现代数学基础丛书 121

半群的S－系理论

（第二版）

刘仲奎　乔虎生　著

科学出版社

www.sciencep.com

内 容 简 介

本书介绍了半群 S-系理论的基础知识及最新研究成果. 全书共分 8 章. 其中第 1 章是必要的概念及准备，第 2、3 两章分别讨论投射系和内射系，第 4 ~ 6 章讨论和平坦性有关的问题，第 7 章讨论正则系，第 8 章讨论序 S-系. 本书在第一版的基础上修订再版，增加了有关序 S-系、Rees 商系和弱形式的拉回平坦系等方向的部分研究成果.

本书力求简明扼要，便于阅读，可作为数学专业研究生的教材，也可作为数学研究工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

半群的 S-系理论/刘仲奎，乔虎生著. —2 版. 北京：科学出版社，2008
(现代数学基础丛书 121)
ISBN 978-7-03-020370-0

Ⅰ. 半… Ⅱ. ①刘…②乔… Ⅲ. 半群-理论 Ⅳ. O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 031074 号

责任编辑：林 鹏 张 扬/责任校对：赵燕珍
责任印制：赵德静/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1999 年 2 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2008 年 3 月第 二 版 印张：21 1/2
2008 年 3 月第一次印刷 字数：400 000
印数：1—3 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出、简明扼要、注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

2000年以来,和数学的其他分支一样,半群的S -系理论在许多研究方向上得到了较快的发展. 因此,我们在讨论本书的修改时,首先考虑的问题是如何增添该领域最新的研究成果以反映该领域最新的研究动态. 我们认为,序S -系、Rees商系和弱形式的拉回平坦系等方向的发展现状既能较大程度地反应半群S -系理论的最新发展动态,又能反映我国学者的最新研究成果.因此,由乔虎生博士负责增加了有关序S -系、Rees商系和弱形式的拉回平坦系等方向的部分研究成果. 这些增加的内容主要表现在:增加了第8章,专门讨论有关序S -系的理论;增加了§5.10和§5.13两节,分别研究Rees商系和左可消幺半群的同调性质.同时在参考文献中增加了许多2000年以后发表的学术论文,以方便有兴趣的读者查阅.

另外,修改了第一版中某些不准确的表述和打印错误,增加了名词索引.结论的序号采用统一格式.例如,定理4.3.7表示第4章§4.3中的定理7. 我们力图通过我们的努力,使得读者可通过本书而接触半群S -系理论的最新成果.然而由于我们水平有限,书中一定有不少欠妥和不足之处，敬请读者不吝赐教.

作 者

2007.10.20

第一版序

与半格、半环、半模、半域诸理论之于格论、环论、模论、域论不同，半群理论以其特有的研究对象、研究课题和研究方法，早已独立于群论之外.至于在“Mathematical Reviews”的“Mathematics Subject Classification”里，半群的分类编号20M属于群的分类编号20，则是历史造成的习惯上的一种沿用.

在数学发展史上，“半群”的研究虽可追溯到1904年，但其系统的研究却始于20世经50年代初，可谓是比较年轻的代数学科. 但是，由于许多分析学科和许多代数学科对各类半群的广泛应用，以及计算机科学、非线性动力系统复杂性理论等数学外部学科对它的巨大推动，至今，它已形成为基础代数学的一个重要的分支学科.20世纪60年代由A.H.Clifford和G.B.Preston 合著的两卷《半群代数理论》已被确认为国际数学经典著作；70年代创刊并由德国Springer Verlag出版的Semigroup Forum 是半群理论的一个重要的国际性专门刊物；杂志Journal of Algebra 和Communications in Algebra 的编委里有著名半群专家T.E.Hall和J.M.Howie；许多数学家在世界各地开展半群(代数的、序的和拓扑的)理论的专门研究和各层次高级人才的培养(直至博士后)；近20年来，几乎每年都举办半群的国际会议.这一切充分说明这样一个事实：半群研究方兴未艾.

半群的S -系理论是半群代数理论的一个重要部分.该理论其思想部分地来自于群的群作用方法，部分地来自于环的模论方法.将半群的内部特征与由某种类型的S -系所构成的“外部环境”联系起来，形成了半群代数理论研究中的一个重要方法，而这一方法的深入开发自然又形成半群理论的一个重要课题.这个课题，由于大量系统的和深刻的研究成果的出现，已引起了越来越多的关注和研究. Renshaw从1986年到1991年利用S -系方法对半群的融合问题的出色工作，说明这一理论方法在半群代数理论中的应用领域已相当宽广.

