普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学基础教程

（上 册）

◎ 刘元骏 编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学基础教程

(上　册)

刘元骏　编著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书是作者根据多年的教学积累，在总结此前出版的同类教材得失的基础上，参照数学教学现代化的主流趋势编撰而成的．本书分上、下两册出版．上册内容为一元微积分和空间解析几何，包括函数、极根与连续、一元函数微分学、不定积分、定积分和空间解析几何简介等五章．书后还附有为微积分创立与发展做出过贡献的数学家简介、极坐标及其所表示的图形、行列式与克拉默规则、有理真分式分解定理的证明以及习题、复习题答案与提示五个附录．

本书可作为综合大学、理工科大学和师范院校对数学要求较高的非数学专业本科学生的教材或参考书．

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础教程．上册/ 刘元骏编著．—北京：科学出版社，2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN　978-7-03-021224-5

Ⅰ．大…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 027419 号

责任编辑：李鹏奇　王　静　吴伶伶／责任校对：曾　茹

责任印制：张克忠／封面设计：陈　敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第　一　版　开本：B5(720×1000)

2008 年 6 月第一次印刷　印张：19 1/2

印数：1—4 000　字数：368 000

定价：27.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

一

大学数学是高等院校对非数学专业本科学生开设数学课程的总称，它代表的是一类课程. 根据不同的专业需要，这类课程开设的内容和深度均有所不同. 从内容上看大体包含四门课程：第一门是微积分 (习惯上又称高等数学)，以研究连续变量为主；第二门是线性代数，以研究离散变量为主；第三门是概率统计，以研究随机变量为主；第四门则是数学实验或数学建模，以数学的应用研究为主.

高等数学是大学数学课群里的首选基础课程，从教学内容和深度看，理工类专业要求较高，然后是经济管理类专业和其他文科类专业，教学时数也由多到少不全相同.

本书主要面向对数学要求较高的非数学专业本科学生，同时也兼顾其他专业的需要，试图为这样一个比较宽泛的大学低年级学生群体开设的高等数学课程提供一套立论严谨，取材适中，说理透彻，叙述流畅且与教学现代化的改革与发展趋势合拍的基础读本.

二

高等数学是一门重要基础课程，对理工科专业的学生来说尤为重要. 它包括微积分、空间解析几何、常微分方程等近代数学分支的基础内容. 本书的上册讲授一元微积分和空间解析几何；下册讲授多元微积分、无穷级数和常微分方程. 一般可在 200 课时授完. 如果精简部分内容，也可在较少的 180 课时讲完.

非数学专业的本科学生为什么要学习数学课程？这个问题对于理工科专业的学生来说似乎不言自明，但实际上仍然存在很多模糊认识. 1998 年冬，我国数学教育界经过几年的深入研究与准备，召开了一次以“数学在大学中的地位”为主题的大型研讨会. 国内数学教育界大多数专家学者关于数学教育在大学教育中的应有作用形成了重要的共识，一致认为：成功的数学教育既要为学生所学专业提供必要的数学工具，又不能把这种“工具性”理解得过窄；要对学生进行必要的理性思维训练，改善他们的思维品质；要发挥数学教学中美育的作用，将大学数学教育纳入素质教育的轨道.

十年来，这三条共识对我国高校数学教学和改革产生了积极的影响，对那些刚刚走进大学校门准备学习大学数学的学生来说，也有现实的指导意义.

我们知道, 现代数学是自然科学的基本语言, 是运用模式探索物质世界运动机理的主要手段. 对现代工业和现代工程而言, 数学更是表达技术原理、进行科学计算的必不可少的工具. 由于计算机的快速发展, 现代社会的经济运行与组织管理更无法离开现代数学所提供的方法、模式与手段. 所以, 一种成功的数学教育也好, 一个合格的大学生也好, 首先应该教好、学好作为工具的数学, 作为改造客观世界的数学.

