

王 庚 王敏生 / 著

现代数学 建模方法



科学出版社

www.sciencep.com

022/121

2008

现代数学建模方法

王 庚 王敏生 著

本书得到南京财经大学出版基金资助



科学出版社

北 京

内 容 简 介

数学建模是数学应用的钥匙,而现代数学建模的方法众多且极难掌握与应用,如何解决这一问题呢?作者根据从事了10年的应用数学和数学建模工作的经验与研究,认为其关键是选择合适的案例,理解方法的基本思想,运用相应的软件多实践。本书就是在这一指导思想下的成果。作者不论是用它来指导学生论文还是指导学生参加数学建模竞赛,都取得了可喜的成果。

本书共分20章,包括通用方法3章,现代数学建模方法8章,现代数学建模方法应用建模案例9章。

本书深入浅出,生动实用,可作为应用数学较多的学科如工程类、经济金融类、理学学科、管理学科等各专业的应用数学方法用书,也可作为广大教师、科技工作者和工程技术人员的参考书,使用者可根据自己的专业背景和使用目的选取所需内容。当然本书对于在校大学生、研究生、大学的数学教师、数学与数学应用工作者,尤其是对数学专业的本科生和研究生、学习数学建模的学生和指导教师更为适用。

图书在版编目(CIP)数据

现代数学建模方法/王庚,王敏生著.—北京:科学出版社,2008
ISBN 978-7-03-020898-9

I. 现… II. ①王… ②王… III. 数学模型 IV. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 006566 号

责任编辑:范庆奎 杨 然/责任校对:郑金红

责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年2月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2008年2月第一次印刷 印张:20 1/4

印数:1—3 000 字数:384 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈明辉〉)

前 言

为了能对被研究的对象进行系统深入地分析,掌握它的特征和规律,对它的静态和动态性质予以评价,并预测它的变化趋势,进而做出正确的决策,同时对它进行有效的管理和控制,就必须建立被研究对象的数学模型,数学建模已成为对被研究对象的特性进行系统研究和仿真的必不可少的基础。由于数学建模技术在国民经济的各个领域起到日益重要的作用,对它的研究、应用、普及和推广已受到各国政府的关注。

笔者近十年来在从事教科研工作中,做了一系列关于现代数学建模理论与方法的研究以及应用工作,于2003年暑期便开始动笔整理,写成此书。

本书的特色是从理论和应用相结合的观点出发,阐述了现代数学建模方法中最重要的方法,并大量采用了适当的建模软件,使方法好用易实现,深入浅出,通俗易懂。其中在方法的结合上有诸多创新,应用案例多为作者的科研工作成果。

由于数学建模是一门基于数学、物理、生物、光电、机械、经济、社科等多学科的综合技术,因此本书涉及面广,内容丰富。因笔者知识所限,不妥之处,敬请读者批评指正。

王 庚 王敏生

2006年2月于南京

目 录

前言

第一篇 通用方法

第一章 数学建模导论	3
第一节 引言	3
第二节 数学与应用数学的作用	4
第三节 数学模型、数学建模以及数学建模竞赛	8
第四节 数学建模与我们	17
第五节 如何学习数学建模及参与其活动	19
参考文献	19
第二章 科学史上科学家是如何建模的	21
第一节 建模方法综述	21
第二节 科学建模的第一大法：试验法	22
第三节 数据分析法	26
第四节 数学建模法	29
第五节 考察+归纳法	33
第六节 模拟法	39
第七节 人工假设法	41
参考文献	43
第三章 常用建模方法	44
第一节 常用建模方法综述	44
第二节 理论分析法与万有引力	44
第三节 模拟法与场址问题	48
第四节 类比法与机电系统	50
第五节 数据分析法	52
第六节 建模中的逻辑思维方法	56
第七节 建立数学模型的基本方法	59
参考文献	60

