

微积分与线性代数

宋 翔 平 侯 凤 波 主 编

(上册)



中国农业科技出版社

全国高等职业技术教育类专业教材
高等职业教育教材建设指导委员会审定

微积分与线性代数（上册）

主 审：刘德有
主 编：宋和平 侯风波
副主编：王增富 王会波
参 编：李仁芮 牛燕影 潘承松 赵会娟
 相秀芬 罗胡英 阴立群

中国农业科技出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分与线性代数/宋和平等主编. —北京:中国农业科技出版社, 2001

ISBN 7-80167-213-5

I. 微... II. 宋... III. ①微积分②线性代数
IV. ①0172②0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 055119 号

责任编辑
出版发行

经 销
印 刷
开 本
印 数
版 次
定 价

左月秋

中国农业科技出版社 邮编: 100081
电话: (010)68919711; 62173607; 传真 62189014
新华书店北京发行所
河北昌黎县万利印刷厂

850mm×1168mm 1/32 印张: 10.75
1~4000册 字数: 241千字
2001年8月第一版 2001年8月第1次印刷
(上、下册)36.00元

前 言

本书是高等职业教育规划教材,是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》,针对高职高专经济类及管理类各专业编写的高职高专教材。本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分应用、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程、行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、符号计算系统 Mathematica 及其应用等内容。本书特别注重贯彻“掌握概念、强化应用,以必需够用为度”的教学原则,具有如下 9 大特点:

1、在保证数学概念准确性的前提下,尽量借助几何直观,力求使抽象的数学概念形象化,使于读者理解。

2、理论推导或证明以解释清楚有关结论为度,不追求过分的理论上的系统性。

3、例题丰富,使于学生自学。

4、注重数学概念与实际问题的联系,以培养学生的应用意识。

5、引入了用计算机做数学的系统——Mathematica 系统,便于学生借助于计算机用数学解决实际问题。

6、每章末都有例题与习题,使于学生复习巩固及教师习题课的选材。

7、在内容处理上兼顾学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力、以及较熟练的运算能力和综合运用所学的知识分析问题、解决问题的能力培养。

8、注重函数的三种描述方法,对课程的每一主题都从几何、数使和解析三个方面加以体现,避免了只注重解析推导。

9、对每一个概念都注意从其产生背景或实际问题抽象出数学概念,并注重性质、计算与应用的关系。

本书框架结构由宋和平、侯风波设计。本书分上、下两册出版。本书由宋和平、侯风波主编；王增富、王会波任副主编；编委有宋和平、赵会娟、罗胡英（第六章、第七章、第八章、第九章）；侯风波（第一章、第十四章）；李仁芮（第二章、第三章）；潘承松、相秀芬（第四章、第五章）；牛燕影（第十章、第十一章）王增富、阴立群（第十二章）王增富、王会波（第十三章）；全书由刘德有主审。

由于编者的水平所限，书中若有不当之处，恳请读者与同仁给予批评指正。

编 者

2001年5月28日

目 录

第一章 函数	1
第一节 函数及其性质	1
第二节 初等函数	8
第三节 经济中常用的函数	15
第二章 极限与连续	27
第一节 极限	27
第二节 两个重要极限与无穷小的比较	51
第三节 函数的连续性	63
第三章 导数与微分	88
第一节 导数的概念	88
第二节 求导法则	104
第三节 三个求导技巧	117
第四节 高阶导数	124
第五节 微分及其在近似计算中的应用	127
第四章 一元函数微分学应用	151
第一节 中值定理	151
第二节 罗比塔法则	157
第三节 函数的单调性与极值	164
第四节 函数的最值及其应用	171
第五节 微分在经济学中的应用	175
第六节 函数图形的凹向与拐点	186
第五章 一元函数积分学	207
第一节 不定积分的概念及性质	207

第二节	不定积分的积分方法	214
第三节	定积分的概念与性质	238
第四节	微积分基本公式	249
第五节	定积分的积分方法	255
第六节	广义积分	264
第七节	定积分的应用	273
附录	317
附录 A	希腊字母表	317
附录 B	初等数学常用公式	317
附录 C	平面常用曲线及其方程	320
附录 D	简易积分表	323