国内从20世纪80年代后期就有我们自己培养的博士进入到这一有着良好发展态势与前景的领域进行研究工作.宋光天博士和刘仲奎博士在这一领域的研究中已获到了一批得到国际上该领域的权威人士认可和好评的研究成果.他们的工作已被国际同行大量引用，从而推动了国内关于该领域研究工作的进一步开展.

刘仲奎博士的专著《半群的S -系理论》一书重点介绍了他本人近年的研究工作及国际上这一领域的最新研究成果. 该书选题新颖，内容翔实，所述问题大多数是20世纪80年代后期及90年代该领域研究中的热点问题，是第一部关于半群S -系理论的专著.

作为一个半群与组合半群工作者,我很高兴能为该书作序.相信该书的出版将有利于推动这一领域的研究在国内的发展.

郭聿琦

1998.4.25

第一版前言

半群代数理论是20世纪五六十年代发展起来的一个崭新的代数学分支，它在自动机理论、计算机科学、组合数学、代数表示论、算子代数和概率论等方面都有广泛的应用，因此引起了越来越多的数学家的重视.对半群的研究方法大体上可分为两种:其一为从半群的内部构件如理想、同余以及特殊元素等出发研究半群的结构与特征；其二为从半群的外部环境如同余格、S -系范畴等出发研究半群的内部特征. 把半群作用在集合上，就得到S -系，不同的半群可得到不同的S -系.利用S -系的性质把握半群的特征，是本书的主要思想.

半群的S -系理论其思想部分来自于群的群作用方法，部分来自于环的模论方法.众所周知，当半群是群时，半群作用即为群作用，它的重要结论之一就是经典的Sylow定理.作为群作用轨道分解的推广，每个S -系可唯一地分解为不可分S -系的不交并.当半群作用在特殊的集合一Abel群上时，S-系事实上就是整数环上半群环的模.当S 是某个环的乘法半群时，S作用在Abel群上在满足必要的条件时即成为环上的模.半群作用的这几个层次的共同特点，就是将半群的“内部特征”和半群的由作用效果即S -系范畴所反映的“外部环境”联系起来，即半群具有什么样的“内部特征”当且仅当它具有什么样的作用效果.事实证明，这种方法可带来单纯的内部刻画方法无法获得的结果，正在国际上受到越来越多的重视.

著者及其一些同事从20世纪80年代后期在导师郭聿琦教授的指导下进入这一领域开展研究工作，获得了一批得到国际上这一领域的权威人士认可和好评的研究成果，并两次得到国家自然科学基金的资助.著者在多年的研究工作及研究生培养工作中，深感出版一本该领域专著的必要性.为了让国内数学界有更多的人投入到这一有着良好发展前景的课题研究中，同时也为了系统介绍我们自己的研究工作，特撰写本书.

本书是根据著者三年来开设的研究生课程《半群的S -系理论》的讲稿改写而成.全书共分7章. 第1章是必要的概念及准备，第2、3章分别讨论S -系的投射性与内射性，第4～ 6章讨论和平坦性相关的问题，第7章讨论S -系的正则性,第8章讨论序S -系.虽然我们使用和环的模理论中相同的名词如投射性、内射性、平坦性等，但和环的模理论相比，半群的S -系理论内容更加丰富，问题更加困难.例如,对应于平坦模的概念，在S -系范畴中有平坦、强平坦、弱平坦、均衡平坦、条件(P)、条件(E)等互不相同的概念.本书除介绍S -系理论的基础知识以外，侧重于介绍著者本人的工作及国际上最新研究成果，使得读者可通过本书接触到前沿的工作.

由于时间仓促，我们十分遗憾这一领域中许多很有意义且十分优美的成果未能写入本书，例如，J.Renshaw关于半群融合理论的工作以及V.Gould关于S -系

的纯性的工作.不过有了本书所讲述的基础知识，读者阅读有关文献基本上不再有困难.

本书中我们尽量使用通用记号,如定理4.3.7表示第4章§4.3中的定理7.