第二篇 现代方法

第四章 建模中的软件方法	63
第一节 引言	63
第二节 建模软件简述	64
第三节 建模软件速成	76
第四节 建模中怎样使用软件与示例	76
参考文献	86
第五章 建模中的运筹方法	87
第一节 引言	87
第二节 运筹学基本知识与几个例子	87
第三节 优化模型及其求解	92
参考文献	99
第六章 建模中的统计方法	100
第一节 引言	100
第二节 概率统计基本知识与基本思想	100
第三节 建模中的实用概率统计方法	106
参考文献	115
第七章 建模中的模拟、仿真方法	116
第一节 数学模型模拟、仿真基础	116
第二节 模拟仿真的方法、步骤	119
第三节 模拟实例	126
参考文献	144
第八章 建模中的灰色方法	145
第一节 引言	145
第二节 灰色系统理论概述	146
第三节 简单的灰色预测 —— GM(1,1)预测	151
第四节 灰色关联度分析	154
第五节 灰色规划	156
参考文献	159
第九章 建模中的模糊数学方法	160
第一节 引论	160
第二节 模糊数学方法的基本概念、基本理论	161
第三节 常用模糊数学方法	166
参考文献	185

第十章 建模中的神经网络方法	186
第一节 神经网络概述	186
第二节 BP 神经网络模型	191
第三节 应用实例	194
第四节 Matlab 神经网络工具箱概述	198
参考文献	200
第十一章 建模中的系统分析法	201
第一节 系统分析简介与常用系统分析法	201
第二节 系统目标分析	206
第三节 系统环境分析	209
第四节 系统结构分析	212
第五节 系统层次分析	214
第六节 系统预测分析	222
参考文献	228

第三篇 方法应用

第十二章 国有企业业绩分化的数学模型	231
第一节 问题提出	231
第二节 问题分析	232
第三节 模型的建立与求解	232
第四节 讨论与应用	234
参考文献	235
第十三章 打假问题的机理数学分析	236
第一节 问题提出	236
第二节 合理假设	236
第三节 模型的建立与求解	237
第四节 结果分析与模型改进	238
参考文献	240
第十四章 足球比赛排名问题	241
第一节 问题提出	241
第二节 问题分析	242
第三节 合理假设	244
第四节 建模与求解	245
第五节 模型的检验和比较	251

第六节 模型的进一步分析	252
第七节 其他观点与其他方法	252
第八节 实际应用	254
参考文献	258
第十五章 大象群落的稳定性分析	259
第一节 问题的重述与分析	259
第二节 问题的总假设和符号说明	261
第三节 模型的建立与求解	261
第四节 模型的评价	269
第五节 模型的推广	270
参考文献	270
第十六章 火车便餐最优价格方案	271
第一节 问题提出	271
第二节 问题的分析	271
第三节 合理假设与符号	272
第四节 数学模型的建立与求解	272
第五节 改进与推广	275
参考文献	275
第十七章 南京市 GDP 的灰色预测	276
第一节 问题提出与问题分析	276
第二节 $GM(1, 1)$ 模型	277
第三节 $GM(1, 1)$ 的修正	280
第四节 进一步讨论与分析	281
参考文献	282
第十八章 水星进动之谜	283
第一节 问题的提出	283
第二节 问题分析	283
第三节 合理假设与符号说明	284
第四节 模型的建立	284
第五节 模型 II 的求解	285
参考文献	288
第十九章 影院最优设计方案	289
第一节 问题的重述与分析	289
第二节 问题的假设和符号说明	290

第三节 模型的建立与求解	291
第四节 模型的检验	299
第五节 模型的评价	300
第六节 模型的推广	300
参考文献	300
第二十章 货运公司收益问题的研究	301
第一节 问题的重述与分析	301
第二节 问题的假设和符号说明	303
第三节 模型的建立与求解	304
第四节 模型的评价	312
第五节 模型的推广	312
参考文献	313

第一篇 通用方法

问题 树上有十只鸟，开枪打死一只，还剩几只？

分析 这问题就是一道数学应用题(应该是小学生的)，正确答案应该是 9 只。但它照样是数学建模问题，不过答案就不重要了，重要的是过程。真正的数学建模高手应该这样回答这道题。

