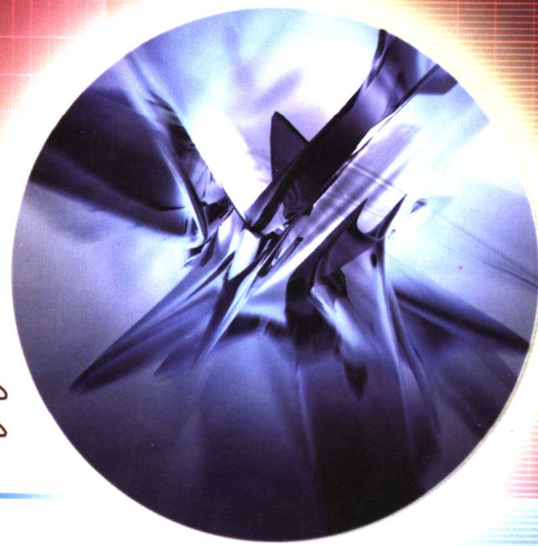
高等学校教材



大学数学课程实验

吉林大学数学学院

主　编　李辉来

副主编　刘明姬　朱本喜　毛书欣

高等教育出版社

高等学校教

大学数学课程实验

吉林大学数学学院

主　编　李辉来

副主编　刘明姬　朱本喜　毛书欣

高等教育出版社

内容提要

本书是与微积分、线性代数和随机数学（概率论与数理统计）基础课程配套的课程实验教材. 内容包括 Mathematica 基本知识、基本数学实验、开放性实验和自主实验. 本书力图通过实验例题和习题展示数学来源的丰富性、数学应用的广泛性、数学方法的多样性和数学技术的实用性, 使学生在大学一、二年级就能掌握数学实验和数学建模的基本知识, 为今后的数学学习和应用打好基础.

本书适合高等学校理工科和其他非数学类专业本科生使用, 既可结合课程进行实验课程教学, 也可独立作为数学实验课程教材.

图书在版编目 (CIP) 数据

大学数学课程实验/李辉来主编. —北京: 高等教育出版社, 2008.1

ISBN 978-7-04-022595-2

Ⅰ. 大··· Ⅱ.李··· Ⅲ. 高等数学 - 实验 - 高等学校 - 教材 Ⅳ.O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 190287 号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 于 涛
责任绘图 尹文军 **版式设计** 王 莹 **责任校对** 俞声佳
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	潮河印业有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	19	**印　　次**	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	**定　　价**	23.90 元

物料号　22595-00

前　言

数学实验与数学建模是目前本科生数学教学中的重要内容和形式. 我国在数学实验和数学建模方面的研究和教学已经进行了 20 多年, 在培养学生数学素养、提高学生理论联系实际的能力等方面起到了积极作用. 全国各级各类高等学校都十分重视数学实验和数学建模课程的建设, 全国大学生数学建模竞赛吸引了越来越多的学校和学生参与, 这充分说明了数学实验和数学建模课程对于提高学生整体素质的重要性.

吉林大学是全国开设数学实验和数学建模课程最早的学校之一. 2000 年合校以来, 全校近 130 多个本科专业都开设了数学课程. 为了适应新形式下公共数学的教学, 我们在多年教学研究成果的基础上, 集六所学校之优势, 建立了包含七大类共 53 门课程的吉林大学公共数学教学平台, 集中了我们多年教学研究成果. 从 2004 年起, 我们尝试为本科生基础课程, 即微积分、线性代数和随机数学 (概率论与数理统计) 配备课程实验, 结合教学内容, 安排一定的上机实验, 取得了良好的教学效果, 为大学生参加数学建模竞赛奠定了雄厚的数学实验基础.

所谓数学实验, 就是利用计算机软件系统作为实验平台, 以数学理论作为实验依据, 以数学问题和实际问题的数学模型作为实验对象, 以计算机程序为实验手段, 以数值计算、符号演算或图形演示等为实验内容, 以实例分析、模拟仿真、归纳总结等为主要实验方法, 以辅助学数学、辅助用数学和辅助做数学为实验目的, 以实验报告为最终形式的上机实践活动. 数学实验有许多软件平台, 既可以直接利用计算机语言, 比如 C 语言、PASCAL 语言, 也可以利用专门的数学软件, 如 MATLAB、Maple、Mathematica 等. 本教材采用计算机代数系统 Mathematica 作为数学实验的软件平台.