第一章 函数

客观世界中，许多变量之间的关系都能用函数描述。在中学，我们已经学习过一次函数($y=kx+b$)、二次函数($y=ax^2+bx+c$)、幂函数($y=x^a$)、指数函数($y=a^x$)、对数函数($y=\log_a x$)、三角函数($y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\csc x$)及反三角函数($y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$)，并且对这些函数的性质做了初步的研究。由于微积分学的研究对象就是函数，因此，我们在学习微积分的核心内容之前，先对函数的概念与性质进行讨论。

第一节 函数及其性质

一、函数的概念

1、函数的定义

定义1 设 x, y 为两个变量， D 为一非空实数集，如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照某种对应法则 f 有唯一确定的数值和它对应，则称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数。记作 $y=f(x)$ ，并称 x 为自变量， y 为因变量，自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域，习惯上，也称变量 y 是变量 x 的函数。

根据函数的上述定义，我们有：

(1) 如果 $x_0 \in D$ ，则称函数在 x_0 点有定义，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 。因此，函数的定义域就是使函数

有定义的 x 值的全体，而相应的函数值的全体 $\{f(x) | x \in D\}$ 称为函数的值域。

(2) 定义域和对应法则是函数的两要素。两个函数相等的充分必要条件是它们具有相同的对应法则及相同的定义域。

(3) 函数的定义域 D 与值域 M 均是由实数构成的集合。

(4) 若 y 是 x 的函数，也称 y 是 x 的象，称 x 是 y 的一个原象。由函数的定义知，一个原象对应着唯一的一个象，而一个象可以是若干个原象的象。这就是说，自变量 x 的每一个取值，通过法则 f 只能对应唯一的一个函数值 y ，而函数 y 的某个值可以是自变量 x 取不同值时的函数值。因此，通常称定义1所定义的函数为单值函数。本书只研究单值函数。

2、函数的表示法

函数的表示法一般有三种：解析法、表格法及图象法。

(1) 解析法 解析法又称为公式法，它是直接用数学式子表示两个变量间的函数关系的方法。它的优点是准确、完整，便于理论分析，是微积分中常用的一种表示函数的方法。

(2) 表格法 表格法就是将自变量 x 的一系列取值与对应的函数值列成表格。如平方表、对数表、三角函数表等都是用表格法表示的函数。表格法的优点是使用方便，实际工作中经常使用。表格法的缺点是不完整，即有些函数不能通过表格法给出自变量每个取值所对应的函数值。

(3) 图象法 若横坐标为自变量 x 的取值，纵坐标为对应的函数值 y ，则函数 $y=f(x)$ 的每对取值 (x, y) 都对应着平面直角坐标系中一个点。这些点的全体就形成平面上的一条曲线。这条

曲线从几何上描述了函数 $y=f(x)$ 的变化规律。因此，用图象表示函数的方法就称为图象法。它的优点是直观，缺点是不够准确和完整。

需要说明的是，除上面所述的三种表示函数的方法外，还有其它的表示函数的方法。如“ y 为不超过 x 的最大整数”，是用语言定义的函数，通常记为 $y=[x]$ 。

例如 $[2.5]=2$, $[-2.5]=-3$ 。

3、分段函数

在实际问题中，有时会碰到在定义域内自变量的不同取值范围内，函数分别用不同的解析式表达，这类函数称为分段函数。

例如 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

和符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

都是分段函数

注意 求分段函数在一点 x_0 处的函数值时，首先要找出 x_0 的所属范围，然后再代入相应的函数表达式，特别应注意自变量取值范围的分界点(也称为分段函数的分段点)处的函数值是如何定义的。

例1 设 $f(x)=\begin{cases} -1 & -2 < x \leq 0 \\ 2\sqrt{x} & 0 < x \leq 1 \\ 2+x & 1 < x < +\infty \end{cases}$