建模与求解

“是无声手枪或别的无声的枪吗？”

“不是。”

“枪声有多大？”

“80~100 分贝。”

“那就是说会震得耳朵疼？”

“是。”

“在这个城市里打鸟犯不犯法？”

“不犯。”

“您确定那只鸟真的被打死啦？”

“确定。”

“OK，树上的鸟里有没有聋子？”

“没有。”

“有没有关在笼子里的？”

“没有。”

“边上还有没有其他的树，树上还有没有其他的鸟？”

“没有。”

“有没有残疾的或饿得飞不动的鸟？”

“没有。”

“打鸟的人眼有没有花？保证是十只？”

“没有花，就十只。”

“有没有傻得不怕死的鸟？”

“都怕死。”

“会不会一枪打死两只鸟？”

“不会。”

“所有的鸟都可以自由活动吗？”

“完全可以。”

“如果您的回答没有骗人，打死的鸟要是挂在树上没掉下来，那么就剩一只，如果掉下来，就一只不剩。”

不是开玩笑，这就是数学建模。从不同的角度思考一个问题，想尽所有的可能，正所谓智者千虑，绝无一失，这才是数学建模的高手。

第一章 数学建模导论

第一节 引言

21 世纪是个创新开拓的新时代,近几年大学扩大了招生,但创造性的人才仍是一种稀有的人力资源。这是因为当前及以前的教育是以应试为主的教育,素质教育尤其是创新教育普遍被忽视。那么对面向未来并期盼成功的广大师生来说,应当认真思考这样一个问题:自己能否成为受欢迎的创造性人才?

为了使自己成为创造性人才,当代大学生应当树立这样一种认识:在培养学科能力上下功夫以利就业固然重要,而在科技活动中培养创新能力以适应知识经济时代的需要,更是一种前瞻性的战略。

因此,当你在第一课堂废寝忘食地刻苦攻读的同时,千万不要忘记投身各种课外科技竞赛活动,因为这里既是创新的擂台,也是学习和成才的特别课堂。

一、在大学校园里有这样的课堂吗?

答:有!目前,大学生科技竞赛活动主要有以下几项:

(1) “挑战杯”全国大学生课外科技学术科技作品竞赛(1989 年开始,2005 年为第 10 届);

(2) 全国大学生数学建模竞赛(1992 年开始,每年 9 月份进行),目前为大学生竞赛中规模最大的课外科技竞赛活动。值得一提的是美国大学生数学建模竞赛(1985 年开始,每年一二月份进行,2006 年为第 22 届);

(3) 全国大学生电子设计竞赛(每年一次);

(4) 大学生计算机网络竞赛;

(5) “挑战杯”中国大学生创业计划竞赛;

(6) 部分省(市)高校还组织了一些相关活动与竞赛(如全国部分高校的研究生数学建模竞赛(到 2005 年已办了两届)、许多学校的校级数学建模竞赛、校级数学应用竞赛、“中国电机工程学会杯”全国大学生电工数学建模竞赛(到 2005 年已办了 3 届)、苏北数学建模竞赛等)。

这些科技比赛活动无论规模大小,其目的只有一个:培养大学生的科技创新素质与能力。

二、大学生科技活动的意义与作用

这样一些科技活动有以下意义与作用:

- (1) 使大学生对加强基础理论学习有了新认识;
- (2) 使大学生的创新能力与实践能力有了提高;
- (3) 使大学生综合素质得到了提高;
- (4) 使大学生增强了全局观念、整体意识和协调能力。

一句话:大学生不是需要填满知识的容器,而是必须点燃的火炬。

三、四个重要问题

本书的主题是讨论数学的作用以及如何应用数学,这里的关键问题是如何用。一种介于数学(数学与应用数学)、计算机科学(数学含量高的学科又如物理等)与实际问题之间的技术是很重要的,那就是数学建模、数值分析。

数学应用的钥匙是数学建模,今天在技术科学中最有用的数学领域是数值分析和数学建模(美国科学工程和公共事务政策委员会报告《美国数学的现在和未来》(1986年))。因此我们的主题首先涉及数学建模与数学建模竞赛(mathematical contest in modeling, MCM),而它立即使人联想到如下四个问题:

- (1) 我们在学校里学的数学与应用数学有何用?
- (2) 何为数学模型、数学建模以及数学建模竞赛?
- (3) 数学建模以及数学建模竞赛与我们的关系有多大?
- (4) 如何学习数学建模并参与其活动呢?