提起数学的教与学, 就不应该忘记爱因斯坦 (Einstein) 说过的一句话: "被放在首要位置的永远应该是独立思考和判断的总体能力的培养, 而不是获取特定的知识." 这就是不能把数学课程的"工具性"理解得过窄的含义. 大学四年, 转瞬即逝, 可是数学的知识却浩如烟海, 我们应该在那些最基本的原理、最基本的方法、最基本的能力上下工夫, 将它们内化为个体的素质和优秀的思维品质. 还是爱因斯坦说得好: "如果人们已经忘记了他们在学校里所学的一切, 那么所留下的就是教育." 微积分能给我们留下什么? 我认为微积分能多方位地塑造科学精神, 建立科学思维的方法. 从这个意义上讲, 我们还要教好、学好作为改造主观世界的数学.

三

内蒙古大学在大学数学教学改革和教材建设上有较好的积累. 1995 年, 作者在内蒙古大学出版社出版了为综合大学物理类专业使用的《高等数学基础教程》. 1999 年, 曹之江教授与作者合作在高等教育出版社出版面向 21 世纪课程教材《微积分简明教程》. 2001 ~2003 年, 作者主持世行贷款 21 世纪初高等教育教学改革项目"大学数学分层次教学的研究与实践". 2005 年, 内蒙古大学的大学数学课程被评为内蒙古自治区精品课程. 本书的编撰思想就是在这些工作积累之下形成的.

本书在引进重要数学概念和数学原理时, 注意尽可能本原地挖掘并阐述那些理性思维训练的要素, 为那些抽象的数学概念固本浚源. 对那些形式化或是数学技巧的内容, 我们秉持淡化的原则, 在讲清问题背景和逻辑演绎的前提下, 不做过多训练.

本书遵循分层次教学的理念, 在上、下两册都设置了一定篇幅的附录, 供有兴趣又有能力的学生阅读. 其中有为微积分创立与发展过程中做出过贡献的数学家简介, 有当前中学数学与大学数学脱节的内容补充, 有希望学生了解而又无法讲授或是并不普遍要求的教学内容. 这种多窗口式的展示是一种尝试, 目的在于满足学生的多元需求.

本书在借助图形几何直观上做了努力, 以增加空间的想象力, 降低课程的难度, 激发学生学习的积极性. 在行文叙述上尽量简明准确, 平实流畅, 兼具良好的可读性与启发性.

四

本书被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材, 源于 2005 年科学出版社的盛情邀请以及孙炯教授的热情鼓励, 没有这些邀请与鼓励, 本书的一些构想可能仍被束之高阁.

本书写作期间得到内蒙古大学教务处朱瑞英副处长和数学科学学院院长杨联贵教授的大力支持以及很多同事的帮助. 协助我编配习题、复习题的是一批优秀的年轻博士和硕士——黄俊杰、高彩霞、刘水霞、范惠荣、刘金存、张静等, 他 (她) 们在繁忙的教学科研工作之余, 认真而有效地工作, 才保证了本书的编撰进度. 书中一些精美插图的绘制得到王镁副教授的帮助, 为本书增加了不少的亮点.

孙炯教授、朱瑞英副教授和于素芬副教授仔细审读了书稿, 提出很有价值的建设性意见和建议, 对此作者表示衷心的感谢! 本书在试用过程中还得到作者所在教学团队的所有同事和承担助教工作的在读硕士生们的积极协助, 作者也深表感谢!

在本书即将出版之际, 还应该感谢曹之江教授多年来在国内和内蒙古大学推进数学教学改革所作出的积极努力, 正是他的关心与指导, 内蒙古大学大学数学作为精品课程的建设才有今天的局面.

由于作者水平所限, 加之时间仓促, 书中存在一些错误在所难免, 望数学教育界的朋友们和读者不吝指正.

