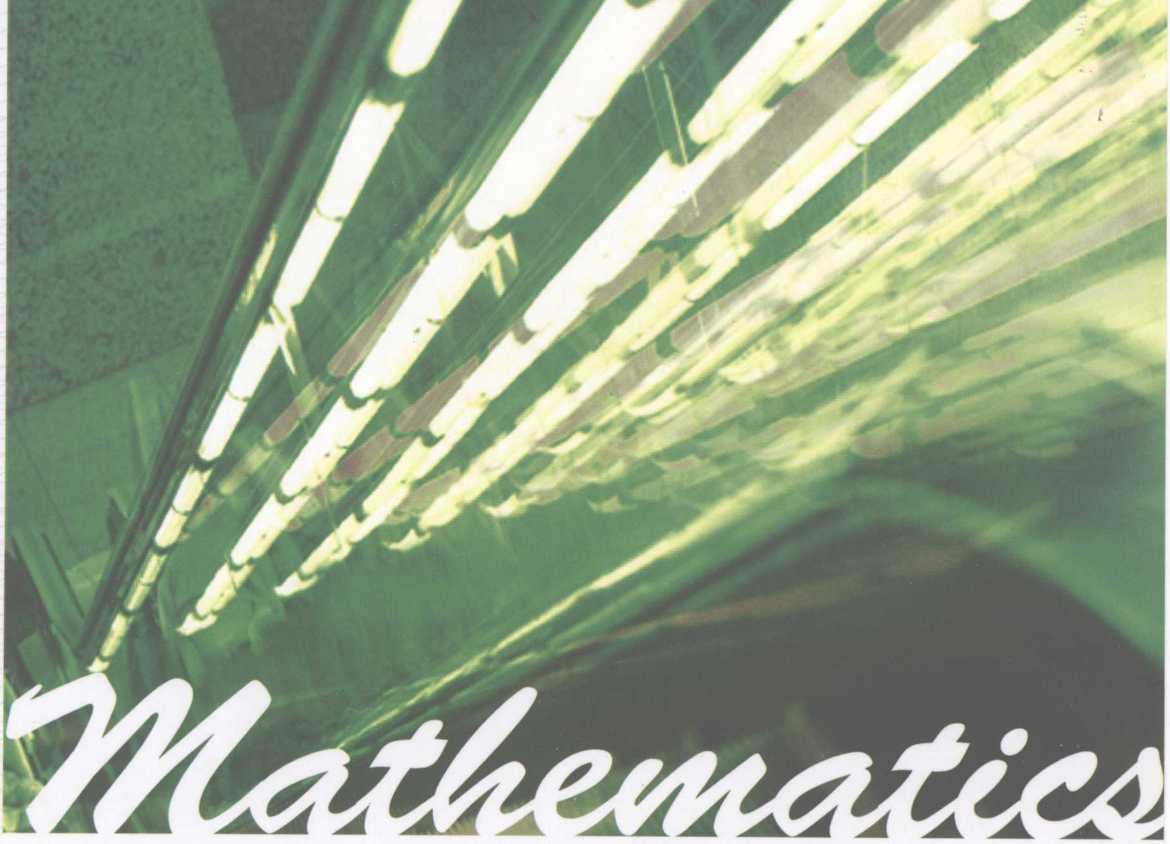

新世纪职成教育数学课程系列教材

高等数学学习辅导与训练

■ 主编 曾文斗

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

新世纪职成教育数学课程系列教材

高等数学学习辅导与训练

主　　编　曾文斗

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《全国各类成人高等学校专升本招生高等数学复习考试大纲》编写而成的与《高等数学》教材配套的辅导书。

本书的内容与教材同步，每章均包括以下栏目：知识范围；学习要求；例题解析；习题选解；参考答案。最后将有两套按照"大纲"要求编写的模拟测试卷。

本书适用于普通高职院校（特别是民办高校）以及成人高校大专班（专升本）学生复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导与训练 / 曾文斗主编. —北京：高等教育出版社，2007.6

ISBN 978-7-04-021705-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. 曾… Ⅲ. 高等数学－高等学校：技术学校－教学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 093446 号

责任编辑 徐 东 特约编辑 杨琳琳 封面设计 吴 昊 责任印制 蔡敏燕

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		021-56964871
邮政编码	100011	免费咨询	800-810-0598
总　　机	010-58581000	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	021-56965341		http://www.hep.com.cn
			http://www.hepsh.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
排　　版	南京理工出版信息技术有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	上海师范大学印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2007 年 7 月第 1 版
印　　张	13.5	印　　次	2007 年 7 月第 1 次
字　　数	335 000	定　　价	18.00 元

物料号　21705-00

前　言

本书是新世纪职成教育数学课程系列教材《高等数学》(以下简称为"高数")的配套教学用书，旨在帮助读者理解、消化和复习高等数学的知识与方法. 同时，本书系按照教育部制定的《高职高专基础课程教学要求》和最新修订的《全国各类成人高等学校专升本招生高等数学复习考试大纲》(以下简称为"大纲")的要求编写的，且其例题和同步训练题大多选自近十多年来全国成人高校专升本招生统考的试题. 因此，它又是一本最新的成人高考专升本招生复习辅导的实用教材.