我们在以下四节中做出回答。

第二节 数学与应用数学的作用

一、几个典型的例子

(一) 冯·诺依曼型计算机

目前世界上运行的计算机,尽管种类繁多,但按其数据加工方式可以分为两大类:串行计算机与并行计算机。

所谓串行计算机也就是冯·诺依曼型计算机。就其整机原理和设计思想来说,现在的计算机是根据美国数学家冯·诺依曼提出(创建的数学模型)的原理设计并制造出来的。比如,1944年世界上出现了第一台电子数字计算机“埃尼阿克”(ENIAC)。它的基本原理是:操作对象是以二进制代码形式表示的数据和指令,把它们一起存放在同一存储器中,同时使用了少量的寄存器用于存放当前执行的

指令和数据, 计算机不断地顺序完成存取和执行指令的重复工作。流行至今的存储程序计算机就是数学家冯·诺依曼和数学功底很强、精通计算又懂得电子学的 J.W.Mauchly 以及杰出电子学家 J. Eckert 共同研究并按此(冯·诺依曼的基本结构)设计的结果(图 1.2.1)。

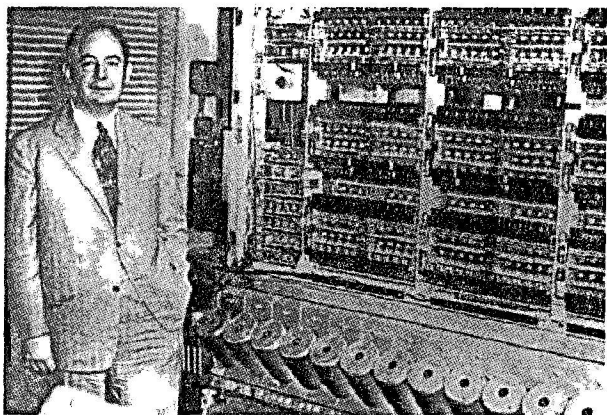


图 1.2.1 冯·诺依曼与计算机

(二) 王选与北大方正集团公司

方正、华光激光照排系统的发明人王选(图 1.2.2)为数学出身, 人称“中国汉字激光照排之父”, 主持研制了华光、方正汉字激光照排系统, “高倍率信息压缩技术和全电子照排方案”。对于其中研制的最大技术难题——汉字的存储量问题, 他研制出了一套高达 1:500 的高倍率汉字型信息压缩方案, 并推导出一套逆推公式, 用一连串逼近直线临近点, 准确而迅速地复原。方正集团公司总裁办公室主任张炳贤先生曾说: “培养跨世纪的人才, 数学要起很大作用。”方正集团公司的照排系统就是数学应用的典型例子, 主要产品来源于数学的应用。王选教授应用压缩技术这一数学方法解决了计算机实现中的难题。



图 1.2.2 王选

王选统计: 世界上获国际计算机最高奖——图灵奖的 20 多人几乎都是学数学的, 至于国内计算机界, 1988 年曾荣获国家科委授予的“国家级有突出贡献的青年专家”称号的绝大多数人都毕业于北京大学数学系。