刘元骏

2008 年 5 月

目　录

(上　册)

第 1 章　函数、极限与连续

§1.1 实 数 集

1.1.1　集合及其性质

集合的概念我们并不生疏，一般来讲，**集合**是指一些能够被确认的某种对象的全体. 所谓能够被确认是指根据某种规定，可以认定该对象是否属于这个集合. 任给一个对象要么属于这个集合，要么不属于这个集合，二者仅居其一. 这些能够被确认的对象称之为集合的**元素**.

若 A 是一个集合，x 是集合 A 的一个元素，则称 x**属于**A，记作 $x \in A$. 如果 x 不是集合 A 的元素，称 x**不属于**A，记作 $x \overline{\in} A$ 或 $x \notin A$.

表示集合的方法可以用列举集合元素的**枚举法**. 例如，

$$A = \{2, 4, 6, 8\}, \quad \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\},$$

$$\mathbf{Z}^{+} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\},$$

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

A 是仅包含四个元素 2,4,6,8 的数集合，$\mathbf{N}$ 是自然数集合，$\mathbf{Z}^{+}$ 是正整数集合，$\mathbf{Z}$ 是整数集合. 也可以用描述集合元素所具备特征的 **条件法** 表示集合，如果集合 M 由所有具备特征 p 的元素构成，则可记作 $M = \{x|x具有p\}$. 例如，

$$\mathbf{R} = \{x|x是实数\}, \quad \mathbf{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{Q} = \{x|x是有理数\} = \left\{x|x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbf{Z}, q > 0\right\}.$$

$\mathbf{R}$ 表示实数集合，$\mathbf{R}^2$ 表示 xy 平面上所有点 (x, y) 的集合，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集合.

不含任何元素的集合称之为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，

$$E = \{x|ax^2 + bx + c = 0, b^2 - 4ac < 0, x \in \mathbf{R}\} = \varnothing,$$

$$F = \{x|x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \varnothing.$$

注意，$\{\varnothing\}$ 并不是空集，因为它是一个由单元素 $\varnothing$ 组成的集合.

仅当集合 A, B 具有完全相同的元素时，称它们**相等**，记作 $A = B$.

如果集合 B 的元素都是集合 A 的元素, 称 B 是 A 的**子集**, 记作 $B \subseteq A$. 当 $B \subseteq A$ 且 $A \neq B$ 时, 称 B 是 A 的**真子集**, 记作 $B \subset A$. 显然,

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \quad A \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq A.$$

上述结论说明, A 是自身最大的子集, $\varnothing$ 是 A 的最小子集.

为叙述上的简洁明了, 本书采用以下**逻辑符号**:

"$\exists$" 表示 "存在".

"$\forall$" 表示 "对任意一个".

"$P \Longrightarrow Q$" 表示 "若 P, 则 Q".

"$P \Longleftrightarrow Q$" 表示 "P 的充要条件是 Q".

按照这些符号, 关于集合间关系的上述规定可以表述为

$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x \in A$, 有 $x \in B$.

$A \subseteq B$ 不真 $\Longleftrightarrow \exists x \in A$, 但 $x \notin B$.

利用上述逻辑符号重新表述 $\varnothing \subseteq A$ 的证明时, 叙述会变得非常简洁.

若 $\varnothing \subseteq A$ 不真, 则 $\exists c \in \varnothing, c \notin A$, 这与 $\varnothing$ 空集矛盾.

例 1.1.1　写出含有 3 个元素的集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集.

解　$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

由此可知含有 3 个元素的集合 $\{a, b, c\}$ 共有 8 个子集, 那么含有 n 个元素的集合该有多少个子集?

集合之间可以建立以下四种基本运算 (图 1.1).

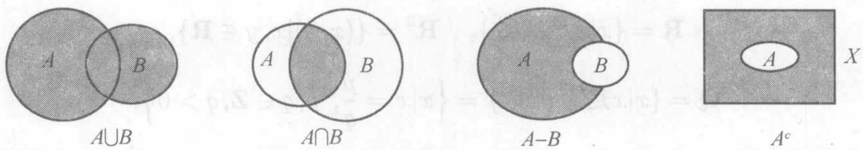

图 1.1　集合的四种运算图示

集合 A 与 B 的**并集** $A \bigcup B$ 是指所有属于 A 或 B 的元素组成的集合, 即 $A \bigcup B = \{x | x \in A$ 或 $x \in B\}$.