数学课程实验是“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的重要研究成果. 首先, 它为学生学习后续课程和解决实际问题提供必不可少的数学基础知识和常用的数学方法. 其次, 它通过实验教学的各个环节, 逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力和自学能力. 第三, 它能培养学生综合运用所学知识分析问题、解决问题的动手能力, 培养学生的创新意识和创新能力, 激发学生学习数学的兴趣.

本实验教学课程应达到的基本要求: 通过实验教学加深学生对数学的思想和方法的理解, 使抽象的数学形象化、具体化, 使学生参与到数学应用的实际中来, 亲身感受“用数学”的快乐, 初步具备通过“数学计算”解决实际问题的本领.

微积分、线性代数和随机数学 (概率论与数理统计) 是各专业的必修课, 大学数学课程实验正是针对这些重要的基础课开设的, 内容包括 Mathematica 基本知识、基本性实验、示范性实验、开放性实验和设计性实验. 本书力图通过实验例题和习题展示数学来源的丰富性、数学应用的广泛性、数学方法的多样性和数学技术的实效性, 使学生在大学一、二年级就能掌握数学实验和数学建模的基本知识, 为今后的数学实验或数学建模课程打好基础.

本书具有以下特点.

1. **广泛深入的实验内容**. 实验例题和习题的取材几乎涵盖了从自然科学到人文社会科学的各个学科, 充分体现了数学来源的丰富性, 展现了数学应用的广泛性. 有些大型问题分解为若干个习题, 能够培养学生"分解问题"的能力.

2. **丰富实用的数学技术**. 在《微积分》、《线性代数》和《随机数学》(《概率论与数理统计》) 主教材的基本内容和方法的基础上, 适当增加了线性规划、非线性拟合、密码设计、分形和混沌等知识点接口, 延伸了数学方法和数学技术, 充分展示了数学技术的丰富性和实效性.

3. **精彩纷呈的背景文化**. 囿于数学的系统性和有限的学时, 主教材不可能把诸多的实际问题包含其中. 在这里, 我们通过对实际问题及其背景的描绘, 使学生在感受到数学应用极其广泛的同时, 还能够体会到各学科的文化内涵, 扩大知识面, 丰富联想思维. 因此, 本书在内涵上是主教材的有益扩充和延展.

4. **灵活自如的教学方式**. 本书充分考虑了我国高校课时紧张的因素, 采取了"适当辅导、自主学习"的编写方式. 教师既可以随主教材的教学进度在实验室全程教学, 也可以用少量的学时进行指导性教学, 学生通过校园网络实验系统或单机软件进行学习和实验, 而不受时间和实验室的局限.

本书是吉林大学"十一五"规划教材, 是我院主编的大学数学系列教材 (普通高等教育"十五"国家级规划教材, 高等教育出版社出版, 2004,[41],[42],[43]) 和经济管理数学基础系列教材 (普通高等教育"十一五"国家级规划教材, 清华大学出版社出版, 2006,[27],[28],[29]) 的配套教材, 也是吉林大学公共数学教学系统的重要组成部分.

本书在编写过程中得到了吉林大学数学学院及公共数学教研中心领导的大力支持. 高等教育出版社数学分社的领导和编辑给予了书稿编辑方面的专业技术支持和指导, 在此一并致谢.

由于我们的水平有限, 书中的错误和不妥之处, 恳请广大读者批评指正, 以期不断完善.

李辉来

2007 年 10 月

目　　录

第一章 微积分实验

实验 1.1 一元函数作图

实验目的

1. 学习绘制一元函数的图形.

2. 通过图形加深对函数概念的理解; 观察函数的特性 (单调性, 有界性, 周期性, 奇偶性), 建立数形结合的思想.

实验内容

1. 函数图形的绘制.

(1) 直角坐标下函数的图形.

(2) 参数方程 (含极坐标方程) 表示的函数图形.

(3) 隐函数的图形.

(4) 分段函数的图形.

2. 绘制点列的散点图和折线图.

3. 函数特性的几何表示.

实验命令

Plot[f, {x, a, b}, 选择项]	画出函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形.
Plot[{$\mathrm{f_1, f_2}, \cdots$}, {x, a, b}, 选择项]	画出函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 在 $[a,b]$ 上的图形.
Show[P1, P2, $\cdots$, Pn]	将函数图形 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 在同一坐标系中同时显示.
ParametricPlot[{x[t], y[t]}, {t, a, b}, 选择项]	画出参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} (a \leqslant t \leqslant b)$ 表示的函数的图形.
ListPlot[{$\mathrm{y_1, y_2}, \cdots$}, 选择项]	画出坐标为 $(1, y_1), (2, y_2), \cdots$ 的点.

