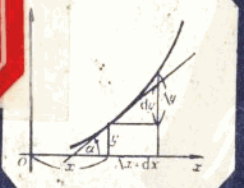
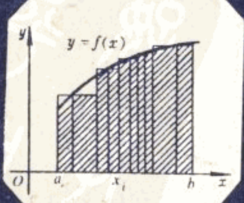
普通高等教育地质矿产类规划教材

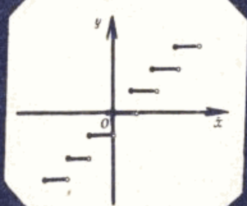
高等数学

上册

魏贵民　主编







地质出版社

前　言

按照国家教委批准的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”,地质矿产部数学课程教学研究委员会悉心组织，编者认真整理、提炼了广大教师在多年教学实践中创造和积累的教学经验，博采国内外优秀教材之长，编写了这套书.

170—210 学时可以讲完全书内容. 书中有 * 号的内容可根据专业需要取舍. 阅读材料是为拓宽学生知识面及提高兴趣而编排的，供学生课外阅读. 各节配置了基本习题. 各章后又配置了一定数量的补充题，它是综合运用所学知识的练习题，仅供学有余力的学生参考练习.

参加本书编写的有：彭裕元（编写预备知识、第一、二、三章),张一球（编写第四、五、六、七章),邓本让(编写第八、九、十章)，魏贵民（编写第十一、十二、十三、十四章及对全部书稿进行统编)，高瑞峰（编写第十五章,参加全书统编工作并补写了一些章节的内容).

侯吉占教授、何宝侃教授、杨天行教授认真细致地审阅了本书的初稿和终稿，对各章的取材、结构直至叙述的严格性都提出了很多宝贵的意见和建议，对提高本书的质量具有重要的指导意义.

在本书编写过程中，还有许多教师提供了宝贵的经验、支持和帮助，他们是：许伯济、张卿、王本鉴、简静生、黄南强、师万瑞、云贵、韩生、曾文祁、郭科、楚道玉、叶富荣、尹翔云、胥泽银、罗立、李苹、杜鹃、苑金臣、唐桂荣、刘常青、喻秉钧、杜伯仁、诸克军、李星、蒲和平等同志.

对给本书写作予以帮助的各位专家和教师，在此谨致以衷心的谢意！

因时间仓促、水平所限，错误在所难免．恳请读者不吝指正．

编　者

1991年5月

序

《高等数学》在几乎所有学科中都占据相当重要的位置，其内容已基本定型．现行教材为数很多，但用起来确有许多不尽人意之处．编一套具有一定特色的《高等数学》教材，以适应教改的新形势是很必要的，这套教材的组织编写正是朝这个方向迈出的一步．其主要特点是：

与中学教材衔接紧密，由浅入深，承前启后，不搞简单的重复；

以映射的观点给出了一元、多元和矢量函数的定义，对定义域、值域和解析式子定值域等概念阐述得清楚准确，同现代分析相一致；

由距离引进极限，用邻域作了解释，隐含拓朴观点．以代数的观点和方法处理了矢量代数，取代了以几何为主的传统写法，不仅蕴含近世代数的思想，而且重点突出，论证简洁；

对级数的收敛区间和收敛域，微分方程的通解与全部解，任意常数的无关与线性无关，解方程过程中解的增遗等，都给出了明确的论述，指出了相互的区别和由此引起的有关结论的异同，从而消除了现行教材中的一些似是而非的问题；

取材适当，选例典型，概念严谨，论述简洁，分析透彻，行文流畅，易教易学，编者在这些方面下了不少功夫；

在重要章节之后搭配了12个阅读材料，短小精悍，富有趣味，与课文交相呼应，使人耳目一新．

本教材尽管有许多特色，但未增加内容和篇幅，全书约75万字，用（170～210）学时可以讲完，不仅可作为地质院校通用教材，亦适于其他工科院校．

审　者

1991年5月

目　录

预备知识　函　　数

函数是本课程研究的主要对象．它的概念和许多性质在中学数学课中已经介绍了．这里，我们仅择其要者略加陈述，以便读者加深理解，给后面的学习打下基础．

§1 实　　数

一、实 数 集

集合是数学中一个原始的概念．读者在中学已经学习过关于集合的许多内容，如集、元素、子集、并集、交集、补集、空集$\varnothing$等等，这里不再重述这些内容．以后用到的集合主要是元素是数的集合，即数集．本书用到的数集一般是实数集R及其一些非空子集，例如，自然数集N、整数集Z、有理数集Q、正实数集R^+等．

区间是用得较多的一类数集．设a和b是实数，且$a<b$．数集

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$

称为开区间，a、b称为开区间(a,b)的端点．

数集

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，a、b称为闭区间$[a,b]$的端点．

类似，

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\} \quad 和 \quad (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

都称为半开区间．

以上这些区间都称为有限区间，数$b-a$称为这些区间的长

度.

