中国高等教育学会教育数学专业委员会组编

21世纪职业院校规划教材·数学系列

线性代数与概率统计

富强 白素英 主编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

中国高等教育学会教育数学专业委员会组编

21世纪职业院校规划教材·数学系列

线性代数与概率统计

主　编：富　强　白素英

副主编：张淑娟　梁盛泉

主　审：韩云瑞

编　委：（按姓氏笔画排序）

白素英　张治俊　张淑娟

李贺贤　易存晓　庞淑萍

杨圣娟　梁盛泉　富　强

WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率统计/富强，白素英主编．—武汉：武汉大学出版社，2008.1

21世纪职业院校规划教材·数学系列

ISBN 978-7-307-06083-8

Ⅰ.线…　Ⅱ.①富…　②白…　Ⅲ.①线性代数—高等学校：技术学校—教材　②概率论—高等学校：技术学校—教材　③数理统计—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ.O151.2　O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第003116号

责任编辑：任　翔　　责任校对：刘　欣　　版式设计：詹锦玲

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)

印刷：湖北新华印务有限公司

开本：787×1092　1/16　印张：12.5　字数：317千字　插页：1

版次：2008年1月第1版　　2008年1月第1次印刷

ISBN 978-7-307-06083-8/O·378　　定价：25.00元

内容简介

本书是中国高等教育学会教育数学专业委员会组织编写的“高职高专数学精品课教材”之一. 是作者经过二十多年教学实践和在吸收我国“十五”期间高职高专经济管理类高等数学教改成果的基础上编写而成的. 本书在内容安排及编写格式上，充分考虑到高职高专学生的特点，紧密联系实际，并把数学知识与教学方法融为一体，通俗易懂，简明适用，便于自学. 书中列举了一些日常生活中有趣的实例，以提高学生的学习兴趣和运用数学知识解决实际问题的能力. 编者坚持“以实用为主，以理论必需、够用为度”的教学原则，突出三个基本，即“基本概念、基本思想、基本方法”，力求使学生在较为系统地掌握数学概念、思想和方法的同时，掌握数学的基本理论，为他们今后的工作与学习打下必要的数学基础与良好的数学素质. 在编写过程中，我们努力使教材成为学生易学、教师易教的实用性较强的教材.

本书主要内容包括行列式与矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量的分布及其数字特征、统计初步、MATLAB 在线性代数与概率统计中的应用. 本书内容简捷，概念清晰，语言简明，注重培养学生用数学概念、数学思想及方法来消化吸纳经济概念及经济原理的能力，强化学生应用所学的数学知识求解数学问题的能力，特别是将数学软件包 MATLAB 结合具体教学内容进行讲授，可极大地提高学生利用计算机求解数学模型的能力. 每节后附有相应的思考题与练习题. 每章后附有习题和自测题. 在每章的后面还附有与高等数学发展有关的数学家的经典故事，以扩大学生知识面，增加学习兴趣.

本书既适合高职高专院校使用，也适合成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用，还可作为经济管理人员更新知识的自学用书或参考用书.

前　言

教材作为学校教学内容和教学方法的知识载体，在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位. 为了适应高等院校培养精理知文的应用型、复合型高级专门人才，为了能更好地将数学课程与实际经济管理专业教学相结合，中国高等教育学会教育数学专业委员会，在认真总结全国高职高专院校经济类各专业高等数学课程教学改革经验的基础上，组织编写了“21 世纪职业院校规划教材”，本书正是其中之一.

本教材内容的选取充分体现了高职、高专基础课教学中“以应用为主，以理论必需、够用为度”的原则，以“强化概念，注重应用”为依据，既考虑了人才培养的应用性，又能使学生具有一定的可持续发展性. 在教材编写过程中，我们主要遵循以下原则：

1. 注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识和兴趣. 培养学生用数学的原理和方法消化吸收经济概念、经济原理和专业知识的能力. 加强数学建模教学内容，将经济问题转化为数学问题的思想贯穿各章，注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换.