本书共9章，第1至8章与"高数"教材相对应，每章均包括内容提要、学习要求、例题解析、同步训练、习题选解、参考答案、学习小结七个部分. 第9章为综合训练，是历年来专升本考试部分综合性试题的分析、解答与训练，同时，还提供两套按照"大纲"要求编写的自测试题，供读者选用.

本书的第1、4、9章及附录由曾文斗编写，第2、6章由王子丁编写，第3章由林小龙编写，第5、7章由林伟洪编写，第8章由周雅丽编写. 全书由曾文斗统一策划、统稿和定稿.

本书的编写出版得到浙江科技学院及其隶属的福建泉州函授站和其他各函授站、华侨大学成人教育学院、黎明职业大学、泉州师范学院及其高职学院、泉州理工职业学院的领导和教师的支持，在此，谨表示衷心地感谢.

限于水平，同时编写时间紧迫，错误和缺点在所难免，欢迎广大读者批评指正.

编　者

2007年4月

目　　录

* 为选学内容，供参考.

第1章 函数的极限与连续性

内容提要

本章包括准备知识—函数、极限的概念与运算、函数的连续性三个部分.

一、函数的概念

(一) 函数的概念与特性

1. 函数的定义:设某一变化过程中两个变量 x 和 y, D 是一个给定的数集,如果对于任意一个 $x \in D$, 按照一定的对应法则 f,都有唯一的 y 与它相对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y = f(x)$.

注意:函数的定义域与对应法则是决定函数的两个重要因素,两个函数只有它们的定义域和对应法则都相同时,才认为是相同的,与自变量用什么字母无关.

2. 分段函数:用解析法表示函数时,有时用几个式子分段表示一个函数,即对于自变量的不同取值范围,函数采用不同的表达式,这种函数就是**分段函数**. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

3. 函数的特性:

(1) **有界性**:对于定义在区间(a, b)内的函数 $y = f(x)$, 如果存在一个 $M > 0$,对于任一 $x \in (a, b)$,都有 $|f(x)| \leqslant M$成立,则称函数 $y = f(x)$ 在(a, b) 内是**有界**的,否则,称 $f(x)$在(a, b)内是**无界**的.

(2) **奇偶性**:设函数 $y = f(x)$ 定义在以原点为中心的对称区间$(-a, a)$ $(a > 0)$ 内,如果对于任一 $x \in (-a, a)$,都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 在$(-a, a)$ 内是**奇函数**;如果对于任一 $x \in (-a, a)$,都有 $f(-x) = f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 在$(-a, a)$ 内是**偶函数**.

奇函数的图形是关于**原点对称**的,偶函数的图形是关于 **y 轴对称**的.

(3) **单调性**.

(4) **周期性**.

(二) 反函数与基本初等函数

1. 反函数:设函数 $y = f(x)$ 的定义域为D,值域为R,若对于R中的任意一个y的值,通过关系 $y = f(x)$,在D中都有唯一的x值与之对应,这就建立了x与y的函数关系$x = f^{-1}(y)$,这时,称 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的 **反函数**,习惯上写成 $y = f^{-1}(x)$.

反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域是原来函数 $y = f(x)$(称为**直接函数**)的值域,而反函数的值域是直接函数的定义域.

互为反函数的两个函数 ($y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$) 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的.

2. 基本初等函数:以下六类函数统称为**基本初等函数**:

(1) **常函数**: $y = C$ (C是常数);

(2) **幂函数**: $y = x^{\alpha}$ $\quad (\alpha \in \mathbf{R})$;

(3) **指数函数**：$y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，当 $a=\mathrm{e}\approx 2.718\cdots$ 时，$y=\mathrm{e}^x$；

(4) **对数函数**：$y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，当 $a=\mathrm{e}$ 时，称为**自然对数**函数：$y=\ln x$；

(5) **三角函数**：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

(6) **反三角函数**：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$.

(三) 复合函数与初等函数

1. 复合函数：设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且与 x 对应的 u 值使 y 有定义，则称 y 通过 u 是 x 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，u 叫做**中间变量**.