集合 A 与 B 的**交集** $A \bigcap B$ 是指所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 即 $A \bigcap B = \{x | x \in A$ 且 $x \in B\}$.

集合 A 与 B 的**差集** $A - B$(也记作 $A \backslash B$) 是指所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合, 即 $A - B = \{x | x \in A$ 且 $x \notin B\}$.

当我们在集合 X 中研究它的子集 A 时, 称 X 为**全集**或**基本集合**, 而集合 A 在 X 中的**余集**或**补集**A^c 是指所有属于 X 但不属于 A 的元素组成的集合, 即 $A^c = X - A$.

以下简单结论可由定义直接证明:

$$\varnothing\bigcup A = A,\quad \varnothing\bigcap A = \varnothing,\quad A\bigcap B \subseteq A \subseteq A\bigcup B,$$
$$A - B \subseteq A,\quad A\bigcup A^c = X,\quad A\bigcap A^c = \varnothing.$$

集合运算满足以下算律:

(1) **交换律** $A\bigcup B = B\bigcup A,\ \ A\bigcap B = B\bigcap A.$

(2) **结合律** $A\bigcup(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcup C,\ A\bigcap(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcap C.$

(3) **分配律** $A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C),$

$A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C),$

$A\bigcap(B - C) = (A\bigcap B) - (A\bigcap C).$

(4) **对偶律** $(A\bigcup B)^c = A^c\bigcap B^c,\quad (A\bigcap B)^c = A^c\bigcup B^c.$

上述四种算律的九个公式均可从图 1.1 中得到直观的解释, 也可以从定义出发直接证明. 作为例子, 以下给出分配律中的第一个公式的严格证明, 其余证明请自行完成.

为此先证 $A\bigcap(B\bigcup C) \subseteq (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

$\forall x \in A\bigcap(B\bigcup C) \Longrightarrow x \in A$ 且 $x \in B\bigcup C \Longrightarrow x \in A$ 且"$x \in B$ 或 $x \in C$"
$\Longrightarrow$"$x \in A$ 且 $x \in B$"或"$x \in A$ 且 $x \in C$"
$\Longrightarrow x \in A\bigcap B$ 或 $x \in A\bigcap C \Longrightarrow x \in (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

再来证 $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C) \subseteq A\bigcap(B\bigcup C)$.

$\forall x \in (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C) \Longrightarrow x \in (A\bigcap B)$ 或 $x \in (A\bigcap C)$
$\Longrightarrow$"$x \in A$ 且 $x \in B$"或"$x \in A$ 且 $x \in C$"$\Longrightarrow x \in A$ 且"$x \in B$ 或 $x \in C$"
$\Longrightarrow x \in A$ 且 $x \in B\bigcup C \Longrightarrow x \in A\bigcap(B\bigcup C)$.

1.1.2 实数集与确界存在原理

本段将研究实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非常重要的性质——确界存在原理.

1. 区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$. 我们规定**开区间** (a, b)、**闭区间** $[a, b]$、**闭开区间** $[a, b)$ 及**开闭区间** $(a, b]$ 分别代表以下实数集:

$$(a, b) = \{x|a < x < b\},\quad [a, b] = \{x|a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$[a, b) = \{x|a \leqslant x < b\},\quad (a, b] = \{x|a < x \leqslant b\}.$$

而 x 轴上坐标为 a, b 的点称为这些区间的**端点**.