2. 注重对学生能力的培养，注意提高学生基本素质. 对基本概念、理论、思想方法的阐述准确、简洁、透彻、深入. 取材上，精选内容，突出重点，强调应用，注意奠定学生创新能力的基础. 为了突出重点，强化对难点的理解、消化，对一些重点问题给出说明或注意.

3. 缓解课时少与教学内容多的矛盾，恰当把握教学内容的深度和广度，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示微积分的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性.

4. 结合具体教学内容学习数学软件包 MATLAB，便于读者结合实际教学条件灵活处理，力求做到易教、易学、易懂、易用.

5. 充分考虑高职高专学生的特点，以符合高职高专学生的认知结构，便于学生自学. 在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力，以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力的培养。对课程的每一主题都尽量从几何、数值和解析三个方面加以体现，避免只注重解析推导.

6. 注意有关概念及结果的实际情况解释，力求表达确切、思路清晰、通俗易懂，并注重数学思想与方法的阐述. 注意培养学生综合素质，体现数学课改革的新思路，数学教学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能，也就是要立足于综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力.

7. 每节后有思考题和练习题：通过思考题试图达到使学生能从新的角度理解概念，掌握运算；练习题难度较低，主要为学生巩固知识提供素材. 每章后有习题和自测题，习题可作为本章的综合练习题；自测题可作为每章学完后的小测验.

另外，本书的一个显著特色是紧密结合了高职高专经济管理类专业高等数学的教学实际，在各章节的知识体系中融入了一些经济管理类专业的知识，这种有针对性的安排融会了编者多年来从事高等数学教学的经验.

全书共分六章，主要内容包括行列式与矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量的

分布及其数字特征、统计初步、MATLAB 在线性代数与概率统计中的应用.

本书的编写是在中国高等教育学会教育数学专业委员会领导下，部分高职高专院校的教师通力协作的结果. 本书由富强、白素英担任主编，张淑娟、梁盛泉担任副主编. 哈尔滨金融高等专科学校的富强编写了第 1 章中的行列式部分，白素英编写了第 1 章中的矩阵部分和第 2 章的第 4 节；甘肃畜牧工程职业技术学院的张治俊编写了第 2 章的第 1、2、3、5 节，李贺贤编写了第 3 章，梁盛泉编写了第 4 章；哈尔滨金融高等专科学校的庞淑萍编写了第 5 章的第 1、2 节；河南工业职业技术学院的易存晓编写了第 5 章的第 3、4、5 节；北京市崇文区职工大学的张淑娟编写了第 6 章. 青岛滨海学院的杨圣娟参与了全书的校对审阅工作. 全书的结构安排、统稿、定稿工作由白素英承担.

本书的编写得到了中国高等教育学会教育数学专业委员会副理事长、清华大学韩云瑞教授的大力支持和热情帮助，他对本书的编写进行指导，提出了许多宝贵的意见并担任本书主审. 武汉大学出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，编写时间较仓促，书中难免有不妥之处，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善.

所有意见和建议请发往：bsy19591231@sina. com，作者不胜感谢.

编　者

2007 年 9 月

目　　录

第1章　行列式与矩阵

在现代管理中，有很多实际问题可归结为解一个线性方程组．行列式与矩阵理论是线性代数的重要组成部分，是研究线性方程组解法的重要工具，它在自然科学、工程技术、生产实际和经济管理中有着广泛的应用．线性代数的理论及其应用都离不开矩阵及其计算．矩阵可以把研究的问题化成简单的易于理解和分析的形式，可以把庞大且杂乱无章的数据变得有序，为我们应用计算机进行科学计算和处理日常事务带来了很大的方便与可能．

