据点与实数一一对应的关系, 全体实数也就是连续的了。单看有理数, 尽管它是稠密的, 但并不连续, 因为任何两个不同的有理数之间不只存在有理数也存在无理数, 实数则是连接起来毫无间隙的。

二、绝对值

数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示, 它的定义是

$$|a| = \begin{cases} a & (\text{若 } a \geq 0) \\ -a & (\text{若 } a < 0) \end{cases}$$

也可以用数 a^2 的算术平方根来表示

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

数 a 与其相反数 $-a$ 到原点的距离是相等的, 即

$$|a| = |-a|$$

或者说, 在数轴上点 a 与点 $-a$ 关于原点对称的。

当 $a \in \mathbb{R}$ 时, 恒有

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

又, 当 $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $x_0, x \in \mathbb{R}$ 时, 不等式

$$|x - x_0| < \varepsilon \quad \text{与} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

是等价的。

三、邻域

邻域是一个经常用到的概念, 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 我们把数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\} \quad \text{即} \quad \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $N(a, \delta)$, 点 a 叫做邻域的中心, δ 称为该邻域的半径 (图 0.1.1)。

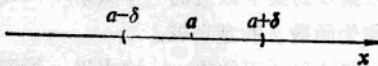


图 0.1.1

有时需要把邻域的中心去掉, 并把去掉中心 a 以后的邻域叫做去心邻域, 记为 $N(\dot{a}, \delta)$, 去心邻域 $N(\dot{a}, \delta)$ 就是数集

$$\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} \quad \text{或} \quad (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

其中 $0 < |x - a|$ 表示 $x \neq a$ 。我们仍把点 a 看作这个去心邻域的

中心。

我们还将开区间 $(a-\delta, a)$ 、 $(a, a+\delta)$ 分别称为点 a 的左邻域、右邻域。

习 题 0.1

1. 用集合表示下列点的邻域:

(1) $N(0.1, 0.1)$

(2) $N(\hat{0.1}, 0.1)$

(3) 以 1 为中心 $\frac{1}{2}$ 为半径的左邻域。

(4) 以 -2 为中心 1 为半径的右邻域。

§ 2 函 数

一、函数概念

客观世界的各种现象总是互相联系的。人们在研究实际问题时，常常会遇到一些在某种过程中可以取不同数值的量，即变量。同一个现象或技术过程中，往往同时出现几个变量，这些量并不是孤立地存在，而是相互关联相互制约并遵循着一定的变化规律。函数概念便是以这些规律为实际背景，被人们通过长期观察，归纳总结而抽象出来的。

大家知道，研究两个集合时，常常用到映射的概念。所谓非空集合 X 到非空集合 Y 的映射 f ，是指一个法则 f ，使得对于 X 的每一个元素 x ，按照法则 f ， Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应。

定义 1 数集 D 到某个数集的一个映射 f ，叫做数集 D 上的一个函数， D 称为函数 f 的定义域。

D 中的数 x 在映射 f 下的象 y ，或者说 x 按照法则 f 所对应的数 y ，可用记号 $f(x)$ 表示，即可写为 $y=f(x)$ ，称为 x 对应的函数值。把 x 看作在 D 中取值的一个变量，当 x 在 D 中变化时， y 也相应地产生变化，因此，把 x 称为函数 f 的自变量， y 称为函数 f 的因变量。为了方便，也为了数学上久已形成的习惯，通常将变量 y 称为自变量 x 的函数。通俗地说，有

定义 2 设 x 和 y 是两个变量, D 是变量 x 取值的数集. 如果对 D 中的每个数 x , 变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记为 $y=f(x)$.

在上述定义中, 特别要求对于 D 中的每一个 x , 对应的 y 值都是唯一的, 这种函数称为**单值函数**, 而将取消了唯一性要求之后得到的函数称之为**多值函数**. 今后如无特别声明, 函数一律指的是单值函数.

当点 a 属于某函数的定义域, 则说这函数在点 a 有定义. 当数集 S 是某函数定义域的子集, 则说这个函数在 S 上有定义.

