

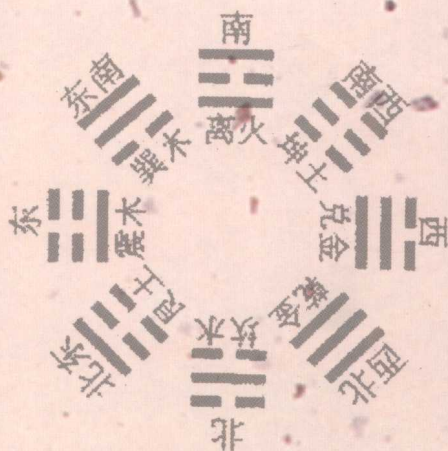
周易中的数学

ZHOUYI ZHONG DE SHUXUE

揲扚算法研究

SHELE SUANFA YANJIU

张图云 著



贵州科技出版社

张图云 著

周易中的数学

ZHOUYI ZHONG DE SHUXUE

揲扚算法研究

SHELE SUANFA YANJIU

贵州科技出版社

图书在版编目(CIP)数据

周易中的数学:揲扚算法研究/张图云著. —贵阳:贵州
科技出版社,2008.4

ISBN 978-7-80662-714-3

I. 周… II. 张… III. ①周易-研究②数学史-中国-
西周时代 IV. B221.5 0112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 033833 号

周易中的数学——揲扚算法研究

张图云 著

责任编辑 屠 强(特约)

封面设计 晓 迪

出版发行 贵州科技社出版社

社 址 贵阳市中华北路 289 号

邮 编 550001

印 刷 贵阳科海印务有限公司

开 本 850 × 1168 毫米 1/32

字 数 150 千字

印 张 5.75

版 次 2008 年 4 月第 1 版

印 次 2008 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-80662-714-3/B·002

定 价 28.00 元

目 录

前 言	(1)
第1章 《周易》占筮及其文本	(6)
1.1 《周易》是一种占筮方法	(6)
1.2 《周易》是一部占筮用书	(14)
1.3 《周易》占筮的流传	(18)
第2章 《周易》占筮中的卦象	(23)
2.1 卦象的构成	(23)
2.2 卦象形成过程的推测	(26)
2.3 卦象的数学特点	(38)
第3章 《周易》占筮的揲扚算法	(52)
3.1 揲扚算法	(52)
3.2 揲算研究概况	(61)
第4章 揲算命题的归纳和证明	(72)
4.1 一元、二元和三元数学归纳法的基本形式	(72)
4.2 不挂一的揲扚计算(局部)	(74)
4.3 有挂一的揲扚计算	(83)
4.4 对不挂一的揲扚算法的补充及揲扚计算的 一般形式	(88)

4.5	关于筮数算得方法的猜测	(91)
第5章	《周易》揲算结果数的出现概率	(97)
5.1	《左传》、《国语》的《易》占记录 and 问题的提出 ...	(97)
5.2	揲筮计算结果数出现概率的分析	(101)
5.3	爻符、卦象和各类之卦的出现概率	(107)
第6章	《周易》揲算概率指标的考古应用	(113)
6.1	《周易》揲算方法和变卦规则定型时期的下限	(113)
6.2	天星观、包山和葛陵卜筮简中的卦象是使用 《周易》占法的记录	(118)
6.3	《易林》释占辞条的出现概率并不均衡	(124)
6.4	《太玄》卦象的出现概率并不均衡	(125)
第7章	《周易》揲算是同类算法中的最佳选择	(129)
7.1	问题的提出及揲算命题的形式	(129)
7.2	利用命题 B 进行的比较分析	(134)
7.3	《周易》揲算的发明决非偶然	(145)
第8章	《周易》揲算是西周数学的一项成果	(148)
8.1	西周数学概况	(148)
8.2	《周易》揲筮算法是西周数学的一项成果	(164)
8.3	《周易》揲算的数学特点	(169)
8.4	相关评价	(172)