ListPlot[{x1, y1}, {x2, y2}, ···, 选择项]	画出坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots$ 的点.
ImplicitPlot[方程, {x, xmin, xmax}]	画出当 x 的值从 $xmin$ 变到 $xmax$ 时方程的图形. 对于 x 的每个值, 计算出 y 的值, 并画出所得到的几个点 (x,y).

例 1.1 函数的图形

设 y 的范围为 $[-10,10]$, 画出 $y=\tan x$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 区间上的图形.

解: 程序如下:

```
Plot[Tan[x], {x, -2 * Pi, 2 * Pi},
    PlotRange- > {-10, 10}]
```

输出结果: 如图 1–1.

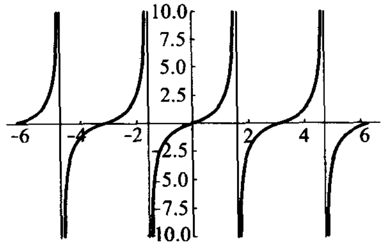


图 1–1

例 1.2 参数方程表示的函数的图形

画出参数方程为 $\begin{cases} x=\cos t+(1/2)\cos 7t+(1/3)\sin 17t, \\ y=\sin t+(1/2)\sin 7t+(1/3)\cos 17t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的图形.

解: 程序如下:

```
ParametricPlot[{Cos[t] + 1/2 * Cos[7t]
  +1/3 * Sin[17t], Sin[t] + 1/2 * Sin[7t]
    +1/3 * Cos[17t]}, {t, 0, 2π},
  AspectRatio- > Automatic]
```

输出结果: 如图 1–2.

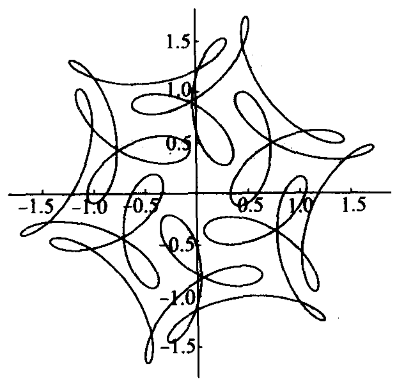


图 1–2

例 1.3 参数方程表示的函数的图形

画出参数方程为 $\begin{cases} x=3\cos^3 t, \\ y=3\sin^3 t \end{cases}$ 的星形线的图形.

解: 程序如下:

```
ParametricPlot[{3Cos[t]^3, 3Sin[t]^3},
  {t, 0, 2π}, AspectRatio- > Automatic]
```

输出结果: 如图 1–3.

例 1.4 极坐标表示的函数的图形

画出心形线 $r=2(1-\cos t)$ 的图形.

解: 若已知一平面曲线的极坐标方程为 $r = r(t)$, 则其参数方程为

$$\begin{cases} x = r(t)\cos t, \\ y = r(t)\sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

程序如下:

```
r[t_] := 2 * (1 - Cos[t])
ParametricPlot[{r[t] * Cos[t], r[t] * Sin[t]},
        {t, 0, 2 * Pi},
   AspectRatio-> Automatic]
```

输出结果: 如图 1–4.

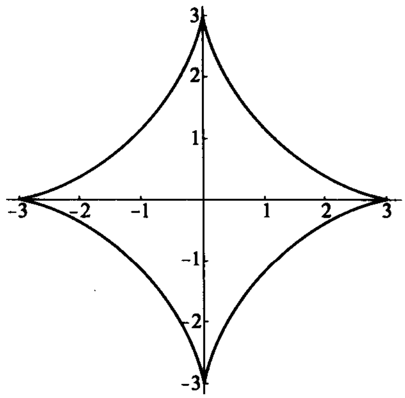


图 1–3

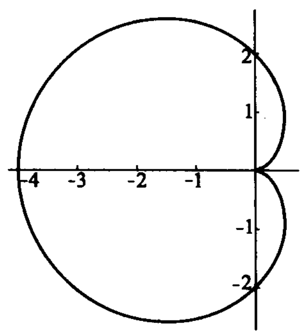


图 1–4

例 1.5　分段函数的图形

画出函数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \ x < 1, \\ 1 + x^2, \ x \geqslant 1 \end{cases}$$

的图形.