引进记号$+\infty$（读作正无穷大）及$-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\},\quad (-\infty,b)=\{x|x<b\},$$

$$R=(-\infty,+\infty)$$

等等.

以后在不必辨明所论区间是否包含其端点，以及有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为区间，且常用I表示.

实数集R并考虑到通常的实数的多种运算以及大小顺序，就有了**实数系**. 以后，我们论及的问题一般都在实数系内讨论.

实数的几何表示，通常借助实数轴上的点来完成. 每一个实数都对应着实数轴上的一个点，反之，每一个点都对应着一个实数. 因此，实数与实数轴上的点是一一对应的. 实数在实数轴上对应的点叫实点，有理数对应的点叫有理点，无理数对应的点叫无理点. 由于实数与实数轴上的点一一对应，以后“实数”与“实点”的含义不再区分.

实数系有以下几个重要性质

①有序性　任意二实数a与b，或者$a<b$，或者$a=b$，或者$a>b$，三者必居其一，且只有一者成立.

②稠密性　任何相异二实数a与b之间，必有其它的实数. 这就意味着任何相异二实数之间有无限多个实数，例如，$\frac{a+b}{2}$就是一个，因之，实数是稠密的. 这个性质表明实数轴上一个无论多短的线段都密密麻麻排列着有理点和无理点，这就是实数系的稠密性.

③连续性　由于直线是连续的，根据点与实数一一对应的关系，全体实数也就是连续的了. 单看有理数，尽管它是稠密的，但并不连续，因为任何两个不同的有理数之间不只存在有理数也存在无理数，实数则是连接起来毫无间隙的.

二、绝 对 值

数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示，它的定义是

$$|a|=\begin{cases} a & (\text{若 } a\geqslant 0) \\ -a & (\text{若 } a<0) \end{cases}$$

也可以用数 a^2 的算术平方根来表示

$$|a|=\sqrt{a^2}$$

数 a 与其相反数 $-a$ 到原点的距离是相等的，即

$$|a|=|-a|$$

或者说，在数轴上点 a 与点 $-a$ 关于原点是对称的。

当 $a\in\mathrm{R}$ 时，恒有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|$$

又，当 $\varepsilon\in\mathrm{R}^+$，$x_0$、$x\in\mathrm{R}$ 时，不等式

$$|x-x_0|<\varepsilon \quad 与 \quad x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

是等价的。

三、邻 域

邻域是一个经常用到的概念，设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，我们把数集

$$\{x\,|\,|x-a|<\delta\} \quad 即 \quad \{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

称为点 a 的 δ 邻域，记为 $N(a,\delta)$，点 a 叫做邻域的中心，δ 称为该邻域的半径（图 0.1.1）。

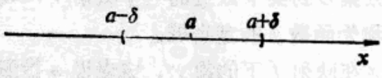


图 0.1.1

有时需要把邻域的中心去掉，并把去掉中心 a 以后的邻域叫做**去心邻域**，记为 $N(\hat{a},\delta)$，去心邻域 $N(\hat{a},\delta)$ 就是数集

$$\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\} \quad 或 \quad (a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

其中 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$。我们仍把点 a 看作这个去心邻域的

中心．

我们还将开区间 $(a-\delta,a)$、$(a,a+\delta)$ 分别称为点 a 的**左邻域**、**右邻域**．

习　题　0.1

1．用集合表示下列点的邻域：

（1）$N(0.1,0.1)$　　　　（2）$N(\hat{0.1},0.1)$

（3）以1为中心$\frac{1}{2}$为半径的左邻域．

（4）以-2为中心1为半径的右邻域．

§2　函　　数

一、函数概念

客观世界的各种现象总是互相联系的．人们在研究实际问题时，常常会遇到一些在某种过程中可以取不同数值的量，即**变量**．同一个现象或技术过程中，往往同时出现几个变量，这些量并不是孤立地存在，而是相互关联相互制约并遵循着一定的变化规律．函数概念便是以这些规律为实际背景，被人们通过长期观察，归纳总结而抽象出来的．

大家知道，研究两个集合时，常常用到映射的概念．所谓非空集合X到非空集合Y的映射f，是指一个法则f，使得对于X的每一个元素x，按照法则f，Y中都有唯一确定的元素y与之对应．

定义1　数集D到某个数集的一个映射f，叫做数集D上的一个函数，D称为函数f的定义域．

D中的数x在映射f下的象y，或者说x按照法则f所对应的数y，可用记号$f(x)$表示，即可写为$y=f(x)$，称为x对应的函数值．把x看作在D中取值的一个变量，当x在D中变化时，y也相应地产生变化，因此，把x称为函数f的**自变量**，y称为函数f的**因变量**．为了方便，也为了数学上久已形成的习惯，通常将变量y称为自变量x的函数．通俗地说，有