前 言

出于兴趣和好奇,笔者曾对《周易》占筮方法中的一些数学问题做了探讨,先后写成几篇文稿。随着积累的资料渐多,便将这些零散的文稿整理集结在一起,于是形成了这本小书。

本书的内容源于《周易》占筮,但并不讨论占筮话题,既不涉及俗语中所说的“算命”,也不涉及时尚人士所说的“预测”。《周易》占筮术是一种古老的“数占”,即根据某种算法的计算结果对人事的吉凶进行占测,因而在这种独特的算法中蕴含了一些古代的数学信息,值得后人研究。本书便专门探讨《周易》占筮中出现于先秦时期的一些主要的数学问题,自然也会涉及中国古代数学史中与商周数学相关的部分内容。

时下研《易》的书籍很多,说明人们很是关注中华民族的传统文 化。不过,这些书籍大都偏“文”,或者说多与哲学、历史、文字等学科以及传统文化有关,而少有偏“理”的作品,尤其缺少偏重于数学的专著,笔者所见仅有沈宜甲先生写的《科学无玄的周易》等不多的几种。另一方面,在研究中国古代数学史的书籍中,除1998年吴文俊先生主编的《中国数学史大系·第一卷》之外,详细论及《周易》中数学问题的著作也不多见。形成这种状况的原因是多方面的,长期以来未能用现代数学方法较全面地解读一般性的揲扚算法规律便是可能的原因之一。这里的“揲”(音 shé)是按一定的规则用手点数并取出著草筹策,

而“扚”(音 lè)则是将揲余的著草或筹策夹于手指之间的操作。占筮时通常用著草的茎或竹签状的筹策做计算工具,由于具体计算的过程以“揲”、“扚”操作为特征,所以不妨将这种特殊的计算方法称为揲扚算法,简称揲算。《易》占揲算是西周占筮家们出于占筮的需要而发明的一种算法,用现代数学的语言来说,这是一则初等数论范畴内的特殊真命题。由于数学能力毕竟有限,古代占筮家们肯定不是通过建立一般性命题的途径才发明出这种特殊算法的。但对于我们来说,弄清这则命题的内容,找到揲算模式下一般性命题的描述方式,将有助于更全面地认识《周易》占筮,也有助于了解西周数学的发展和应用状况,因而应该是一件有意义的工作。

本书第1章对《周易》占筮及其文本作了简要的介绍,第2章讨论了与八卦和六十四卦有关的一些数学特点,而对《易》占成卦时所用的揲算方法予以说明,则是第3章的主要目的。

用现代数学方法归纳出一般性的揲算命题并予以证明,是本书的核心内容。笔者对这一课题的探讨文稿曾以《周易筮法模式下的揲扚计算通用公式》之名被《贵州教育学院学报》2006年第4期刊用。以此为基础,本书第4章对相关命题的表述和证明作了一些更正和改进,形成了较为准确和完整的一套揲算理论。其中的定理5便是对《易》占揲算命题的一种数学描述:

参揲总策数 $S = (R + 2C)M + K$ 时,可以按《周易》占筮的揲算模式进行分2、挂1、揲 M 的计算,经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R, R+1, \dots, R+C\}$ 。其中 $(3-M) \leq K \leq 1$; $C=1$ 时, $M \geq 2$; $C > 1$ 时, $M \geq 3$ 。

这样,除了分2和挂1,与揲算相关的其他参数都用代数符号做了公式化的处理,因而具有一般性,这就为我们从数学的角度深入研究《易》占筮算创造了一定的条件。

笔者在文稿《周易揲筮算法结果数的出现概率及考古应用》(载《贵州教育学院学报》2007年第5期)中计算了揲筮结果数的出现概率,给出了《易》占情形下的四个概率指标。笔者将这一成果应用于考古学研究,为历代学者关于《左传》、《国语》中的《周易》占例采用了传世揲筮和变卦规则的推测提供了一个来自数学领域的佐证。类似地,又用这些概率指标核验了近几十年来出土的三批战国竹简中的占筮记录,为这些占筮都是用《周易》行占的推测提供了佐证。本书第5章和第6章介绍了这方面的内容。

本书最后两章主要是中国古代数学史方面的一些探讨。在归纳建立了一般性揲筮命题的基础上,通过对同类算法的对比研究,发现《易》占揲筮竟然是所有同类算法中最能满足占筮要求的一种算法。由于资料的缺乏,长期以来,人们对揲筮的发明过程无法展开研究,也无法对揲筮的发明是一种“偶然的凑巧”的猜测孰对孰错做出判断。根据一般性揲筮命题展开的比较全面的对比研究表明,揲筮的发明是古代占筮家们在长期试算和实际应用中逐渐优选出的一种算法,不是某个圣人的偶然发明。揲筮的定型集聚了西周占筮家们的数学智慧,它不但促成了中国传统的卜筮文化基本形态的形成,而且从一个侧面显示了西周数学发展及应用的状况。