解: **方法一**　利用 Mathematica 的条件语句绘图.

程序如下:

```
f[x_] := x - 1/; x < 1;
f[x_] := 1 + x^2/; x >= 1;
Plot[f[x], {x, -2, 5}]
```

输出结果: 如图 1–5.

从图 1–5 发现, 用这种方法绘图, 把原本不连续的函数画成了一条连续曲线, 不符合间断函数图形的实际情况, 所以对不连续的分段函数作图时, 通常采用的方法是先分别作函数各连续段的图形, 再拼接起来得到最终的图像.

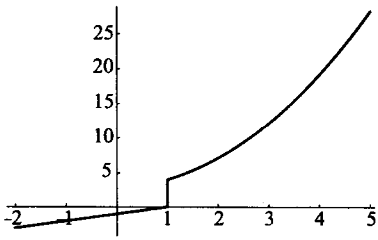


图 1–5

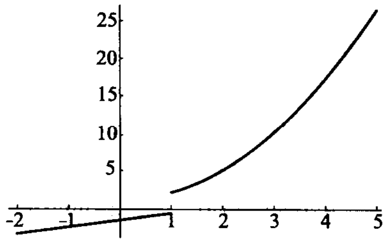


图 1–6

方法二　按函数的连续段分段作图, 再把各段图形拼接起来而得到分段函数的图形.

程序如下:

```
P1 = Plot[x - 1, {x, -2, 1},
     DisplayFunction- > Identity]
P2 = Plot[1 + x^2, {x, 1, 5},
     DisplayFunction- > Identity]
Show[P1, P2, DisplayFunction- > $DisplayFunction]
```

输出结果: 如图 1–6.

例 1.6　隐函数的图形

画出方程 $x^3+y^3=6xy$ 在 $-4\leqslant x\leqslant 4$ 时的图形 (该曲线称为 Descartes 叶形线).

解:　命令 ImplicitPlot 包含在软件包 << Graphics\`ImplicitPlot\` 中, 因此在使用前必须上载这个软件包.

程序如下:

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
ImplicitPlot[x^3 + y^3 == 6x * y, {x, -4, 4}]
```

输出结果: 如图 1–7.

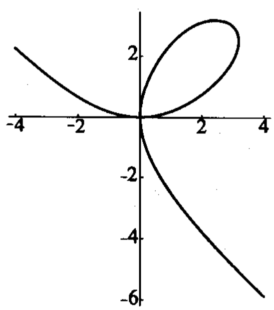


图 1–7

例 1.7　散点图与折线图

画出函数 $f(x)=\sin x, x\in[-\pi,\pi]$ 且 $x=-\pi+0.2i(i=0,1,2\cdots)$ 的点列, 并画出折线图.

解: 程序如下:

```
t1 = Table[{x, Sin[x]}, {x, -π, π, 0.2}]
ListPlot[t1, PlotStyle-> PointSize[0.02]]
ListPlot[t1, PlotJoined-> True]
```

输出结果: 如图 1–8, 图 1–9.

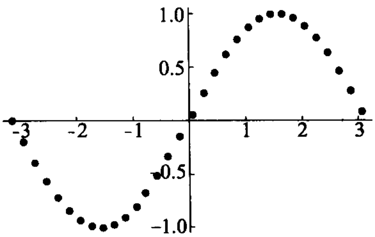


图 1–8　散点图

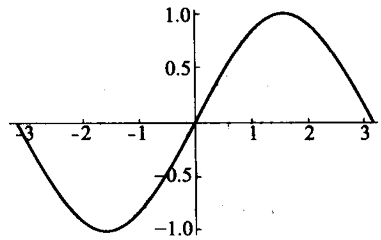


图 1–9　折线图

例 1.8　散点图与折线图

从曲线 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 中取一部分点. 如令 $x=\dfrac{1}{k}(k=1,2,\cdots,3000)$, 考察这些点构成的图像.

解: 程序如下:

```
T = Table[{1/k, Sin[k]}, {k, 1, 3000}];
P = ListPlot[T, PlotStyle-> {RGBColor[1, 0, 1]}]
```

输出结果: 如图 1–10.

我们发现, 图 1–10 中的图像不混乱, 呈现出一幅看似有规律的网状“繁星图”, 这是因为正弦函数是周期为 2π 的奇函数. 但是由于 $\dfrac{1}{x}$ 当 x 靠近 0 时越来越大, 故该函数分布随着 x 越靠近 0, 函数图像点阵的密度也越大.

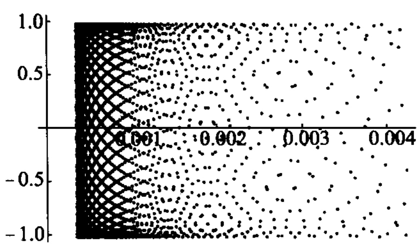


图 1–10

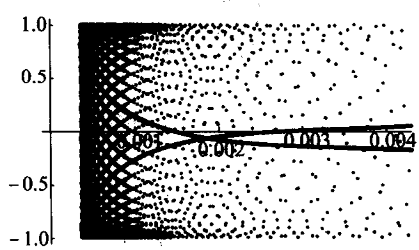


图 1–11

下面我们从上述数列中选取部分点, 看看它们能联成什么样的线.

程序如下:

```
d = 88;
T1 = Table[{1/k, Sin[k]}, {k, 3, 3000, d}];
T2 = Table[{1/k, Sin[k]}, {k, 6, 3000, d}];
P1 = ListPlot[T1, PlotJoined- > True,
DisplayFunction- > Identity];
P2 = ListPlot[T2, PlotJoined- > True,
DisplayFunction- > Identity];
Show[P, P1, P2, DisplayFunction- > $DisplayFunction]
```

输出结果: 如图 1–11.

读者可以将步长 d 取不同的值, 观察其子列的变化情况. 见练习 1.8.

例 1.9 通过图像观察函数的特性

分别画出函数 $f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x, g(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\sin x, h(x)=x^5+3\mathrm{e}^x+\log_3(3-x)$ 的图形.

解: 程序如下:

```
g1 = Plot[Sin[Pi * x] + Cos[Pi * x], {x, -4, 4}]
g2 = Plot[1/2(E^x - E^(-x)) * Sin[x], {x, -4Pi, 4Pi}]
g3 = Plot[x^5 + 3E^x + Log[3, 3 - x], {x, -3, 3}]
```

输出结果: 如图 1–12, 图 1–13, 图 1–14.

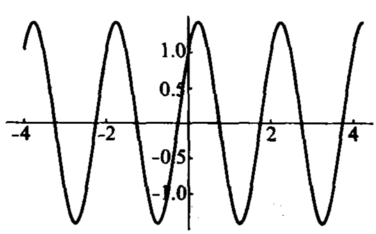


图 1–12 $y=f(x)$ 的图形

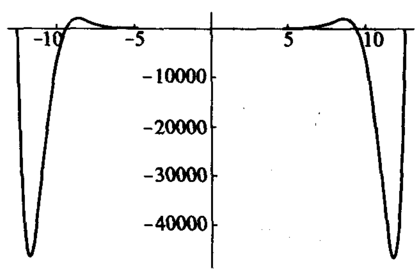


图 1–13 $y=g(x)$ 的图形

从图 1–12, 图 1–13, 图 1–14 可以看出, 函数 $f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x$ 是周期函数和有界函数, 函数 $g(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\sin x$ 是偶函数, 函数 $h(x)=x^5+3\mathrm{e}^x+\log_3(3-x)$ 是增函数.

例 1.10 非初等函数的图形

画出函数 $s(x)=\int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t, -5\leqslant x\leqslant 5$ 的图形.

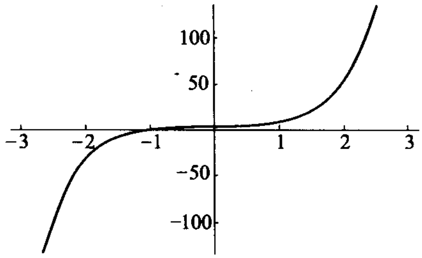


图 1–14　$y=h(x)$ 的图形

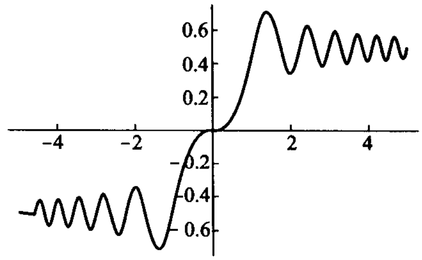


图 1–15

解:　程序如下:

Plot[Integrate[Sin[Pi * t^2/2], {t, 0, x}], {x, −5, 5}]

输出结果: 如图 1–15.

从图 1–15 可以看出, 该函数图像关于原点对称, 是一个奇函数.

练　习　一

1.1　画出 $y=\sin x$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 区间上的图形. 假设 y 的范围为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

1.2　任取 $y\in[-1,1]$, 画出满足 $\sin\frac{1}{x}=y$ 的图形.

1.3　画出下列函数的图形:

(1) $\begin{cases} x=2(t+\sin t), \\ y=2(\cos t-1), \end{cases}\quad t\in[0,2\pi].$

(2) $\begin{cases} x=31\cos t-7\cos(31/7)t, \\ y=31\sin t-7\sin(31/7)t, \end{cases}\quad t\in[0,2\pi].$

(3) $r^2=9^2\cos 2\theta,\quad \theta\in[0,2\pi].$

(4) $r=\mathrm{e}^{\cos\theta}-2\cos^4\theta+\sin^3\frac{\theta}{4}.$

1.4　分别用直接作图法和拼接作图法, 画出函数 $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}$ 的图形.

1.5　画出方程 $x^2y^2=(y+1)^2(4-y^2)$ 在区间 $-10\leqslant x\leqslant 10$ 上的图形.

1.6　画出 $\sin x, \sin(\sin x), \sin(\sin(\sin x))$ 及更多重复合函数的图形, 观察它们的变化趋势.

1.7 画出非初等函数 $f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的图形, 并观察函数的特性.

1.8 在例 1.8 中, 分别取步长 d 为 $44, 60, 80, 100$, 观察子列的变化情况.

实验 1.2 数列极限与函数极限

实验目的

1. 掌握数列与函数极限的计算.
2. 观察数列和函数在极限过程中的发展趋势.

实验内容

1. 数列极限的计算和几何演示.
2. 函数极限的计算和几何演示.
3. 迭代数列的极限行为.
4. 生物增长模型.
5. 混沌与分形.
6. 结婚礼物问题.
7. 污水处理问题.

实验命令

Limit[f, x- > x_0]	求极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
Limit[f, x- > x_0, Direction- > 1]	求左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.
Limit[f, x- > x_0, Direction- > −1]	求右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

例 2.1 极限计算

计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$.

解: (1) 程序如下:

Limit[Tan[Pi/4 + 1/n]^n, n− > +∞]

输出结果:

e^2

(2) 程序如下:

Limit[n^(1/n), n− > +Infinity]

输出结果:

1

(3) 程序如下:

Limit[x * (Pi/2 – ArcSin[x/Sqrt[x^2 + 1]]), x– > +Infinity]

输出结果:

1

(4) 程序如下:

Limit[1/(1 + Exp[1/x]), x– > 1, Direction– > 1]

输出结果:

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}}$$

例 2.2 迭代数列的极限

设 $a_n=\sqrt{2a_{n-1}}, a_0=1$. 在平面上画出点 $(n, a_n)(n=0,1,2,\cdots,100)$ 的散点图和折线图, 并根据图形来猜测 $\{a_n\}$ 的极限是多少.

解: 程序如下:

a[n_] := $\sqrt{2a[n-1]}$;

a[0] = 1;

t1 = Table[a[i], {i, 0, 100}]

ListPlot[t1]

ListPlot[t1, PlotJoined– > True]

输出结果: 如图 2–1, 图 2–2.

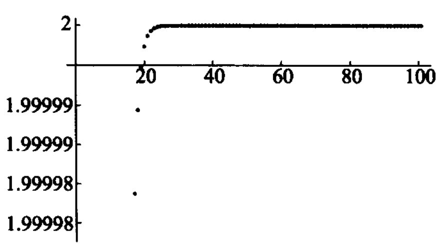


图 2–1 散点图

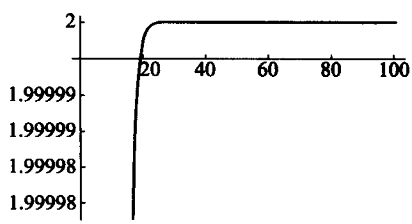


图 2–2 折线图

由图形可以猜出数列 $\{a_n\}$ 的极限为 2.

注 2.1: 例 2.2 中的数列称为迭代数列或递推数列. 关系式

$$a_n=f(a_{n-1})$$