受水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正.

著者衷心感谢导师熊全淹教授和郭聿琦教授多年来的指导、帮助与鼓励，同时还要感谢香港中文大学的K.P.Shum教授、加拿大Wilfrid Laurier大学的S.Bulman-Fleming教授和德国Oldenburg大学的U.Knauer教授对我们工作的支持与鼓励，也感谢西北师范大学数学系的马勤生先生对本书所做的精致编排和大力支持，由于他们的大力协助才使本书得以尽早面世.

刘仲奎

1997.5.8

本书的出版和所论课题的研究工作得到以下基金的资助：
国家自然科学基金(19501007、19671063、10171082)
教育部高校青年教师奖励基金、教育部高等学校骨干教师资助计划
甘肃省自然科学基金
甘肃省教育厅重点学科基金
西北师范大学重点学科基金、科技创新工程基金、皇台学术著作出版基金、甘肃省高等学校青年教师成才奖奖励科研基金

目　录

第1章 基本概念

§1.1 S-系

设S是幺半群，1为其单位元，A是非空集合. 若有$S \times A$到A的映射$f : S \times A \to A$满足

$$f(t, f(s,a)) = f(ts, a),\ \forall\ t,\ s \in S,\ \forall\ a \in A,$$

则称(A, f)是左S -系，或称S左作用于A上.为了方便起见，记$f(s,a) = sa$,于是上式变为

$$t(sa) = (ts)a,\ \forall\ t,\ s \in S,\ \forall\ a \in A.$$

此时，左S -系(A, f)简记为${}_SA$或A. 如果A还满足

$$1a = a,\ \forall\ a \in A,$$

则称A是单式左S -系. 以下除特殊声明以外，S -系均指单式左S -系.

同样的方法可以定义右S -系.

设A是S -系，B是A的非空子集合.若对任意$b \in B$,任意$s \in S$,都有$sb \in B$,则称B是A的子系,记为$B \leqslant A$.

显然$A \leqslant A$. 若S中含有零元0，则对于任意$a \in A$, $0a \leqslant A$.

下面的命题是不证自明的.

命题 1.1.1 S -系A的任意多个子系的交若非空，则仍为子系.

设M是S -系A的非空子集合，则A的包含M的最小子系是所有包含M的子系之交，称为由M生成的子系，记为$\langle M\rangle$，M称为子系$\langle M\rangle$的生成集. 显然有

$$\langle M\rangle = \{sm | s \in S, m \in M\}.$$

若记$Sm = \{sm | s \in S\}$, 则有

$$\langle M\rangle = \bigcup_{m \in M} Sm.$$

若$M = \{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$为有限集合，则称$\langle M\rangle = Sm_1 \cup \cdots \cup Sm_n$为有限生成子系. 特别地，由一个元素$m$生成的子系$Sm$称为循环子系.若$A$可由一个(有

限个)元素生成，则称A是循环(有限生成)系. 例如，对于任意$s \in S$, S的主左理想Ss即为S -系S的循环子系，特别地S为循环S -系.

设λ是S -系A上的等价关系，若λ满足：

$$(a, b) \in \lambda \Rightarrow (sa, sb) \in \lambda, \quad \forall\, s \in S, \quad \forall\, a, b \in A,$$

则称λ为A上的同余. 在A关于同余λ的商集A/λ上定义左S -作用

$$s(a\lambda) = (sa)\lambda, \quad \forall\, s \in S, \quad \forall\, a \in A,$$

则容易验证A/λ关于上述左S -作用构成一个S -系，称为A关于λ的商系.

设$B \leqslant A$，如下定义A上的关系：

$$a \lambda_B b \Leftrightarrow a = b \text{ 或 } a, b \in B.$$

容易验证λ_B是A上的同余，称其为由B决定的Rees同余，简称为Rees同余. 称商系A/λ_B为Rees商.

类似于子系的生成集概念，也可以考虑同余的生成集. 首先，下面的命题是明显的.

命题 1.1.2 S -系A上的任意多个同余的交仍为同余.

设H为$A \times A$的非空子集合，则A上的包含H的最小同余是所有包含H的同余之交，称为由H生成的同余，记为$\lambda(H)$. H称为同余$\lambda(H)$的生成集. 显然生成集是不唯一的.