求：(1) $f(x)$ 的定义域；(2) $f(x)$ 在 $x=-1, \frac{1}{4}, 1$ 处的函数值；(3) 画出 $f(x)$ 的图象。

解 (1) $f(x)$ 的定义域是自变量 x 取值的全体，对分段函数

而言, 是各部分取值范围之并集, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty) = (-2, +\infty)$ 。

$$(2) \because -1 \in (-2, 0)$$

$$\therefore f(-1) = -1$$

$$\because \frac{1}{4} \in (0, 1)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\because 1 \in (0, 1)$$

$$\therefore f(1) = 2\sqrt{1} = 2$$

(3) $f(x)$ 的图象如图1-1

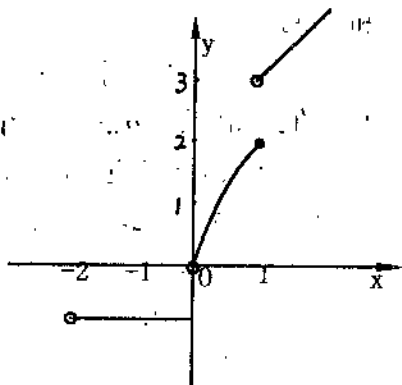


图 1-1

二、反函数

函数 $y=f(x)$ 描述了因变量 y 随自变量 x 的变化规律。给定一个 x 值, 可以由 $y=f(x)$ 求出 y 的相应值。但是在实际问题中有的时候需要反过来研究变量 x 是怎样随着 y 的变化而变化的。例如, 某商品单价为 p , 销售量为 x , 销售额为 y , 则 $y=px$, 它表示销售额是销售量的函数。但反过来, 如果给定了销售额 y , 则可由 $x=\frac{y}{p}$ 确定销售量 x , 这实际上确定了销售量是销售额的函数, 我们称 $x=\frac{y}{p}$ 为 $y=px$ 的反函数。

定义2 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数, 其值域为 M 。如果对每个 $y \in M$, 都有唯一的 $x \in D$, 使得 $y=f(x)$, 则称 x 是定义在 M 上以 y 为自变量的函数, 记此函数为: $x=f^{-1}(y) \quad y \in M$ 并称其为 $y=f(x)$ 的反函数。

在反函数表达式 $x=f^{-1}(y)$ 中, y 为自变量, x 为因变量。由于 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 有相同的对应规则 f^{-1} , 和相同的定义域 M , 故

它们是同一个函数。习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，故 $y=f(x)$ 的反函数常记为 $y=f^{-1}(x)$ ，称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的矫形反函数，称 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的直接反函数。

注意 直接反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是从函数 $y=f(x)$ 中直接解出 x 而得到的；矫形反函数先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$ ，然后再将 x 与 y 互换，即得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 。

例2 求指数函数 $y=e^x$ 的直接反函数与矫形反函数。

解 由 $y=e^x$ 两边取自然对数，可解出 $x=\ln y$ 即为 $y=e^x$ 的直接反函数，于是 $y=\ln x$ 为 $y=e^x$ 的矫形反函数。

在平面直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形与其矫形反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称如图1-2所示，这是因为如果点 $M(a, b)$ 在函数 $y=f(x)$ 的图形上，则 $b=f(a)$ ，于是 $a=f^{-1}(b)$ ，从而点 $M'(b, a)$ 必在 $y=f^{-1}(x)$ 的图形上。而点 $M'(b, a)$ 与点 $M(a, b)$ 关于直线 $y=x$ 对称。这样，由 $y=f(x)$ 的图形，利用对称性可得 $y=f^{-1}(x)$ 的图形。

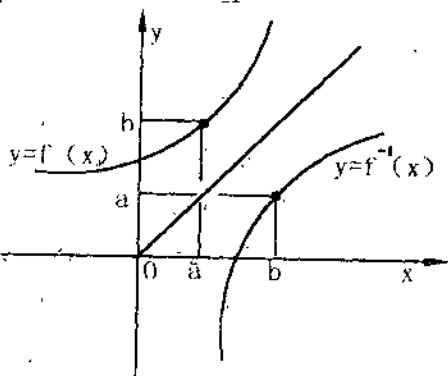


图 1-2

三、函数的几种特性

1、函数的奇偶性

定义3: 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于任何 $x \in D$ ，都有 $f(-x) = f(x)$ （或 $f(-x) = -f(x)$ ），则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）。