2. 初等函数：由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次复合而成的，并能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

二、极限的有关概念

(一) 数列的极限：对于无穷数列 $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$，如果存在一个常数 A，当 n 无限增大时，数列的通项 y_n 无限趋近于 A，则称当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{y_n\}$ 以 A 为**极限**，或称数列 $\{y_n\}$ **收敛**于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \quad 或 \quad y_n\to A\ (n\to\infty).$$

(二) 函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数 A，当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 无限趋近于 A，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

2. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义(在 x_0 点处可以无定义)，如果存在一个常数 A，当 x 无限趋近于 $x_0 (x\neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于 A，则称函数 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

3. 左极限与右极限：在上面当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限的定义中，如果把"当 x 无限趋近于 $x_0 (x\neq x_0)$ 时"改为"当 x 从 x_0 的左(右)侧无限趋近于 $x_0 (x\neq x_0)$ 时"，那么，其结论即改为"就称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左(右)极限**"，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\ (\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A).$$

(三) 极限存在的充要条件

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在的充要条件是它在该点的左、右极限都存在且相等.

(四) 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

(1) 定义：极限是零的变量称为**无穷小量**，简称为**无穷小**.

(2) 性质：1) 有限个无穷小量的代数和仍然是无穷小量；

2) 有限个无穷小量的乘积仍然是无穷小量；

3）有界函数与无穷小量之积仍然是无穷小量.

2. 无穷大量:在某个变化过程中,绝对值无限增大的变量称为**无穷大量**,简称为**无穷大**.

3. 无穷小与无穷大的关系:无穷大量的倒数是无穷小量;非零的无穷小量的倒数是无穷大量.

三、极限的运算

(一) 极限的四则运算法则

设当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,$\lim u(x) = A$, $\lim v(x) = B$,则有

法则1 $\lim[u(x) \pm v(x)] = \lim u(x) \pm \lim v(x) = A \pm B$.

法则2 $\lim[u(x) \cdot v(x)] = \lim u(x) \cdot \lim v(x) = A \cdot B$.

法则3 $\lim \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)} = \dfrac{A}{B}\ (B \neq 0)$.

从法则2可得如下推论:

推论1 $\lim Cu(x) = C\lim u(x) = CA$ (C是常数).

推论2 $\lim[u(x)]^n = [\lim u(x)]^n = A^n (n \in \mathbf{N}_+)$.

(二) 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

(三) 无穷小的比较

1. 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,$\alpha \to 0$, $\beta \to 0$,那么,

(1) 如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$,则称 α 是比 β **高阶的无穷小**,记作 $\alpha = o(\beta)$;

(2) 如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$,则称 α 是比 β **低阶的无穷小**;

(3) 如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = C$, $(C \neq 0,\ C \neq 1)$,则称 α 与 β 是**同阶无穷小**;

(4) 如果 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$,则称 α 与 β 是**等价无穷小**,记作 $\alpha \sim \beta$.

常见的等价无穷小有:当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x \sim x,\ \tan x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\ \arctan x \sim x,\ \ln(1 + x) \sim x.$$

2. 等价无穷小的代换性质:如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,$\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$,且 $\lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ 存在,则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$.

四、函数的连续性

(一) 连续函数的概念

1. 函数在一点连续的定义

定义1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义,当 x 在 x_0 处取增量 Δx 时,如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**连续**，这时，称 x_0 为 $y = f(x)$ 的**连续点**.

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

2. 左连续与右连续：如果把定义 2 中的"$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$"改为"$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$"("$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$")，其结论则改为"则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**左连续(右连续)**".

3. 函数在一点连续的充要条件

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是该函数在点 x_0 处左连续且右连续，即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

4. 间断点及其分类

函数的不连续点称为函数的**间断点**.

从函数在一点处连续的充要条件可知，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须满足下面三个条件：

(1) $f(x_0)$有定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中有一个不成立，则 x_0 就是 $f(x)$的间断点. 左、右极限都存在的间断点称为**第一类间断点**，其余的间断点称为**第二类间断点**.

(二) 连续函数的性质

1. 有限个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍然是连续函数.

2. 有限个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

(三) 初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都连续.

(四) 闭区间上连续函数的性质

1. 最大最小值定理：设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，则 $f(x)$在$[a, b]$上必有最大值和最小值.

2. 介值定理：设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则对于介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意一个实数 c，至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = c$.

3. 推论(零点定理)：设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = 0$.

学 习 要 求

一、理解函数、分段函数、反函数、基本初等函数、复合函数、初等函数的概念；了解函数的四个特性；会求分段函数的定义域和函数值；掌握复合函数的运算(分解与复合).