甲骨文的发现使我们对商代的数学水平有了许多具体的了解,但是关于西周数学的状况我们仍然知之甚少。在中国古代数学史的已有记录中,西周时期,除了商代传袭下来的数学知识,由周人发展形成的数学成果并不多。虽然有的学者认为西周时期已出现了《周礼》“九数”所说的实用型的算法设计,但是由于举不出具体的例证而显得缺乏足够的说服力。另一方面,也许是因为缺乏对揲筮的深入研究,一些学者将其视为“一个

四则运算的例子”，弱化了从数学的角度研究揲筮的价值。按照这种处理方式，甚至可以认定其数学内涵超不过商代的水平，进而得出揲筮在“数学发展史上已没有意义，现代一般的数学史著作不提及”的结论。本书不是将揲筮拆解为简单的四则运算来看待，而是将其归纳为一则初等数论范畴内的算法命题，于是我们看到了一套有着严密的逻辑结构和程序设计的、没有数学瑕疵的专用算法。这套算法是目前惟一确知的保存得非常完整的西周数学实用例证，应当是西周数学的一项成果。揲筮的存在使我们有理由认为西周时期的数学家们已有能力和条件创制出一些与生产实践相关的实用算法，而《周礼》“九数”中的部分内容正是由这些算法所构成。注意到《易》占揲筮也是迄今所知中国最为古老的程序化的专用算法设计，根据本书的研究结果，可以明确地将算法设计的出现时期提早到西周时期，距今已有近 2800 年的历史，在中国古代数学史的研究中，如此珍贵的材料显然不应被忽视。

研究表明，揲筮具有三条显著的数学特点：

1. 显示出程序化实用算法设计的数学思想，没有理论思辨；
2. 数学方法以经验归纳为主，缺乏演绎论证；
3. 依赖于筹策算具的手动型演算方式。

这些特点正与《九章算术》等古代算经框架下形成的中国传统数学的主要特征相容，从而揭示出中国传统数学与古老的揲筮之间，有着悠久的渊源关联。中国传统数学曾经取得过许多成就，对华夏文化的形成和繁荣做出了重要的贡献。但由于缺乏积极的交流，人们对其思想、方法和工具等方面存在的局限性未能形成充分的认识，再加上社会及政治等方面的原因，自元末以后，中国传统数学便逐渐出现了衰微不振的局面。中国传统数学被现代数学所取代，是在专制统治和守旧思想被削弱和

前 言

摒弃的背景下,新一代数学家们通过广泛的交流与学习,融会了中外科学思想和先进方法的必然结果。

本书在数学归纳法原理的应用方面得到了贵州科学院应用数学研究室主任张明义研究员的悉心指导,在揲算结果数出现概率的计算方面采纳了好友罗永祥先生的建议,笔者深表感谢。

本书通过对《周易》占筮中部分数学问题的讨论,为更加全面地认识 and 了解《周易》提供了一个可能的视角,得出了一些结论、推测和看法。但是,应当说这都是一些尚还处于探讨性阶段的东西,有的内容还不甚成熟,有的推测还有待考古发现和进一步的理论研究予以证实或推定,因而其中定有谬误不确之处,希望得到大家的指正,也希望与有兴趣的读者进行交流和讨论。

