2003年上海大学博士学位论文 17

全局优化的几种确定性方法

作　者：吴至友
专　业：运筹学与控制论
导　师：张连生

上海大学出版社
·上海·

2003年上海大学博士学位论文

全局优化的几种确定性方法

作　者：　吴至友
专　业：　运筹学与控制论
导　师：　张连生

上海大学出版社
· 上海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2003)

Some Deterministic Methods For Global Optimization

Candidate: Wu Zhiyou

Major: Operations Research and Cybernetics

Supervisor: Prof. Zhang Liansheng

Shanghai University Press

• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	王哲民	教授，复旦大学管理学院	200433
委员：	唐国春	教授，上海第二工业大学经管学院	201209
	孙世杰	教授，上海大学数学系	200436
	孙小玲	教授，上海大学数学系	200436
	田蔚文	教授，上海大学数学系	200436
导师：	张连生	教授，上海大学	200436

评阅人名单：

王哲民	教授，复旦大学管理学院	200433
杨新民	教授，重庆师范大学数计系	400047
唐国春	教授，上海第二工业大学经管学院	201209

评议人名单：

冯国胜	教授，同济大学应用数学系	200092
韩继业	教授，中国科学院应用数学所	100080
邓乃杨	教授，中国农业大学东区理学院	100083
何炳生	教授，南京大学数学系	210093
濮定国	教授，同济大学应用数学系	200092
徐以汎	教授，复旦大学管理学院	200433

答辩委员会对论文的评语

吴至友的博士论文《全局优化的几种确定性算法》对全局优化的理论和方法进行了深入探讨。

全局优化是数学规划中的重要课题，应用广泛，近年来有不少进展，但仍有不少问题有待解决，因此选题是有意义的。

论文对这一课题作了很深入而又广泛的讨论。首先讨论了在一定条件下凸化、凹化及单调化的途径，其次讨论了隐凸函数、隐凸规划问题，给出了一个充分性条件；由此对不定二次规划问题是否为隐凸规划，仅需由问题的系数即可验证，这一结果有重要理论和应用价值。此外，对一般求无约束全局优化的方法提出了改进的填充函数和平稳点函数法，有理论和应用价值。

文章作者对数学规划基本和专业知识有很好掌握和理解，并能熟练应用，有很强的独立研究能力，文章有创见，是一篇优秀的博士论文。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决,一直通过吴至友同学的博士学位论文答辩，建议授予工学博士学位。

答辩委员会主席：王哲民

2003 年 7月 8 日

摘 要

全局最优化问题广泛见于经济模型，金融，网络交通，数据库，集成电路设计，图像处理，化学工程设计及控制，分子生物学，环境工程学等．因为存在多个不同于全局最优解的局部最优解，而传统的非线性规划方法都只能求其局部最优解，所以不能顺利地应用于求解全局最优化问题．在过去的几十年里，由于全局最优化在许多领域的重要应用，其理论和方法已经得到了很大的发展．这些方法主要包括确定性方法和随机方法．

本文给出了求解全局最优化问题的几种确定性方法．第一章，概述了目前国内外几种主要的全局最优化确定性方法．第二章，对具有一定特殊结构的全局最优化问题给出了一种全局优化的确定性方法：非线性规划的凸化、凹化方法．通过这些方法可把相应的全局最优化问题转化为一个等价的凸规划或凹极小或反凸规划或标准 D.C. 规划问题．由于凸规划问题的任一局部最优解都是全局最优解，故若一个规划问题能转化成一个等价的凸规划问题 (这类规划问题称为隐凸规划问题)，则对这种规划问题，只需用局部极小化方法就可得到其全局最优解．而目前关于凹极小、反凸规划和 D.C. 规划问题也有了很多较为成熟的求其全局

