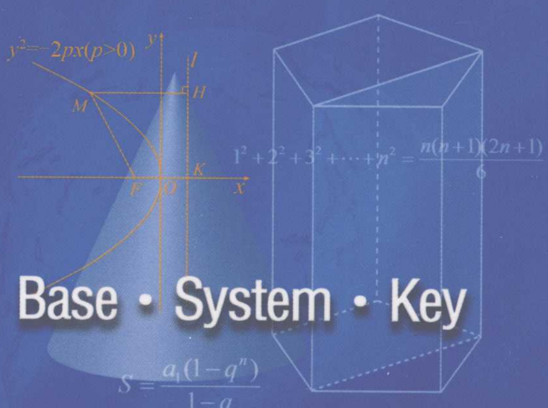
超级高中专题系列

盛世教育

超级数学专题题典

导数与极限

• 紧扣最新大纲　密切关注高考 •



Base · System · Key

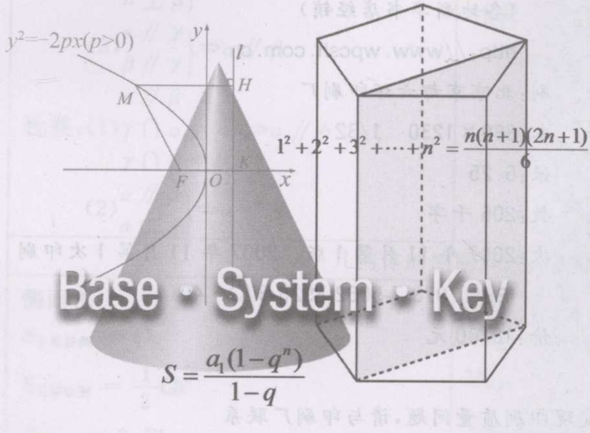
—— 学习数学必备的全面工具书 ——

世界图书出版公司

盛世教育 超级高中专题系列

超级数学专题题典

导数与极限



世界图书出版公司

上海 · 西安 · 北京 · 广州

图书在版编目(CIP)数据

超级数学专题题典——导数与极限/盛世教育高考命题研究组 编著.
—上海:上海世界图书出版公司,2007.11

ISBN 978-7-5062-8928-3

Ⅰ.超... Ⅱ.盛... Ⅲ.数学课－高中－习题－升学参考资料
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 152525 号

超级数学专题题典——导数与极限

盛世教育高考命题研究组

出版发行:上海世界图书出版公司
上海市尚文路 185 号 B 楼　　邮政编码 200010
公司电话:021－63783016 转发行科
(各地新华书店经销)
http://www.wpcsh.com.cn

印　　刷:北京京都六环印刷厂
开　　本:880×1230　1/32
印　　张:6.25
字　　数:206 千字
版　　次:2007 年 11 月第 1 版　2007 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5062-8928-3/O·40
定　　价:10.00 元

如发现印刷质量问题,请与印刷厂联系
(质检科电话:010－84498871)

前　言

参考书和教材不同，它并不是学习中的必需品。然而学习好的同学，大部分都看过至少一本参考书，有个别的，甚至看完了市面上所有的参考书，这是为什么呢？

教材都是自成体系，为了配合大纲和课堂教学，其中很多内容讲述得恰到好处，可以说是提供了一个角度很好的剖面。然而要学好一门学科，必须具备三点：首先是清晰的知识框架，其次是翔实的知识内容，再次是巧妙的方法技巧。要达到这三点，从理论上讲，反复阅读教材并练习教材中的习题是可以做到的，只是需要花费较长的时间去领悟。不过，实际情况往往是限于课时进度，同学们用于学习单一科目的时间本就有限，花费在科目内部的具体知识板块的时间更加寥寥，有没有什么捷径可以走呢？答案是没有。虽然没有捷径，但却有另外一条路可供选择，这就是选择合适的参考书。好的参考书能从各种角度去剖析问题，透过现象看本质；或是补充个别知识点，完善整个知识框架；或是通过纵横向比较，揭示出本来就存在，但教科书却未明示的一些规律；或是汇总前人的经验，揭示出你原本就该知道的一些方法技巧。这套《超级数学专题题典》正是本着这样的初衷编写的，一共包括函数、数列、不等式等 12 本。

本套书在编排上体现了以下特点：

(1)知识讲解循序渐进

知识点讲解特色突出，全套书中的每一本都分为基础知识和拓展思维两大部分。前一部分针对具体的知识点进行精析细讲，帮助读者牢固扎实地打好知识基础、建立知识体系，使学习、记忆和运用有序化。第二部分“高屋建瓴”，帮助读者在掌握和巩固基础知识的同时，突破难点、提高思维。在力求提高的同时，把握尺度，不出偏题、怪题，使之虽然难度加大，但是并不偏离高考方向。

(2)题目搭配合理有序

习题配备由易到难，层层延伸。基础练习题，能力练习题，历届高考题，精选星级题，3 大部分 6 小块，覆盖高中低档各类题型，层层递进，级级延伸，为复习、备考提供丰富的资料储备；题目讲解不拘一解，详尽规范，引导读者去探究“一题多解”、“多题一解”、“一题多变”和“万变归一”的思路与学习方法，使读者真正能够领悟到举一反三、触类旁通的奥妙。

(3)框架结构明朗清晰

全书按照内容分布各种知识框架图，为读者学习和探索提供参考路标。

(4)成书符合使用习惯

全书采用“知识点讲解”——“对应例题”——“另一个知识点讲解”——“对应例题”的编排模式，更符合授课式的思维习惯。我们还独出心裁地引入了“考频”概念，借助于此知识点在最终高考中所占比例的统计数据来检验自己对这一知识点、这一部分内容，甚至这一类问题的掌握程度，以寻找更合适的复习之道，从而达到优质、有效的复习效果。