张图云

2008 年 2 月

第1章 《周易》占筮及其文本

在讨论《周易》占筮中的数学问题之前,有必要对《周易》占筮及其文本的基本情况做简要的介绍。

1.1 《周易》是一种占筮方法

1.1.1 中国古代的占问术

使用占问之术预测吉凶或指导决策,是人类社会生活中一种极为普遍而古老的文化现象。在能力、知识和信息都相当有限的古代,面对变化莫测的自然界和纷繁复杂的社会关系,人们在遇事决策之前,往往由于无法估计或预知行动的后果,免不了会对结局的吉凶产生担忧或疑虑。在古人的心目中,冥冥深处也许存在着无所不知、无所不能的天地神明,这就很自然地产生出从神明那里获取指引或启示,以及向神明祈求保佑的心理需求。这样,在不同地域的古人族群中便出现了各种用来沟通人神、求取神示的占问方法。占问事宜多由族群中知识丰富或阅历较深的人实施,在涉及重大事项的决策时,族群首领往往亲自介入占问活动,因而是很严肃的事情。一旦获得了神示,人们将按神明的旨意行动,这在事实上起到了排除异议、统一意志的作用,必然有利于族群的团结与巩固。特别是在所得神示的确符合实际情况或顺应于自然规律时,对族群的发展壮大将起到积

极的作用。也许,这就是自古以来,占问诸术在不同地域的人类族群中都普遍受到重视的基本原因。另一方面,在多种占问方法并存的情况下,肯定是为人为干预因素较少而且应验比率较高的方法更容易被人们认可。因而在随机条件下追求较高的应验率也是占问方法本身不断改进更新的原始动因。显然,当一种占法失去了信众们的崇奉,这种占法也就失去了存在的理由。随着生产力的提高及社会结构的演进,一些强大的族群发展成早期的国家。在这些国家中,怎样才能更加令人信服地获取神明的启示,仍然是一门非常重要的学问,其结果是形成了各种具有传统特色的占问文化。我们今天在不同民族和国家的传统文化中,大都能发现一些与占问有关的神秘文化内容,是很正常的现象。

在中国的传统文化中,曾经出现过多种向神明祈取启示的占问方法。《史记·龟策列传》就说:“蚩、夷、氏、羌虽无君臣之序,亦有决疑之卜。或以金石,或以草木,国不同俗。然皆可以战伐攻击,推兵求胜,各信其神,以知来事。”可见,用各种占问方法求取神示,在中国古代的社会生活中也是相当普遍的。根据学者们的研究,中国古代的占问之术虽然头绪很多,但大体上都有古老的起源,经历了各自的发展过程,在一些并行使用的方法中,有的还保留着相互影响的痕迹。按照这些占问方法赖以建立的依据和形态特征,大致可以将它们区分为下述四种类型:

第一种类型以占星为代表。占星术将天象联系于人事,依据日月星辰在位置关系、运行特征、色彩形状等方面的变化,以及特异天象的生灭,进行人事吉凶的预测。在占式等派生的占法中,季节气候、地理方位等地学因素与星象历算、时辰日期等天学因素都被用于占测。这类与天地观念直接相关的占问方法对古代社会的生产和生活秩序影响极大,历代统治者都非常重

视,尤其是对占星术的控制最为严格。为了巩固王权,防止民间私测谎报引起的人心扰动,大约从西晋开始,唐、宋、元、明诸朝都颁有禁令,严禁民间私学天文历算和占星之术。例如,《晋书·武帝纪》有:“禁星气、讖纬之学。”(泰始三年,即公元267年)又如《续资治通鉴长编·卷十八》中就有“诸道所送知天文相术等人凡三百五十有一,十二月丁巳朔,诏以六十有八人隶司天台,余悉黥面流海岛”的记载,(太平兴国二年,即公元977年)等等。这样一来,占星术在各个朝代都由官方控制,在民间则少有流传及应用^[1]。可能由于占式术分成六壬、遁甲、太乙等若干分枝占法,并无统一形式,它们虽有古老来源,但影响较为分散,基本上属于民间杂占,官方一般不予禁止。

第二种类型以占卜为代表。占卜术的产生可能与古人对烧灼骨片时所生裂纹的观察有关。由于占卜时须使用动物身上的甲骨材料,因而学者们认为这是一种古人对“动物之灵”的神秘崇拜^[2]。占卜术在殷商时期最为兴盛。通常使用的卜材是乌龟的腹甲和牛羊的肩胛骨。占卜前要先在经过磨削整治的甲骨片材上钻凿凹形槽孔,占卜时用火炙灼槽孔部位,甲骨因受热不均,槽孔部位会出现裂纹。很可能因为甲骨开裂时常发出“暌”声,所以这种占法被叫做“卜”。甲骨上出现的裂纹称为“兆”,每次占卜所得兆象各有不同,古人通过长期的观察与总结,将这些兆象归纳为若干不同的类型,认为它们代表着相应的神明的旨意,因而可以用来预测所要贞问之事的吉凶。卜者常将与占卜有关的事情用当时的文字契刻在甲骨上,这就是著名的甲骨卜辞或甲骨文。近百年来,在殷墟及周原等地出土了商周时期的卜甲甲骨达十多万片,发现了五千多个不同的字符。目前已辨识出其中的一千多字,基本上可以用来解读甲骨上记载的事情,使我们对中国古代的文化有了更为确切的了解。