1.1　行　列　式

行列式的概念起源于解线性方程组．所谓线性方程组是指未知数的最高次数是一次的方程组．为此，我们回顾初等代数中的二、三元线性方程组的求解过程，从中引出二、三阶行列式的概念，然后把这些概念推广，得到 n 阶行列式的概念行列式的概念、性质及其计算，特别是化高阶行列式为低阶行列式的方法是解线性方程组与学习线性代数必要的基础知识，应给予充分注意．

1.1.1　行列式的概念

在中学的学习中，一定遇到过这样的问题：

$$\begin{cases} 8x+9y=a \\ 7x+8y=b \end{cases}$$

可以用加减法求解

$$\begin{cases} x=8a-9b \\ y=8b-7a \end{cases}$$

在这里可以引用一个算法：四个数排成两行两列$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$，前后各加一竖，叫二阶行列式，且规定$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$为二阶行列式之值．则

$$\begin{cases} x=\begin{vmatrix} a & 9 \\ b & 8 \end{vmatrix}=8a-9b \\ y=\begin{vmatrix} 8 & a \\ 7 & b \end{vmatrix}=8b-7a \end{cases}$$

九个数排成三行三列$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$，前后各加一竖，叫三阶行列式，且也规定

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 为三阶行

列式之值.

我们再看一个例题

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=a \\ x_1+3x_2-x_3=b \\ 2x_1+5x_2-2x_3=c \end{cases}$$

按三阶行列式计算

$$x_1=\begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ b & 3 & -1 \\ c & 5 & -2 \end{vmatrix}=-6a-2c-10b+6c+4b+5a=-a-6b+4c,$$

$$x_2=\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 1 & b & -1 \\ 2 & c & -2 \end{vmatrix}=-2b-2a-2c+4b+2a+c=2b-c,$$

$$x_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & b \\ 2 & 5 & c \end{vmatrix}=3c+4b+5a-6a-2c-5b=-a-b+c.$$

这就是利用行列式求解线性方程组的例子.但要注意的是上面两个线性方程组的系数行列式均为1.即

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}=64-63=1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-6-4-10+12+4+5=1.$$

为了把这种方法拓广,给出n阶行列式与n阶行列式之值,我们先规定a_{ij}的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\ |\text{去掉第}\ i\ \text{行}\ j\ \text{列所有元素}|\ \stackrel{\text{记为}}{\Rightarrow} A_{ij}$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

推而广之

n^2 个数排成 n 行 n 列 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$,前后各加一竖,叫 n 阶行列式,而且也规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

为 n 阶行列式之值.

1.1.2 行列式的性质

对 n 阶行列式,理论上可以证明如下性质成立(我们以一个特别的三阶行列式来验证):

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 5 & -2\end{vmatrix}=-6-4-10+12+4+5=1.$$

性质 1　将行列式的行与列对调，其值不变.

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ -2 & -1 & -2\end{vmatrix}=-6-10-4+12+4+5=1.$$

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式之值仅改变符号.

$$D=\begin{vmatrix}2 & 5 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-12-5-4+6+10+4=-1.$$

推论：　行列式中如果有两行(列)元素全相等时，此行列式为零.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-6-2-4+6+4+2=0.$$

也可认为将 D 的第一行与第三行互换，由于第一行与第三行全相等，跟没换一样，即 $D=-D$，推出 $D=0$

性质 3　行列式中某一行(列)全部元素乘以 k，等于用 k 乘以这个行列式.

$$\begin{vmatrix}1\times k & 2\times k & -2\times k\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 5 & -2\end{vmatrix}=-6k-4k-10k+12k+4k+5k=k\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 5 & -2\end{vmatrix}.$$

性质 4　行列式中如果有两行(列)的元素成比例，则此行列式为零；

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 4 & -4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=0$$

将第三行的比例系数提出，两行元素对应相等，行列式为零.