(三) 比尔·盖茨与数学建模

软件之王比尔·盖茨(图 1.2.3)早在湖滨中学读书时, 就对数学产生了浓厚的



图 1.2.3 比尔·盖茨

兴趣，并成绩优异。比尔回忆：“我在读 8 年级时，其他学科都考得不尽理想，但我的数学却始终没有考败过。”他的中学数学老师评价说：“他能用一种最简易的方法解决某个代数的或计算机问题……，他甚至可以和我工作过多年的那些优秀数学家媲美”。在进入哈佛大学之后，他仍然对数学情有独钟，并曾研究数学难题“我们那个地方的厨师做事粗心大意。他做出的煎饼大的大，小的小，外形各不一样。因此，给顾客送去煎饼时，总爱重新摆放一下，我从盘子上面抓住几个煎饼，把它们翻到下面去，不停地这样做(翻动的个数是变化的

的)，翻动的次数根据需要进行，其结果是最小的依次去最上面，最大的则去最下面。现在的问题是：如果有 N 个煎饼，我需要至少翻动多少次才能重新安排好煎饼？”这个问题看起来非常简易，真正动手解决却非常之难。比尔解决了它，论文于 1979 年发表在《非线性数学》杂志上。比尔大学期间在数学与计算机方向上一直在抉择，他分析发现自己不是哈佛里最好的数学尖子，但是在计算机学科方面是无人能敌的，于是定下了计算机方向，甚至在多年后他回忆说他险些成了数学家。值得一提的是比尔具有数学建模经验，如在湖滨中学时就搞过课程设计、交通流量的研究、制作烹调书，特别是建模后成功地编制了一套管理课程安排计划的计算机程序和一套学生注册的计算机管理程序。由此，其卓越的建模能力可见一斑。

(四) 几则数学应用新闻

现今世界上流行这样的说法，“未来高科技的核心是数学技术”。报上刊载的几则新闻就是证明：

1. 科学家称用数学方法可预测和改变婚姻走向

日前，来自美国的婚姻研究者 and 应用数学家宣布，他们创造了一个数学模型，可以用来准确预测哪些夫妻将不能白头偕老。他们还表示，这套模型可以帮助夫妻克服那些可能使他们走上离婚之路的行为。据公式的设计者称，这套公式的准确率高达 94%。华盛顿大学心理学教授、人际关系研究所主任约翰·戈特曼说：“当牛顿把数学方法引入科学，物理学才真正起飞。”“而心理学研究中，数学的方法往往被忽视。”

华盛顿大学应用数学系教授詹姆斯·穆雷说，我们做的是提取婚姻中的关键因素到模型中，以使它具有解释性和预测性，“虽然我们使用的数学方法非常普通，但是模型出奇的准确”。截至目前，这套数学模型已经对 700 多对夫妇的婚姻持久性进行了检验。这些夫妇最初登记结婚时，研究人员利用这套数学模型判断他们今后是否会离婚，判断正确率高达 94%。这个模型使用的数据来自戈特曼教授

在他实验室里拍摄的数百位夫妻谈话的录影带,生理学上的数据(如谈话停顿的时间)也被收集起来进行分析。

穆雷说,因为从交谈中能够显示出夫妻之间存在的根本性问题,这也是这个模型准确性高的原因。

“在这个模型之前,其他关于离婚的预测往往是不准确的,我们也没有办法来分析为什么有些婚姻能长时间保持而有些夫妻却要走向离婚。”

他说,模型的关键在于把夫妻谈话过程中积极的和消极的相互影响的比例进行量化,这个神奇的比例是 5:1,如果比例小于它,婚姻就会遇到问题。

“当幸福家庭中的夫妻双方谈论一些重要的事情时,即使是在争论,他们也会笑和开玩笑,这就是感情的标志,因为他们在进行一些情感上的交流。”戈特曼说,“但是许多夫妻不知道去传递或者创造幽默感,这意味着许多夫妻忙于相互斗争而无暇顾及情感的交流。在这个数学模型出现之前,我们不知道这些。”穆雷说,当一对夫妇接受测试时,需要就某个话题如感情、金钱等进行 15 分钟的对话。研究人员根据对话的细节进行打分。比如说,当一方将另一方逗乐时,可以得正 2 分,而一方表示出对另一方的轻蔑时,将得到负 4 分。研究人员将每个细节的分数输入表格中,然后“像计算道·琼斯工业指数一样”算出婚姻指数。