最优解的方法，如：外逼近法，分支定界法等等．所以如果一个规划问题能转化为一个等价的凹极小或反凸规划或 D.C. 规划问题，则也可以通过解这些转化后的规划问题，来得到原问题的全局最优解或近似全局最优解．所以，非线性规划的凸化、凹化方法是解全局优化问题的一种重要方法之一．第二章的内容安排如下：第 2.2 节，对严格单调函数给出了一个一般形式的凸化、凹化变换公式，通过该变换公式可将一个严格单调的非线性规划问题转换为一个等价的凹极小问题或反凸规划问题或标准 D.C. 规划问题 (一般情况下，不能转化为凸规划问题)．第 2.3 节，对约束函数具有一定单调性的非单调规划问题给出了其目标函数的一个一般形式的凸、凹化变换公式，通过这个变换公式可直接将一个约束函数单调而目标函数非单调的非线性规划问题转化为一个等价的凹极小问题或反凸规划问题或标准 D.C. 规划问题 (一般情况下，不能转化为凸规划问题)．第 2.4 节，利用函数的凸化变换公式，首先给出了一个非凸函数 (不一定单调) 能转化为一个凸函数的一些充分性条件，这类非凸函数称为隐凸函数，并进而讨论了几种凸性之间的关系，然后给出了一个非凸规划问题能转化为一个等价的凸规划问题的一些充分性条件，这类规划问题称为隐凸规划问题．接着给出了二次规划问题为隐凸规划问题的一些充分条件，特别地，针对某些特殊二次规划问题给出了由其系数直接判定其为隐凸规划问题的充分条件．最后讨论了只有一个约束的一维二次规划问题为隐凸规划问题的概率，所得的概率表明

这类特殊的规划问题是隐凸规划问题的可能性是很大的.

第三章, 对一般结构的无约束全局极小化问题给出了求其全局极小点的一些方法. 这些方法的共同特点是通过已经求得的局部极小点 x^* 构造辅助函数, 然后局部极小化辅助函数, 若 x^* 不是全局极小点, 则可以得到比 x^* 更好的一个点 ("更好" 指该点对应的原目标函数值比 x^* 对应的原目标函数值更小), 接着从这个点出发, 局部极小化原问题可以得到比原问题的一个更好的局部极小点, 最终得到原极小化问题的全局极小点或近似全局极小点. 第三章内容安排如下: 第 3.2 节, 给出了填充函数的一种新定义及满足这种新定义的一些填充函数, 并利用这些填充函数, 给出了求无约束全局极小化问题的一种新的填充函数法及这种新的填充函数法的一种改进方法, 称之为拟填充函数法. 第 3.3 节, 提出了一种新的辅助函数, 称之为平稳点函数, 利用这种平稳点函数给出了求无约束全局极小化问题的一种新的方法, 称之为平稳点函数法, 并给出了这种平稳点函数法的一种改进方法, 称之为拟平稳点函数法. 这里的平稳点函数法和拟平稳点函数法都是由本文首次提出的. 第 3.2 节和第 3.3 节后面都给出了一些算例, 这些算例说明了所给出的这些方法都是有效的.

关键词: 全局最优化, 凸化, 凹化, 隐凸规划, 填充函数, 平稳点函数

Abstract

Global optimization porblems abound in economic modeling, finance, networks and transportation, databases, chip design, image processing, chemical engineering design and control, molecular biology, and environmental engineering. Since there exist multiple local optima that differ from the global solution, and the traditional minimization techniques for nonlinear programming are devised for obtaining local optimal solutions, they can not be used smoothly to solve the global optimization problems. During the past several decades, great development has been obtained in the theoretical and algorithmic aspects of global optimization due to the important practical applications. These developed approaches mainly consist of two categories: deterministic approaches and stochastic approaches.

In this thesis, several deterministic approaches of global optimization problems are developed. In chapter 1, a brief introduction is given to the existing main classes of deterministic global optimization approaches. In chapter 2, some convexification and con-