性质 5　如果行列式中，某一行(列)的元素都是两数之和，例如

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a'_{21}+a''_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a'_{23}+a''_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad \text{则 } \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a''_{21} & a''_{22} & a''_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

性质 6　将行列式中任一行(列)的元素乘以 k 加到另一行(列)对应元素上去，行列式之值不变.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+2a_{11} & a_{32}+2a_{12} & a_{33}+2a_{13}\end{vmatrix}.$$

说明：按性质 5，并注意第二个行列式两行成比例，其值为零.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+2a_{11} & a_{32}+2a_{12} & a_{33}+2a_{13}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13}\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
$$

性质 7 行列式可以按任意一行(列)展开,其值均相等(不变),即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{in}A_{in} & 1\leqslant i\leqslant n \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{nj}A_{nj} & 1\leqslant j\leqslant n \end{cases}
$$

这一性质,也可以叙述为:

行列式之值等于其任何一行(列)每个元素乘以它自己的代数余子式之和.

性质 8 行列式中的任何一行(列)各元素,乘以其他行(列)的对应元素代数余子式之和必为零.

如以三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$为例,

则有 $\begin{cases} a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0 \\ a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0 \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0 \\ a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0 \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0 \\ a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}=0 \end{cases}$ 以及 $\begin{cases} a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32}=0 \\ a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33}=0 \\ a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0 \\ a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33}=0 \\ a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}=0 \\ a_{13}A_{12}+a_{23}A_{22}+a_{33}A_{32}=0 \end{cases}$.

例 1.1.1 计算行列式$\begin{vmatrix} 99 & 100 & 203 \\ 202 & 200 & 397 \\ 298 & 300 & 601 \end{vmatrix}$.

解: 根据行列式性质,有

$$
\begin{vmatrix} 99 & 100 & 203 \\ 202 & 200 & 397 \\ 298 & 300 & 601 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100-1 & 100 & 200+3 \\ 200+2 & 200 & 400-3 \\ 300-2 & 300 & 600+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 100 & 3 \\ 2 & 200 & -3 \\ -2 & 300 & 1 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=100\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -100\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 2\,300.
$$

例 1.1.2 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 101 & 98 & 103 & 102 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

解： $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 101 & 98 & 103 & 102 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 100+1 & 100-2 & 100+3 & 100+2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 100\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 100\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 100\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 3\ 000\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\ 000.$$

例 1.1.3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

解：

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & -y \end{vmatrix} = -x^2\begin{vmatrix} y & 0 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = x^2y^2.$$

例 1.1.4 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ a & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & -a \end{vmatrix}.$$

解： 将第二列至第 n 列加到第一列上

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ a & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & -a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} k & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & -a \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \begin{vmatrix} -a & 0 & \cdots & 0 \\ a & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix} = (-a)^{n-1}(1+2+3+\cdots+n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} n(n+1)a^{n-1}.$$

例 1.1.5 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & x^3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & x^4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & x^5 \end{vmatrix}$，求 $f(x+1)-f(x)$.

解：
$$f(x+1)-f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & (x+1)^3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & (x+1)^4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & (x+1)^5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & x^3 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & x^4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & x^5 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 3x^2+3x+1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 4x^3+6x^2+4x+1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5x^4+10x^3+10x^2+5x+1 \end{vmatrix}$$

（一分为二，第二个行列式为零）

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2x \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 3x^2+3x \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 4x^3+6x^2+4x \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5x^4+10x^3+10x^2+5x \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5x^4 \end{vmatrix} = 5!x^4 = 120x^4.$$

例 1.1.6 已知 a,b,c 为一元三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根，求 $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

解： 由
$$\begin{aligned} x^3+px+q &= (x-a)(x-b)(x-c) \\ &= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc, \end{aligned}$$
注意到 x^2 的系数，有 $a+b+c=0$，所以只要将第二列与第三列元素均加到第一列上，就有
$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = 0.$$

例 1.1.7 设 α,β,γ 为互不相等的实数，证明：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix} = 0$ 的充要条件是 $\alpha+\beta+\gamma = 0$.

解： 由