第三种类型以占梦为代表。人在睡眠状态下往往会做梦,梦境的情形与梦者的经历、情绪、健康状态等可能都有关系,涉及人的心理、生理、精神、意识以及生存环境等方面十分复杂的问题。古人将梦中所见与鬼神、灵魂等联系在一起,认为可以用来预测人事的吉凶,便形成了占梦术。占梦术与其他诸如摸骨看相之类同人体有关的占问之术,通常都被视为杂占,在民间有着广泛的流传。

第四种类型以占筮为代表。占筮起源于古人对数的神秘崇拜,因而也称之为数占。古人认为,在某些随机条件下的所得之数可以预测人事吉凶。例如从一堆石子或竹签中任意抽取一些出来进行点数,将得数的单双或奇偶作为判断吉凶的依据,就是一种数占,而且很可能是比较原始的数占。在《周易》类的占筮方法中,用于占筮的工具称为“策”,是一些用竹材制成的竹签,由于与称为“筹”的古代计算工具同源,因而有“筹策”之称。古人也常用蓍草的茎做策,因而古书中言及蓍时一般都与占筮相关。古代有一种职业叫做“巫”,除了跳神驱邪、采药行医之外,一些巫还长于占筮。所以,关于“筮”字,《说文解字》的解释是:“筮,《易》卦用蓍也。从竹,从巫。”说占筮是对“植物之灵”的崇拜,只是从占筮算具的用材多取自植物的观察得出的看法,更本质的认识应与古人惊奇于某些数算规律时所产生的神秘崇拜有关。古代的占筮方法很多,也衍生出许多与数相关的杂占。在这些占问方法中,《周易》是流传最广的一种。《周易》占法的早期情况目前尚不清楚,但它肯定有着极为古老的起源。一般认为,传世的《周易》占法定型于西周时期,传续至今已有将近三千年的历史,是各种占问方法中最为稳定、对中国传统文化的影响也最大的一种。

1.1.2 《周易》是一种占筮方法

占筮起源于人们对数的神秘崇拜,但不同的族群在不同的历史时期所使用的占筮方法通常并不相同。在商代,人们所用的占问方法虽以占卜为主,但也使用占筮。从出土的商代筮数记录来看,商人所用的占筮方法与《周易》占法并不相同。一般认为《周易》是周人在西周时期发明的占筮方法,应当是在周人早期占法的基础上改进完善的结果。但是周人的早期占筮与商人的占筮有什么联系,则是尚待考证的问题。

根据出土的西周甲骨文物和传世文献中的相关记载,可知周人在沿用商代占卜术的同时,占筮术也相当兴盛。卜、筮并用成了两周时期占问文化的一大特点。《尚书·君奭》所说:“故一人有事于四方,若卜筮,罔不是孚。”就用四方百姓对卜和筮的绝对崇信来比喻人们对君王举措的响应。《诗经》中“尔卜尔筮”(《卫风·氓》)、“卜筮偕止”(《小雅·杕杜》)等等,都是卜、筮并用的写照。当时流行的占筮方法有好几种,《周易》便是其中最受重视的方法之一。从此以后,用《周易》作占,在中国历史上便从未间断,一直传续至今,而且在汉代和宋代还出现过两次以《周易》占筮及经传文本为核心的易学研究高潮。《周易》占筮以其内涵的丰富哲理,对中国传统文化的形成有着一定的影响。

《左传·僖公十五年》有“龟,象也;筮,数也”的说法,指出卜之所依是甲骨上的灼裂兆象,是实在的物象,而筮之所依则是抽象的数。当然,这里的“数”应不止“计数”的意思,还有按某种规则进行“数算”的含义,但本质上是神秘文化意义上的“数”。