如 $y=x^2$, $y=\cos x$ 都是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数。

$y=x^3$, 则是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数。

注意 偶函数的图象关于 y 轴对称(图1-3); 奇函数的图象关于坐标原点对称(图1-4)。

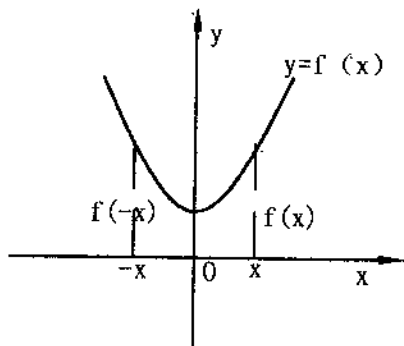


图 1-3

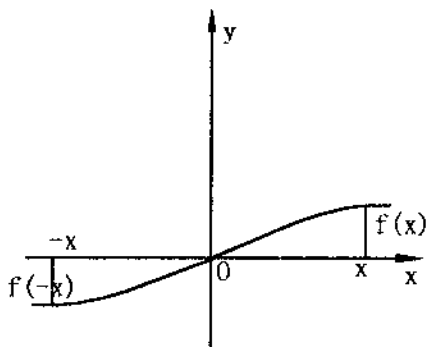


图 1-4

2、函数的有界性

定义4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在一个正数 M , 使得对任意 $x \in I$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界。否则, 称 $f(x)$ 在区间 I 上无界。若 $f(x)$ 在其定义域上是有界的, 则称 $f(x)$ 为有界函数。

如 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界的。这是因为对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|\sin x| \leq 1$ 。

3、函数的周期性

定义5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个非零常数 T , 使得对任意 $x \in D$, 都有 $x \pm T \in D$ 且 $f(x \pm T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期。通常周期函数的周期是指它的最小正周期。

如 $y=\sin x$ 是周期函数， 2π ， 4π ， 6π 及 $2k\pi$ (k 为非零整数)都是它的周期，而 2π 是它的最小正周期。

4、函数的单调性

定义6 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义， x_1 及 x_2 为区间 I 上任意两点。若当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；若当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的；若 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（或单调减少）的，则称 I 为 $f(x)$ 的单调增区间（或单调减区间）；若 $f(x)$ 在其定义域上是单调增加（或单调减少的），则称 $f(x)$ 是单增函数（或单减函数）。单增函数与单减函数统称为单调函数。

如 $y=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的；在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减少的。

值得注意的是：只有单调函数才有反函数。

练习题 1-1

1、设 $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ，求 $f(1)$ 及 $f(0)$

$$2、\text{设} f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ 2x & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

求 $f(-100)$ ， $f(\frac{1}{100})$ ， $f(100)$

3、求函数 $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ 的定义域

4、判别下列函数是否相同：

(1) $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$

(2) $y = \cos^2 x$ 与 $y = 1 - \sin^2 x$ 是否表示同一个函数?

(3) $y = 2 + x$ 与 $y = \frac{4 - x^2}{2 - x}$ 是否表示同一个函数?

5、判断函数 $f(x) = x^2 \sin 2x$ 的奇偶性。

6、判断函数 $y = x + \ln x$ 的单调增减性。

7、按铁路部门有关规定，成年人每人携带的行李在20kg以内免费；超过免费重量在5kg之内时，收包裹费12元；超过免费重量在5kg到50kg时，收包裹费120.3元。试将乘客的包裹费用表示成包裹重量的函数。

练习题 1-1 答案

1、 $f(1) = 2$; $f(0) = 1$

2、 $f(-100) = -1$; $f\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{50}$; $f(100) = 10000$