命题 1.1.3 设H为$A \times A$的非空子集合，$a, b \in A$. 则$a\lambda(H)b$当且仅当$a = b$或者存在$t_1, t_2, \cdots, t_n \in S$,使得:

$$a = t_1 c_1,\ t_1 d_1 = t_2 c_2, \cdots,\ t_{n-1} d_{n-1} = t_n c_n,\ t_n d_n = b,$$

其中$(c_i, d_i) \in H$或$(d_i, c_i) \in H$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明 在A上定义如下关系σ:

$$a\ \sigma\ b \Longleftrightarrow a = b \text{ 或者存在 } t_1, t_2, \cdots, t_n \in S, \text{ 使得：}$$
$$a = t_1 c_1,\ t_1 d_1 = t_2 c_2, \cdots,\ t_{n-1} d_{n-1} = t_n c_n,\ t_n d_n = b,$$

其中$(c_i, d_i) \in H$或$(d_i, c_i) \in H$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

容易验证σ是A上的同余关系, 且$H \subseteq \sigma$. 设λ是A上的同余且$H \subseteq \lambda$,则对于任意$(a, b) \in \sigma$,有$a = b$, 或者

$$a = t_1 c_1 \lambda t_1 d_1 = t_2 c_2 \lambda t_2 d_2 = \cdots \lambda t_{n-1} d_{n-1} = t_n c_n \lambda t_n d_n = b.$$

所以$\sigma \subseteq \lambda$. 即σ是A上包含H的最小同余. 根据定义即$\sigma = \lambda(H)$. 结论得证. □

设A, B都是S -系.称映射$f : A \to B$为从A到B的S -同态，如果

$$f(sa) = sf(a), \ \forall\, s \in S, \quad \forall\, a \in A.$$

例如，设λ是A上的同余，令$B = A/\lambda$. 则自然的映射:

$$\begin{aligned} \lambda^{\sharp} : & A \to B \\ & a \mapsto a\lambda \end{aligned}$$

即为从A到B的S -同态.

从A到B的所有S -同态的集合记为$\mathrm{Hom}_S(A, B)$或简记为$\mathrm{Hom}(A, B)$.若S -同态$f : A \to B$还是单、满映射，则称f为同构.这时也说S -系A和B同构，记为$A \simeq B$.

设$f : A \to B$是S -同态. 称集合

$$\{(a, a') \in A \times A | f(a) = f(a')\}$$

为f的核，记为$\mathrm{Ker}f$. 显然有

命题 1.1.4 任意S -同态$f : A \to B$的核$\mathrm{Ker}f$是A上的同余. S -满同态f为同构当且仅当$\mathrm{Ker}f$是A上的单位同余.

定理 1.1.5(同态基本定理) 设$f : A \to B$是S -同态, λ是A上的同余且$\lambda \subseteq \mathrm{Ker}f$. 则存在唯一同态$g : A/\lambda \to B$,使得下图可换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda^{\sharp}"'] & B \\ A/\lambda \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}$$

若$\lambda = \mathrm{Ker}f$,则g是单同态. 若f还是满同态，则g也是满同态. 特别地,当f是满同态时有$A/\mathrm{Ker}f \simeq B$.

证明 若$(a, a') \in \lambda$，则$(a, a') \in \mathrm{Ker}\ f$,因此有$f(a) = f(a')$. 所以可以如下定义映射$g : A/\lambda \to B$:

$$g(a\lambda) = f(a), \quad \forall\, a \in A.$$

容易证明g还是S -同态，且使得上图可换.

设$g' : A/\lambda \to B$也满足$g'\lambda^\sharp = f$, 则对任意$a\lambda \in A/\lambda$, $g'(a\lambda) = g'\lambda^\sharp(a) = f(a) = g\lambda^\sharp(a) = g(a\lambda)$, 所以$g' = g$.

设λ =Ker$f$, 则$g(a\lambda) = g(a'\lambda) \Rightarrow f(a) = f(a') \Rightarrow (a, a') \in$Ker$f$=$\lambda \Rightarrow a\lambda = a'\lambda$. 即$g$是单同态.