全体实数构成的集合 $\mathbf{R}$ 也可以写成区间的形式 $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$, 其中符号 "$\infty$" 读作**无穷大**, 而 "$+\infty$" 与 "$-\infty$" 读作**正无穷与负无穷**. 以正无穷或负无穷为端点的区间还有以下四种:

$$(a, +\infty) = \{x|x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x|x \geqslant a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x|x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x|x \leqslant b\}.$$

设 $a, \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 以 a 为中点, 长度为 2δ 的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 称为点 a 的 δ **邻域**, 记作

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x||x - a| < \delta\}.$$

同时称开区间 $(a - \delta, a)$ 为点 a 的δ **左邻域**, 称开区间 $(a, a + \delta)$ 为点 a 的δ **右邻域**. 在邻域 $U(a, \delta)$ 中除去点 a 的集合称为点 a 的 δ **去心邻域**, 记作

$$U^0(a, \delta) = U(a, \delta) - \{a\} = (a - \delta, a) \bigcup (a, a + \delta) = \{x|0 < |x - a| < \delta\}.$$

为了叙述的方便, 有时把有限点 a 的邻域的概念推广到 $\infty, +\infty$ 和 $-\infty$ 的邻域的概念. 设 $M \geqslant 0$, 称

实数集 $\{x||x| > M\}$ **为** ∞ **的** M **邻域**, 记作 $U(\infty, M)$.
实数集 $\{x|x > M\}$ **为** $+\infty$ **的** M **邻域**, 记作 $U(+\infty, M)$.
实数集 $\{x|x < -M\}$ **为** $-\infty$ **的** M **邻域**, 记作 $U(-\infty, M)$.

2. 实数集的界

设 $A \subseteq \mathbf{R}$, 若 $\exists M \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in A$, 都有 $x \leqslant M$, 则称 M 为实数集 A 的一个**上界**, 又称集 A**上有界**. 若 $\exists m \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in A$, 都有 $x \geqslant m$, 则称 m 为实数集 A 的一个**下界**, 又称 A**下有界**.

当 M 是实数集 A 的一个上界时, 任何大于 M 的实数都是 A 的上界. 当 m 是实数集 A 的一个下界时, 任何小于 m 的实数都是 A 的下界. 既有上界又有下界的实数集称为**有界集**.

有界集还有以下**等价定义**: 若 $\exists K > 0$, 使得 $\forall x \in A$, 都有 $|x| \leqslant K$, 则称 A 为**有界集**, 并将 K 称为集合 A 的**界**.

实际上, 若 K 是集合 A 的界, 则对 $\forall x \in A$, 都有 $|x| \leqslant K$, 即 $-K \leqslant x \leqslant K$, 由此知 K 和 $-K$ 分别是集合 A 的上界和下界. 反过来, 若 M 和 m 分别是集合 A 的上界和下界, 只要取 $K = \max\{|M|, |m|\}$, 便可证明 K 是集合 A 的界.

这里的符号 $\max\{|M|, |m|\}$ 表示两个数 $|M|$ 和 $|m|$ 当中的最大数. 同样, $\max A$ 表示集合 A 中的最大数, 类似地, 符号 $\min A$ 表示集合 A 中的最小数.

应该指出, 实数集 A 的上界与 A 的最大数 $\max A$, 实数集 A 的下界与 A 的最小数 $\min A$ 是两种不同的概念.

集 A 的最大数 $\max A$ 满足两个条件: 一是 $\max A \in A$; 二是对 $\forall x \in A$, 都有 $x \leqslant \max A$. 集 A 的最小数 $\min A$ 也满足两个条件: 一是 $\min A \in A$; 二是对 $\forall x \in A$, 有都 $x \geqslant \min A$.

如果 A 存在最大数 $\max A$ 与最小数 $\min A$, 则对 $\forall x \in A$, 有 $\min A \leqslant x \leqslant \max A$. 由此可见, 最大数 $\max A$ 与最小数 $\min A$ 分别是 A 的上界和下界, 进而得知 A 是有界集. 例如, 由于 $\max[0,1]=1, \min[0,1]=0$, 区间 $[0,1]$ 当然是有界集了!