二、了解极限的概念,会求函数在一点处的左、右极限,掌握函数在一点处极限存在的充要条件.

三、理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小与无穷大的关系,会进行无穷小量的比较(高阶、低阶、同阶和等价),会运用等价无穷小量的代换求极限.

四、掌握极限的四则运算法则,熟练掌握用两个重要极限求极限的方法.

五、理解函数在一点连续与间断的概念,理解函数在一点连续与极限存在的关系,掌握判断函数(含分段函数)在一点处的连续性的方法,会求函数的间断点.

六、理解初等函数在其定义区间上的连续性,会利用连续性求极限;了解闭区间上连续函数的性质,会用它们推证一些简单的命题.

例题解析

例 1　填空题:

(1) [20206]① 设 $f(x) = \ln x,\ g(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$,则 $f[g(x)] =$ ________.

(2) [20406] 设 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leqslant 0; \\ \cos x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ ________.

(3) [20106] 极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} =$ ________.

(4) [20006] 极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2+5x-6} =$ ________.

(1) **解**　$f[g(x)] = \ln \mathrm{e}^{2x+1} = 2x+1$.

(2) **解**　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1) = 1$,且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\cos x = 1$,所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

(3) **解法 1**　(分母因式分解)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2};$$

解法 2　(分子有理化)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

(4) **解**　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+5x-6} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+6} = \dfrac{1}{7}.$

注:例 1(2)中,如果将函数改为 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0; \\ \cos x, & x > 0, \end{cases}$ 那么,仍然有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ 成立,这是因为,虽然 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义,但其极限仍存在(函数在一点的极限是否存

---

① "[20206]"指全国成人高考专升本高等数学(二)02 年试卷的第 6 题.

在与在这点是否有定义无关).

例 2 **选择题**[①]:

(1) [10001] 当 $x\to 0$ 时, $x^2+\sin x$ 是 x 的( ).

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 同阶无穷小　　D. 等价无穷小

(2) [10301] $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 等于( ).

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

(3) [20402] 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=3$,则 a 等于( ).

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(4) [29408] 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0;\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2-x, & 1<x<2,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在( ).

A. $x=0$ 及 $x=1$ 处均间断　　B. $x=0$ 及 $x=1$ 处都连续

C. $x=0$ 处间断, $x=1$ 处连续　　D. $x=0$ 处连续, $x=1$ 处间断

(1) **解** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$,所以,当 $x\to 0$ 时,无穷小量 $x^2+\sin x$ 与 x 等价,故应选 D.

(2) **解** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\{\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}}\}^{-2}=e^{-2}$,故应选 D.

(3) **解** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot a=a$,由已知,得 $a=3$,故应选 D.

(4) **分析** 由函数在一点连续的三个条件知,

1) 在 $x=0$ 处:因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$,而 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断;

2) 在 $x=1$ 处:因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=f(1)=1$,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,故应选 C.

例 3 [10316] 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-4\sin x}$.

分析 当 $x\to\infty$时,这类题目常常采用分子分母同除以 x 的最高次幂(本题是 x^2)的方法求解,即

$$\frac{x^2+1}{3x^2-4\sin x}=\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{4\sin x}{x^2}},$$

由于 $\dfrac{4\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\cdot 4\sin x$,当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷小量,而 $4\sin x$ 是有界的,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\sin x}{x^2}=0$,因而可求得

---

① 本书的"选择题",除特别指出外,均指"单项选择题".

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{3x^2-4\sin x}=\frac{1}{3}.$$

具体解答过程请读者自己完成.

例 4 [29418] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sin 2x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{\sin 2x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 2x}{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{4}.$$

例 5 [20118] 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-6}=\mathrm{e}^{-6}$.

例 6 [29717] 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时, $\ln(1-3x)\sim(-3x)$, $\sin 2x\sim 2x$,所以,利用等价无穷小代换,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{2x}=-\frac{3}{2}.$$

注:本例还可利用洛必达法则(见第 3 章)求解.

想一想:从上面的例 1(3)、例 2(2)及例 3 至例 6 的 6 个例题的分析或解答中,能不能归纳出求极限有哪几种常用的方法?

例 7 [10017] 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+b, & x\neq 1;\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 试确定 b 的值,使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

解 因为 $f(1)=2$,且 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+b)=1+b$,所以,根据函数在一点连续的充要条件,必有

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1),\text{即 }1+b=2,\text{得 }b=1.$$

例 8 [19808] 设 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+a}{x-2}=3$,求常数 a 的值.