当自变量 x 取遍 D 的各个数值时, 对应的函数值全体组成的数集

$$R(f) = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的**值域**.

平面直角坐标系中的点集

$$C = \{(x, y) | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

例 1 常量函数 $y = -2$

$$y = -2$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R(f) = \{-2\}$

例 2 在等温过程中, 定量的理想气体的体积 V 与压强 P 呈反比关系

$$V = \frac{C}{P}$$

其中 C 是与该气体有关的一个常数, 定义域 $D = \{P | 0 < P < a\}$, 在区间 $(0, a)$ 中任意取定一个 P 的值, 相应地就确定了 V 的一个值, 故其值域 $R(f) = \left\{V \mid \frac{C}{a} < V < +\infty\right\}$.

例 3 在电子技术中, 经常遇到各种波形, 图 0.2.1 是一种三角波形中的一个波形, 图中横坐标表示时间 t , 纵坐标表示电压 u , 从图可知, u 和 t 的关系可以表示为

$$u = \begin{cases} \frac{3}{2}t & (0 \leq t \leq 10) \\ 30 - \frac{3}{2}t & (10 < t \leq 20) \end{cases}$$

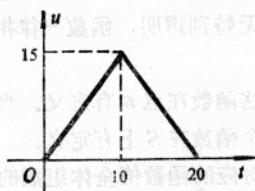


图 0.2.1

例 4 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ ，值域 $R(f) = \{-1, 0, 1\}$ ，如图 0.2.2。

对于任何实数 x ，有如下关系式成立

$$x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$$

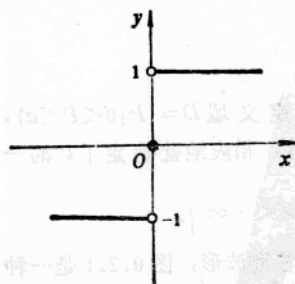


图 0.2.2

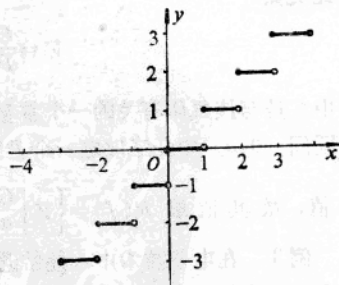


图 0.2.3

例5 取整函数 $y=[x]$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,例如: $\left[\frac{5}{7}\right]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$, $[-1]=-1$, $[-3.5]=-4$.

函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $R(f)=Z$, 它的图形如图0.2.3所示, 这个图形称为阶梯曲线, 在 x 为整数处, 图形发生跳跃, 跃度为1.

例6 狄利克雷^①函数

$$D(x)=\begin{cases} 1 & (\text{当 } x \text{ 为有理数时}) \\ 0 & (\text{当 } x \text{ 为无理数时}) \end{cases}$$

它的图形是不能精确地画出来的, 但可以作一些直观地想象, 当 x 取有理数时, 有无数多个点稠密地分布在直线 $y=1$ 上, 当 x 取无理数时, 同样有无数多个点稠密地分布在 x 轴上, 如图0.2.4所示.

例7 函数 $y=f(n)=\frac{1}{2^{n-3}}$ ($n \in N$)

它的图形是平面直角坐标系中一批各自孤立的点(图0.2.5). 定义域是自然数集 N 的函数, 称为整标函数. 如果 $y=f(n)$ 是一整标函数, 则 $a_n=f(n)$ 恰是数列 $\{a_n\}$ 的通项.

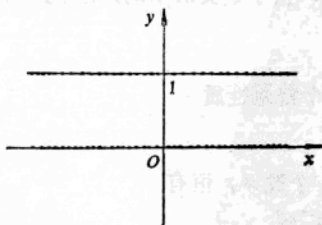


图 0.2.4

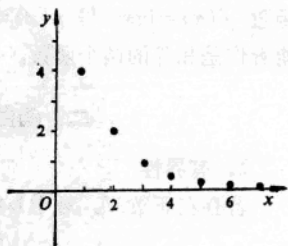


图 0.2.5

① 狄利克雷(P. G. L. Dirichlet 1805—1859) 德国数学家.