他说,这种数学方法是如此清晰,而且它能够生动地显现出两个谈话的人之间发生了什么。它也能够使研究者判断出如果婚姻中的某些习惯发生改变,夫妻间将会怎么样。例如,如果一个丈夫承认自己被妻子影响,这个正面相互作用的数字就会增长。

穆雷认为,这套数学模型不仅可以用来推测婚姻的持续性,还有助于夫妻双方早日发现婚姻中存在的问题,改善婚姻质量。

2. 南海海洋所完成数学模型预报热带风暴课题

《科学时报》广州 3 月 19 日讯:日前“热带风暴下海岸波浪、潮汐、海流耦合数学模型”在中国科学院南海海洋研究所诞生。以著名物理海洋学家文圣常院士为主任的鉴定委员会专家认为,该数学模型及数值模拟可应用于热带风暴下海岸波浪、潮汐、海流耦合数值预报并可广泛应用于海岸与海洋工程的水动力环境计算和可行性研究,总体上达到国际先进水平,部分处于国际领先水平。

3. 科学家利用计算机数学模型预测流感病毒的变异

根据最新的研究结果,英国科学家发明了一种计算机模型,它能够模拟流感病毒的进化,将被用来预测将来流感病毒的变异情况。根据发表于修改日期出版的《自然》杂志上的研究报告,这一计算机数学模型还能够使得研究人员研制出一种更为普遍的疫苗,接种这种疫苗不仅能够预防现在流行的病毒,还能够预防新型流感病毒的感染。

负责该研究的是来自英国伦敦帝国医学院的流行病学教授 Neil Ferguson。他

说：“了解流感病毒为什么会发生进化，对于改进我们对抗流感病毒的方法十分重要，因为我们在面对流感病毒时的一个关键问题就是流感病毒几乎每年都会发生改变，这就意味着我们每天都需要研制新的疫苗，每年人们都需要接受免疫接种。”他告诉路透社记者说：“这种每年疫苗的发展也需要预测下一年会出现哪一种类型的病毒。通过改善我们对病毒进化的理解，我们的工作将有望更好地预测将来的病毒类型。”

二、高技术本质上是一种数学技术

以上的例子和新闻充分显示出了以数学建模为中心的“数学技术”在各个方面发展中所起的重要作用。可以说在许多重大高科技行动中，从事先设计、制订方案到信息传递和指挥控制，处处依赖于数学技术。可以毫不夸张地说：数学起着“智囊”和“参谋指挥中心”的作用。

近几年的美国数学界总结报告指出：“今天，在技术(科学)中最有用的数学研究领域是数值分析和数学建模”。

少数有远见的科学家就曾深刻地指出：“太少的人认识到当今如此受到称颂的‘高技术’本质上是一种数学技术。”

未来世界，人人都有可能面对着电脑屏幕和电脑遥控(智能机器人、电饭煲、全自动洗衣机、遥控电视等)，数学技术将是一种应用最广泛、最直接、最及时、最富创造精神的实用技术。

正因为如此，1992年5月，国际数学联盟时任主席里昂斯(J. L. Lions)以联盟名义，宣告2000年为世界数学家年(WMY2000)。

第三节 数学模型、数学建模以及数学建模竞赛

一、传统的数学教育

(一) 从内容上分析——内容陈旧，内容与实际、时代脱轨

数学是研究现实世界中的空间形式与数量关系的一门科学，而形与数的进一步拓广再加上迅速发展的计算与应用的“异体受精”，使人们对数学是什么的认识也有了进一步的发展，比如一种现代观点就认为数学是模式和秩序的科学。其中模式即指寻求数、空间，科学、计算机以及想象中的模式，数学的研究对象为数、机会、算法和变化的各种模式。

今天的现代数学科学包括核心数学(即纯粹数学)、应用数学、统计学和计算数学、高度数学化的领域(如计算机科学、理论物理、量子力学、计量经济学等)。而在大中学校中非相关专业的学生所学的数学课程中涉及纯数学较多，其他数学