分析 由于当 $x\to 2$ 时,分母极限为零,而已知该函数的极限存在(其值为 3),故其分子的极限也必为零,即

$$\lim_{x\to 2}(x^2-x+a)=4-2+a=0,$$

因而,得 $a=-2$.

例 9 [29716] 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x+4}$.

解法 1 因为 $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x+4}=\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+4}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+4}}=\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{4}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4}}$,

且$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}$,

又当$x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}\to 0$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{4}=1$;

同理$\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{4}=1$,

故$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x+4}=\dfrac{e^{-1}\cdot 1}{e\cdot 1}=e^{-2}$.

解法2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x+4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^{3}$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-2}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{3}$$

$$=e^{-2}\cdot 1=e^{-2}.$$

同 步 训 练

(一)填空题:

1. 设$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\leqslant 0;\\ \sqrt{x}, & x>0,\end{cases}$则$f(0)=$______.

2. 设$f(x)=3x+5$,则$f[f(x)-2]=$______.

3. 设$f(x)=\dfrac{1}{x}$,则$f[f(x)]=$______.

4. 设$y=3^{u}$, $u=v^{2}$, $v=\tan x$,则复合函数$y=f(x)=$______.

5. 设$f(x+1)=x^{2}+3x+5$,则$f(x)=$______.

6. 设$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0;\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0,\end{cases}$则$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$______.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x^{2})=$______.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{2}+x-6}{x^{2}-4}=$______.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x^{2}-1}=$______.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}-1}{3x^{2}+x}=$______.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$______.

12. 当$x\to 0$时,函数$f(x)$与$\sin x$是等价无穷小,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin x}=$______.

13. 当$x\to 0$时,ax^{2}与$\tan\dfrac{x^{2}}{4}$为等价无穷小,则$a=$______.

14. 函数$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{3-x}}$的间断点是$x=$______.

15. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的间断点 $x=$ ________.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}3x, & -1<x<1;\\ a, & x=1;\\ 3x^2, & 1<x<2\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续,则 $a=$ ________.

17. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ a+2, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

18. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{2x}=\mathrm{e}$,则 $k=$ ________.

(二)选择题:

1. 下列各组函数为同一函数的是(   ).

A. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=x+1$

B. $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$

C. $f(x)=x$ 与 $g(x)=x(\cos^2 x+\sin^2 x)$

D. $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=(\sqrt{x})^2$

2. 函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$ 的定义域是(   ).

A. $(0,5]$ B. $(1,5]$ C. $(1,5)$ D. $(1,+\infty)$

3. 函数 $f(x)=x^3\sin x$ 是(   ).

A. 奇函数   B. 偶函数   C. 有界函数   D. 周期函数

4. 函数 $y=f(x)=2^{x-1}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 是(   ).

A. $\log_2(x+1)$ B. $\log_2 x+1$ C. $\dfrac{1}{2}\log_2 x$ D. $2\log_2 x$

5. 设 $f(x)=\tan x$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$,则 $f[g(x)]$ 等于(   ).

A. $\tan\dfrac{1}{x^2}$ B. $\tan x^2$ C. $\tan^2 x$ D. $\tan^2\dfrac{1}{x}$

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是(   ).

A. -1 B. 0   C. 1   D. 不存在

7. 当 $x\to 0$ 时,下列函数是无穷小的是(   ).

A. $\dfrac{\sin x}{x}$ B. $x^2+\sin x$ C. $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$ D. $2x-1$

8. 下列极限中,正确的是(   ).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=1$ D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

9. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ 等于（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

10. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$ 等于（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. 1　　D. $\dfrac{5}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$ 等于（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

12. 下列各等式中，正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=e$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=e$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

13. 当 $x\to 0$ 时，x^2 与 $\sin x$ 比较是（　　）.

A. 较高阶无穷小　　B. 等价无穷小　　C. 同阶无穷小　　D. 较低阶无穷小

14. 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)$ 与 x 比较是（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 等价无穷小

C. 非等价的同阶无穷小　　D. 低阶无穷小

15. 当 $x\to 0$ 时，与 $3x^2+2x^3$ 等价的无穷小量是（　　）.

A. $2x^3$　　B. $3x^2$　　C. x^2　　D. x^3

16. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}}{8}, & x\neq 0;\\ k, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 k 等于（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

17. 点 $x=0$ 是 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0;\\ e^x-1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 第二类间断点　　D. 第一类间断点，但不是可去间断点

*18. 设 $f(x)=\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$，当 $x\neq 0$ 时，$F(x)=f(x)$，若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $F(0)$ 等于（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

（三）解答题：

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.　　2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.　　4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$.