但是反过来, 如果 A 是有界集, 则 A 并不一定存在最大数 $\max A$ 与最小数 $\min A$. 例如, 区间 $A=[0,1)$ 是有界集, 虽然存在 $0=\min[0,1)$, 但是最大数 $\max[0,1)$ 并不存在. 其证明见下例.

例 1.1.2 证明区间 $[0,1)$ 不存在最大数 $\max[0,1)$.

解 用反证法. 假定 $[0,1)$ 存在最大数 $\max[0,1)=\beta$, 则 $\beta \in [0,1)$, 且对 $\forall x \in [0,1)$, 有 $x \leqslant \beta$. 记 $\alpha=(1+\beta)/2$, 则 $0<\beta<\alpha<1$, 于是 $\alpha \in [0,1)$, 且 $\beta<\alpha$. 这与 β 是 $[0,1)$ 的最大数矛盾.

3. 实数集的确界

实数集 A 的最小上界称为 A 的**上确界**, 记作 $\sup A$. A 的最大下界称为 A 的**下确界**, 记作 $\inf A$. 统称为**确界**.

上确界 $\sup A$ 作为 A 的"最小上界"应理解为: (i) $\sup A$ 是 A 的上界; (ii) 小于 $\sup A$ 的实数不再是 A 的上界.

应该注意, $\max A$ 与 $\sup A$ 是两个不同概念. 当 $\max A$ 存在时, 则 $\sup A = \max A$. 但是, 在上例中, $\max[0,1)$ 虽不存在, 但上确界 $\sup[0,1)=1$ 却仍然存在 (证明见例 1.1.3).

例 1.1.3 证明 $\sup[0,1)=1$.

解 对 $\forall x \in [0,1)$, 当然有 $x<1$, 这说明 1 是 $[0,1)$ 的上界. 对 $\forall r \in (0,1)$, 记 $r'=(1+r)/2$, 则 $0<r<r'<1$, 这说明任何小于 1 的正实数 r 都不是 $[0,1)$ 的上界. 可见 1 是 $[0,1)$ 的最小上界, 即 $\sup[0,1)=1$(图 1.2).

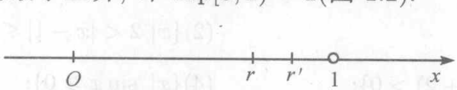

图 1.2 证明 $\sup[0,1)=1$ 的图示

例 1.1.4 已知数集合 $S=\left\{0,1-\dfrac{1}{2},1-\dfrac{1}{3},\cdots,1-\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$, 则 $\min S = 0, \sup S=1, \inf S=0$, 但是, $\max S$ 不存在, 试证明之.

解 仅证明 $\sup S=1$, 其余自行证明.

由于 $S=\{x_n|x_n=1-\dfrac{1}{n},n\in \mathbf{Z}^+\}$, 知 $\forall x_n\in S, x_n<1$, 即 1 是 S 的上界.

任给 $r<1$, 总存在 $n_0\in \mathbf{Z}^+$, 使得 $1-\dfrac{1}{n_0}>r$$\Big($只要选择 $n_0>\dfrac{1}{1-r}$ 即可$\Big)$. 这说明 r 不再是 S 的上界. 问题得证.

4. *确界存在原理*

对于实数集来说, 只要满足一些不太强的条件, 就可保证确界的存在. 以下给出

确界存在原理　非空有上界的实数集合一定有上确界.

本结论的证明涉及实数的基本理论, 在此不加证明, 故谓之**原理**. 它反映了实数的**连续性与完备性**. 由此出发便可顺利推导后续的重要结论, 建立完整的微积分理论基础.

利用上述结论, 可以证明类似结论:

定理 1.1.1　非空有下界的实数集合一定有下确界.