3、 $(-3, 3)$

4、(1) 不同; (2) 相同; (3) 不同

5、奇函数

6、单调增加函数

7、 $R(q) = \begin{cases} 0 & 0 \leq q \leq 20 \\ 12 & 20 < q \leq 25 \\ 120.3 & 25 < q \leq 70 \end{cases}$

第二节 初等函数

为了以后讨论问题方便，本节对中学阶段所学的函数进行复习，并给出基本初等函数与初等函数的概念。

一、基本初等函数

下列六种函数统称为基本初等函数

1、常值函数

$y=c$ (c 为常数) 称为常值函数, 简称常函数, 它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$ 。

2、幂函数

$y=x^a$ ($a \in R$) 称为幂函数, 它的定义域随 a 而异, 但不论 a 为何值, x^a 在 $(0, +\infty)$ 内总有定义。

3、指数函数

$y=a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 称为指数函数, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

4、对数函数

$y=\log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 称为对数函数, 它的定义域为 $(0, +\infty)$

5、三角函数

三角函数包括正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数及余割函数。

(1) 正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且以 2π 为周期, 因为 $|\sin x| \leq 1$, 所以 $y=\sin x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的有界函数。如图1-5

(2) 余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且以 2π 为周期, 因为 $|\cos x| \leq 1$, 所以 $y=\cos x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的有界函数。如图1-6

(3) 正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为

$\left\{x \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, K \text{ 为整数} \right\}$, 且以 π 为周期。(如图1-7)

(4) 余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x \in R, x \neq k\pi, k \text{ 为整数}\}$, 且以 π 为周期。如图1-8

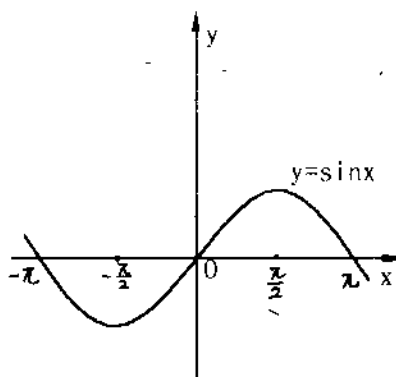


图1-5

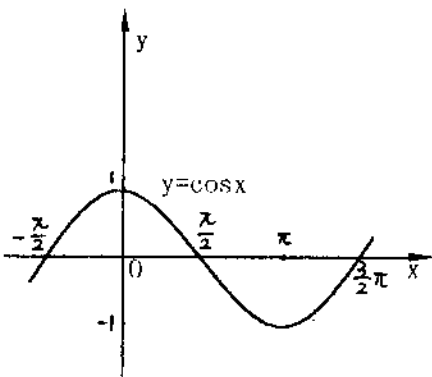


图1-6

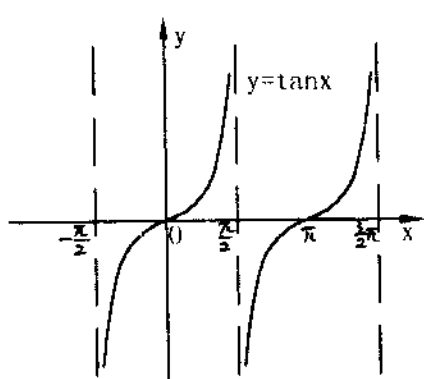


图1-7

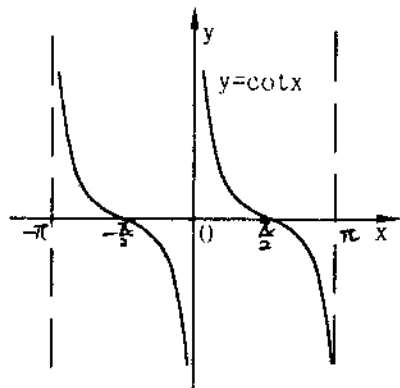


图1-8

(5) 正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

(6) 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

6、反三角函数

(1) 反正弦函数 $y = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 是单调增加的奇函数, 有界。如图1-9

(2) 反余弦函数 $y = \arccos x$, $x \in (-1, 1)$, $y \in (0, \pi)$ 是单调减少函数, 有界。如图1-10