定义2 **设x和y是两个变量，D是变量x取值的数集．如果对D中的每个数x，变量y按照一定法则f总有确定的数值与它对应，则称y是x的函数，记为$y=f(x)$．**

在上述定义中，特别要求对于D中的每一个x，对应的y值都是唯一的，这种函数称为**单值函数**，而将取消了唯一性要求之后得到的函数称之为**多值函数**．今后如无特别声明，函数一律指的是单值函数．

当点a属于某函数的定义域，则说这函数在点a有定义．当数集S是某函数定义域的子集，则说这个函数在S上有定义．

当自变量x取遍D的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$R(f)=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数的**值域**．

平面直角坐标系中的点集

$$C=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数$y=f(x)$的**图形**．

例1 常量函数

$$y=-2$$

的定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$R(f)=\{-2\}$

例2 在等温过程中，定量的理想气体的体积V与压强P呈反比关系

$$V=\frac{C}{P}$$

其中C是与该气体有关的一个常数，定义域$D=\{P|0<P<a\}$，在区间$(0,a)$中任意取定一个P的值，相应地就确定了V的一个值，故其值域$R(f)=\left\{V\left|\frac{C}{a}<V<+\infty\right.\right\}$．

例3 在电子技术中，经常遇到各种波形，图0.2.1是一种三角波形中的一个波形，图中横坐标表示时间t，纵坐标表示电压u，从图可知，u和t的关系可以表示为

$$u=\begin{cases}\dfrac{3}{2}t & (0\leqslant t\leqslant 10)\\ 30-\dfrac{3}{2}t & (10<t\leqslant 20)\end{cases}$$

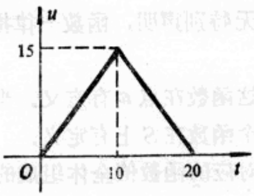


图 0.2.1

这个函数的定义域 $D=\{t|0\leqslant t\leqslant 20\}$，值域 $R(f)=\{u|0\leqslant u\leqslant 15\}$，其中自变量在不同的取值范围，对应法则用不同的式子来表示。我们把这种一个函数需要用几个数学式子表示的叫做**分段函数**。分段函数是一种很重要的函数，以后要常常用到。

例 4 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{-1,0,1\}$，如图 0.2.2.

对于任何实数 x，有如下关系式成立

$$x=|x|\cdot\operatorname{sgn} x$$

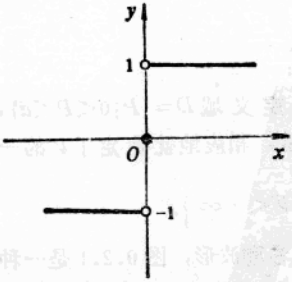


图 0.2.2

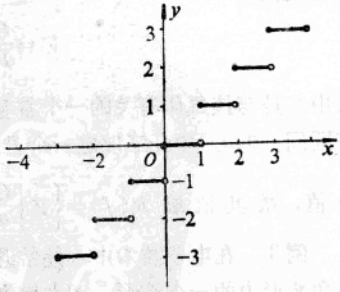


图 0.2.3

例 5 取整函数 $y=[x]$

$[x]$表示不超过 x 的最大整数，例如：$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$。

函数$y=[x]$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=Z$，它的图形如图 0.2.3 所示，这个图形称为阶梯曲线，在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1。

例 6 狄利克雷❶函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & (\text{当 } x \text{ 为有理数时})\\ 0 & (\text{当 } x \text{ 为无理数时})\end{cases}$$

它的图形是不能精确地画出来的，但可以作一些直观地想象，当 x 取有理数时，有无数多个点稠密地分布在直线 $y=1$上，当 x 取无理数时，同样有无数多个点稠密地分布在 x 轴上，如图 0.2.4 所示。

例7 函数 $y=f(n)=\dfrac{1}{2^{n-3}}$ $(n\in\mathrm{N})$

它的图形是平面直角坐标系中一批各自孤立的点(图0.2.5)。定义域是自然数集N的函数，称为**整标函数**。如果 $y=f(n)$ 是一整标函数，则 $a_n=f(n)$ 恰是数列$\{a_n\}$的通项。

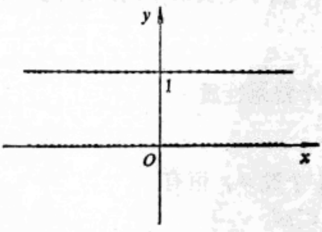


图 0.2.4

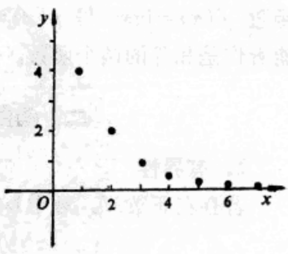


图 0.2.5

❶ 狄利克雷(P. G. L. Dirichlet 1805—1859) 德国数学家。