cavification methods are given for some kinds of global optimization problems with special structures. Then these global optimization problems can be converted into equivalent convex programming problems or concave minimization problems or reverse convex programming problems or D.C. programming problems. Since any local minimum of a convex programming problem is a global minimum, if a programming problem can be converted into an equivalent convex programming problem (which is called a hidden convex programming problem), then a local minimization technique can be used to obtained the global optimal solution of the primal problem. Today there are many relatively mature global optimization approaches for concave minimization problems, reverse convex programming problems and D.C. programming problems such as outer approximatation method, branch and bounded method, ect.. Thus, if a programming problem can be converted into an equivalent concave minimization or reverse convex programming problem or D.C. programming problem, then its global minimum or approxiamte global minimum can be obtained by solving the converted structured problems. chapter 2 is organized as follows. A general convexification and concavification method are presented in section 2.2 for strictly monotone functions, then a strictly monotone nonlinear programming problem can be converted into an equivalent concave minimization or reverse convex programing problem or D.C. programming problem(generally, it can not be converted into an equivalent convex programming problem). In section 2.3, a general conveification and concavification metbod for the objective function in a programming problem with certain monotonicity for constraints and nonmonotone objective function are presented. By tbe proposed transformation methods, a programming problem with monotone constraints and nonmonotone objective function programming problem can be directly converted into an equivalent concave minimization or reverse convex programing problem or D.C. programming problem(generally, it can not be converted into an equivalent convex programming problem). In section 2.4, by tbe convexification of some kinds of nonconvex functions, firstly some sufficient coditions that assure a nonconvex function(not necessarily to be monotone) can be converted into a convex function are presented. Tbis kind of functions are said to be hidden convex functions. The relationships among some kinds of convexities are discussed. Then, some sufficient coditions tbat assure a nonconvex programming problem can be converted into an equivalent convex programming problem are proposed. This kind of programming problems are said to be hidden convex programming problems. Futhermore, some sufficient conditions that assure a quadratic programming problem is a hidden convex programming problem are derived. In particular, sufficient conditions which can be directly verified by the coefficients is proposed for some special quadratic programming problems. Finally, the probability of a special kind of quadratic programming porblems with single constraint and only one variable being a hidden convex programming problem is discussed. The obtained probability shows a high possibility of occurrence that this special kind of quadratic programming porblem is a hidden convex programming porblem in nonconvex situations.

In chapter 3, some new global optimization approaches for general unconstraint global optimization problems are presented. The common feature of these approaches is that firstly a modified function is constructed by using the known local minimum x^* and local minimization search is implemented to the modified function, if x^* is not a global minimum, then a better point can be obtained ("better" means that the primal objective function value of this point is less than that of x^*), next, a better local minimum can be obtained by implementing local minimization search to the primal problem starting from the better point, finally a global minimum or a approximate global minimum can be obtained. chapter 3 is organized as follows. In Section 3.2, firstly a new definition about filled function is given and some filled func-

tions satisfying the given new definition is presented, then a new filled function method for solving unconstrained global optimization problems is proposed, and furthermore an improved method of the new filled function method is proposed, which is called the quasi-filled function method. In section 3.3, a new modified function named stationary-point function is proposed, and then a new global optimization method named the stationary-point function method is presented by using the proposed stationary-point function. Furthermore, an improved method of the stationary-point function method named quasi-stationary point function method is proposed. The numerical examples in the end of section 3.2 and 3.3 show that these proposed algorithms are applicable.

Key words: global optimization, convexification, concavification, hidden convex programming problem, filled function, stationary-point function

目　录

第一章　全局优化的确定性算法概述

1.1　引言

当今社会大量的社会科学和自然科学中的问题都可归结为一个全局最优化问题，其广泛见于经济模型，金融，网络交通，数据库，集成电路设计，图像处理，化学工程设计及控制，分子生物学，环境工程学等．由于多个不同于全局最优解的局部最优解的存在，使得传统的非线性规划技术不能顺利地应用于全局最优化问题．在过去的三十几年里，关于全局优化的许多新的理论，算法层出不穷，特别对各种在实际中出现的具有重要意义的全局优化问题，例如凹极小问题、反凸规划问题、D.C. 规划问题、单调规划问题等等，都有了一些比较好的结果．最近几年，对于适用于一般的全局最优化问题的算法也有了长足进展．

我们把研究全局最优化方法的文献分成两大类：第一类主要是处理具有一定特殊结构的全局优化问题，例如，研究关于凹极小、反凸规划、D.C. 规划和单调规划的全局优化算法的文献，如文献 [1–9] 等．第二类是处理一般结构的全局最优化问题，这类全局最优化方法不要求目标函数和约束函数具有特殊的结构和特