证明　设 S 为非空有下界 m 的实数集, 则非空实数集合 $S^-=\{x|-x\in S\}$ 一定有上界 $-m$. 这是因为若 $\forall x\in S^-$, 则 $-x\in S, -x\geqslant m, x\leqslant -m$. 由于非空有上界的实数集合 S^- 一定有上确界 μ, 则 $-\mu$ 一定是 S 的下确界 (此处推理自行补充完整).

习　题　1.1

1. 证明对偶律:

$$(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c,\quad (A\bigcap B)^c=A^c\bigcup B^c,$$

其中 A,B 为任意两个集合.

2. 设 $A=(-\infty,-5)\bigcup(5,+\infty), B=[-10,3)$, 试写出 $A\bigcup B, A\bigcap B, A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式.

3. 将下列实数集表示成区间或区间的并集:

(1) $[0,1]^c$;　　(2) $\{x|\ 2<|x-1|\leqslant 3\}$;

(3) $\{x|\ x(x-1)(x+2)>0\}$;　　(4) $\{x|\ \sin x\geqslant 0\}$;

(5) $\{x|\ 10^{-2x}<5\}$;　　(6) $\left\{x\left|\ \dfrac{2x}{x^2+1}<1\right.\right\}$.

4. 已知下列集合 A, 试求 $\max A$ 和 $\min A$ 或指出它们不存在:

(1) $A=(-\infty,0]\bigcup(2,4]$;　　(2) $A=\varnothing$;

(3) $A=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1}{2n},\cdots\right\}$;　　(4) $A=\left\{\cos x\left|\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right.\right\}$.

5. 讨论下列集合是否有上界或下界, 如有上确界或下确界, 一并写出.

(1) 自然数集;

(2) $A=\{y|\ y=x^2-2x+3,\ x\in\mathbf{R}\}$;

(3) $A=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$;

(4) $A=\{x|\ x=-n[1+(-1)^n],\ n\in\mathbf{N}\}$.

§1.2 数列的极限

极限的思想产生于十分久远的年代, 但是极限概念的精确描述到近代才最终形成. 极限是微积分理论严密化过程中一种重要的概念和论理方法, 有了它才有了这座科学大厦的稳固基础, 掌握了它才能了解到微积分的精髓, 从真正意义上掌握微积分.

1.2.1 数列极限的概念

与正整数集 $\mathbf{Z}^+=\{1,2,3,\cdots\}$ 建立对应关系的一列实数

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$$

称之为**数列**, x_n 称为**通项**. 利用通项可以将数列简单表示成 $\{x_n\}$. 例如, 数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots \tag{1.2.1}$$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots \tag{1.2.2}$$

$$1-\frac{1}{2},1-\frac{1}{3},1-\frac{1}{4},\cdots,1-\frac{1}{n+1},\cdots \tag{1.2.3}$$

可分别表示成为 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\},\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\},\left\{1-\dfrac{1}{n+1}\right\}$.

随着项数 n 的增加, 数列 (1.2.1) 和 (1.2.2)的一般项可以和实数 0 任意程度地接近. 直观上看: 当 n"无限增大"时, $\dfrac{1}{n}$ 与 $\dfrac{1}{2^n}$ 均"无限接近"0.

随着项数 n 的增加, 数列 (1.2.3) 的一般项可以和 1 任意程度地接近. 直观上看: 当 n"无限增大"时, $1-\dfrac{1}{n+1}$"无限接近"1.

设 x_n 是一给定的数列, A 是一给定实数, x_n 与 A 的"接近"程度, 可以用 $|x_n-A|$ 来描述;"无限接近"可以描述成:"对 $\forall\varepsilon>0$, 都有 $|x_n-A|<\varepsilon$."

项数 n 的"无限增大"是针对 x_n 与 A 的"无限接近"而言的. 可以理解为: 要让 x_n 与 A"接近"到比 ε 还要小的程度, 只要 n 足够大, 大到"一定的程度"即可, 而这个"一定的程度"可以用 N 来表述: $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 便有 $|x_n-A|<\varepsilon$.