《礼记·曲礼上》则关注于卜筮之术的政治功能:“龟为卜,

筴(策)为筮。卜筮者,先圣王之所以使民信时日、敬鬼神、畏法令也;所以使民决嫌疑、定犹与(豫)也。故曰:疑而筮之,则弗非也;日而行事,则必践之。”可见,用卜筮之法探求神意,是解除疑虑,协调行动,统一意志的有效方式。所以先圣王要求人们不但不要怀疑卜筮的结果,而且必须按期践行。正是由于古代帝王们注意到卜筮占问之术在社会生活中有着重要的作用,所以对一些重要的占问术实施了严格的管理。汉晋以后,历代都对占星术严加控制,不许流传于民间,就是典型的例证。从目前所知的情况来看,商周时期,王室政府就对各种占问术设立了管理部门,配备了相关的职官人员,其中,就有专门管理占筮的人员。

《吕氏春秋·审分览·勿躬》说“巫咸作筮”,而《尚书·君奭》有“在太戊时,巫咸义王家”的记载。将它们联系起来,大致可知商王太戊时,由辅臣巫咸管理并施行占筮。当然,由于缺乏资料,商代的占筮叫什么名称,按怎样的规则行占,至今仍不清楚。到了西周时期,随着周人所用占筮术的完善,占筮的地位逐步提高,官方对占筮事务的管理也有了明显的加强,由殷周之际的“择建立卜筮人”(《尚书·洪范》),发展成《周礼·春官宗伯》中所说的由“大卜”、“筮人”等组成的一套机构。这个机构的任务从“上春相(选择和采集)筮(蓍草),凡国事共(供给)筮”开始,即从春正月时要选藏蓍草,到了占筮国事时要保证蓍草的供应开始,到“掌三《易》,以辨吉凶”,即用《连山》、《归藏》、《周易》这三种统称为《易》的占筮方法占问吉凶,最后还要“凡卜筮既事,则系币以比其命。岁终,则计其占之中否”,即卜筮完毕,要将所得的命辞结果收藏起来,到了年终则对应验情况进行统计。可见,周王室对卜筮的管理是严格而有序的。

前面所说西周时期并行使用的三种《易》占见于《周礼·大

卜》：“大卜……掌三《易》之法：一曰《连山》，二曰《归藏》，三曰《周易》。其经卦皆八，其别皆六十有四。”可知这三种《易》占使用的八卦和六十四卦的卦象符号都是相同的，可以估计成卦时所用的筮算方法也应该相同。一般认为这三种《易》占的差异主要是释占方法和繇辞文本各有不同。1993年，江陵王家台秦墓出土了一批竹简，其中有一种被考定为《归藏》的文本，属于战国末期的文物，表明当时确实存在《归藏》占法，因而《周礼》所载，是有参考价值的^[3]。到了西周时期，通过筮算得到卦象，再配合繇辞文本释占的《易》占，已成占筮方法中的主流，其他占筮方法则逐渐被淘汰而不传。由于《连》、《归》二《易》大约在汉晋时期先后失传，所以今人对它们的了解甚少，但仍可估计三《易》中，《周易》是较为主要的占法。这样，虽然有时《易》有泛指三《易》的意思，但是在有些场合，《易》就是《周易》的简称，一般不会发生混淆或误解。

关于《周易》中的“周”字历来有两种解释。一是汉代成书的《易纬》所说的“因代以名周”，认为“周”是朝代的名称。这就界定了《周易》是周代的事物，或者说，是周人使用的占筮方法，与其他的占筮方法是有所区别的。后来的学者们，如唐代的孔颖达，宋代的程颐和朱熹等人，多采用此说，是比较流行的一种解释。二是《易传·系辞上》有“周乎万物，道济天下”的语句，虽然并未明确指出这就是《周易》中“周”字的出处，但东汉学者郑玄亦释“周”为“周普”，是周全，普遍的意思，强调了《周易》之道能够涵盖万物的普适性，后世也有不少赞同此说的学者。关于“易”字的解释相对要多一些，例如《说文解字》认为：“易，蜥蜴，守宫也。象形。秘书（《参同契》）说：‘日月为易’，象阴阳也。”是说“易”字或是象形于蜥蜴，或是取义于日月所代表的阴阳概念。汉代《周易乾凿度》则认为：“易，一名而含三义：