若f是满同态，则显然g也是满同态.从已证的结果立即可得$A/\mathrm{Ker}f \simeq B$. □

推论 1.1.6　设λ, σ是A上的同余且$\lambda \subseteq \sigma$. 则有S -系的同构式

$$A/\lambda \Big/ \sigma/\lambda \simeq A/\sigma,$$

其中$\sigma/\lambda = \{(a\lambda, b\lambda) \mid (a, b) \in \sigma\}$.

证明　定义S -同态$f : A/\lambda \to A/\sigma$为$f(a\lambda) = a\sigma$.则Ker$f = \sigma/\lambda$.由定理1.1.5即得结论. □

设S, T都是幺半群，若A既是左S-系，又是右T-系，且对任意$a \in A$,任意$s \in S$，任意$t \in T$，有

$$(sa)t = s(at),$$

则称A是左S -右T-系，记为${}_SA_T$.例如,S是左S -右S -系. 若A是左S -系，H是A的自同态幺半群，则A是左S -右H- 系(约定$f \in H$作用在$a \in A$上的结果为$(a)f$).

§1.2　直积　余直积

所有左S -系以及左S -系之间的S -同态构成一个范畴，称为左S -系范畴，记为S -Act.同样，所有右S -系以及右S -系之间的S - 同态构成一个范畴，称为右S -系范畴, 记为Act-S.本节考虑范畴S -Act中的直积和余直积. 先从一般的定义开始.

设$\mathbb{C}$是范畴，$\{A_i | i \in I\}$是$\mathbb{C}$中的一簇对象. $\mathbb{C}$中的对象A叫做$\{A_i | i \in I\}$的直积，如果:

(1) 对任意$i \in I$，存在态射$\pi_i : A \to A_i$;

(2) 对任意对象$W \in \mathbb{C}$，若存在态射$\varphi_i : W \to A_i$，$i \in I$,则存在唯一态射$\varphi : W \to A$,使得下图可换:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

对偶地可定义余直积.$\mathbb{C}$中的对象$\mathbb{C}$叫做$\{A_i|i \in I\}$的余直积，如果:

(1) 对任意$i \in I$，存在态射$\varepsilon_i : A_i \to C$;

(2) 对任意对象$W \in \mathbb{C}$，若存在态射$\psi_i : A_i \to W$，$i \in I$，则存在唯一态射$\psi : C \to W$使得下图可换：

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "\varepsilon_i"'] \arrow[dr, "\psi_i"] & \\ C \arrow[r, dotted, "\psi"] & W \end{tikzcd}$$

对于给定的一簇对象$\{A_i|i \in I\}$,容易证明其直积和余直积若存在,则必是唯一的(在同构的意义下). 例如,设A和A'都是$\{A_i|i \in I\}$的直积，则存在态射$\pi_i : A \to A_i$和$\pi'_i : A' \to A_i, i \in I$.因此存在态射$\alpha : A \to A'$和$\beta : A' \to A$使得下图可换：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "\pi_i"'] & W \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\pi'_i"] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\ & & A_i \end{tikzcd}$$

所以对任意$i \in I, \pi_i\beta\alpha = \pi_i$. 显然$\pi_i 1_A = \pi_i$. 所以由唯一性即知$\beta\alpha = 1_A$. 同理可知$\alpha\beta = 1_{A'}$. 所以$A \simeq A'$. 同样的方法可以证明余直积在同构的意义下也是唯一的.

所以记$\{A_i|i \in I\}$的直积和余直积分别为$\prod\limits_{i\in I} A_i$和$\coprod\limits_{i\in I} A_i$.

在S -系范畴S -Act中，直积和余直积具有非常简单的表达: 它们分别是卡氏积和不交并.

设$\{A_i|i \in I\}$是一簇S -系. 作A_i的卡氏积$B = \{(a_i)_{i\in I}|a_i \in A_i\}$. 按分量规定$S$在$B$上的左作用，即任意$s \in S$，任意$b = (a_i)_{i\in I}$,规定$sb = (sa_i)_{i\in I}$. 则$B$是左$S$ -系. 对任意$i \in I$,规定S -同态$\pi_i : B \to A_i$为

$$\pi_i((a_i)_{i\in I}) = a_i.$$

若W是S -系，且对任意$i \in I$,有S -同态$\varphi_i : W \to A_i$,则可规定映射$\varphi : W \to B$为:

$$\varphi(w) = (\varphi_i(w))_{i\in I}, \quad \forall\, w \in W.$$