(5)自成体系一书多用

本套书完全基于教材，但又不拘泥于教材。基于教材是指教材中的知识点，只要是涉及某专题的，基本上都收录进书，并分别成册；不等同于教材是指本套书并未严格按照教材的章节顺序进行编排，而是把本专题相关内容作为一个子体系加以归纳。这样做的好处不但可以让同学们在短时间内掌握此专题内容，而且还脱离了教材变动的局限性，使全国所有中学生均可选用。

对于正在学习高中数学课程的同学，可以使用本书作为课堂内容的预习复习与补充；对于正在紧张复习，即将投入的高考的同学，使用本书也可作为复习的纲要与熟悉各种题型的战场；而对于高中教育的研究者，本书可以提供一部分研究素材。

由于作者时间和水平所限，疏漏之处在所难免，敬请不吝指正。

盛世教育高考命题研究组

2007年9月

目　录

第一篇　知识篇 …… 1
第一章 函数的极限 …… 2
第一节 函数的极限、函数和极限的四则运算 …… 2
高考考点和趋势分析 …… 2
知识点讲解与应用 …… 3
基础练习题 …… 8
高屋建瓴 …… 9
能力练习题 …… 10
第二节 函数的连续性 …… 11
高考考点和趋势分析 …… 11
知识点讲解与应用 …… 11
基础练习题 …… 13
高屋建瓴 …… 14
能力练习题 …… 16
本章参考答案与解析 …… 17
第二章 导数 …… 20
第一节 导函数的概念和常见函数的导数 …… 21
高考考点和趋势分析 …… 21
知识点讲解与应用 …… 21
基础练习题 …… 24
高屋建瓴 …… 25
能力练习题 …… 27
第二节 函数求导法则及复合函数的导数 …… 28
高考考点和趋势分析 …… 28
知识点讲解与应用 …… 28
基础练习题 …… 30
高屋建瓴 …… 30
能力练习题 …… 33
本章参考答案与解析 …… 34
第三章 微积分简介 …… 38
第一节 微分及四则运算 …… 39
高考考点和趋势分析 …… 39
知识点讲解与应用 …… 40

基础练习题 …… 41
高屋建瓴 …… 42
能力练习题 …… 43
第二节 不定积分 …… 43
高考考点和趋势分析 …… 43
知识点讲解与应用 …… 43
基础练习题 …… 45
高屋建瓴 …… 46
能力练习题 …… 48
第三节 定积分 …… 49
高考考点和趋势分析 …… 49
知识点讲解与应用 …… 49
基础练习题 …… 50
高屋建瓴 …… 51
能力练习题 …… 55
本章参考答案与解析 …… 56
第四章 导数与微分的应用 …… 62
第一节 导数与微分的应用 …… 63
高考考点和趋势分析 …… 63
知识点讲解与应用 …… 63
基础练习题 …… 67
高屋建瓴 …… 68
能力练习题 …… 69
第二节 积分的应用 …… 70
高考考点和趋势分析 …… 70
知识点讲解与应用 …… 70
基础练习题 …… 76
能力练习题 …… 76
本章参考答案与解析 …… 78
第二篇 真题篇 …… 84
考点分析 …… 84
考试内容 …… 84
考试要求 …… 84
命题趋向与应试策略 …… 85
真题探究 …… 85
选择题 …… 85
填空题 …… 87
解答证明题 …… 87

真题篇答案解析 …… 93
第三篇　题典篇 …… 123
选择题 …… 123
填空题 …… 127
解答证明题 …… 128
题典篇答案解析 …… 138
附录一　公式定理大全 …… 180
附录二　高中数学公式一览表 …… 186

第一篇 知识篇

本专题知识结构图

<table>
<tr><td rowspan="9">极限、导数和微积分</td><td rowspan="2">函数的极限</td><td>函数的极限和函数极限的四则运算</td></tr>
<tr><td>函数的连续性</td></tr>
<tr><td rowspan="2">导数</td><td>导函数的概念和常见函数的导数</td></tr>
<tr><td>函数求导法则及复合函数的导数</td></tr>
<tr><td rowspan="3">微积分</td><td>微分及四则运算</td></tr>
<tr><td>不定积分</td></tr>
<tr><td>定积分</td></tr>
<tr><td rowspan="2">导数和微积分的应用</td><td>导数与微分的应用</td></tr>
<tr><td>积分的应用</td></tr>
</table>

如果说算术所写的是“静态的数学”，代数所写的是“动态的数学”，微积分所描述的就是“准静态”的“动态数学”.

微积分中最基本的思想，就是一种准静态的动态变化. 而这种动都是局部的“微扰”，微积分所关心的正是这种微扰在极限条件下，所得的效果.

本书先向读者介绍极限的最基本概念，进而展开到微积分知识，最后则是微积分和各数学分支领域乃至生产实践中的应用. 在这个学习过程中，同学们可以慢慢地从中领悟出，从静止中认识运动，从有限中认识无限，从近似中认识精确，从量变中认识质变的思想.

第一章　函数的极限

本章知识结构图

函数的极限	函数的极限和函数极限的四则运算	当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限
		当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限
		函数的左右极限
		常数函数的极限
		四则运算法则
		函数极限与数列极限的比较
		洛必达法则
	函数的连续性	导函数在某一点处连续的定义
		函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续
		函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续
		连续函数的四则运算的连续性
		复合函数的连续性
		反函数的连续性
		幂函数的连续性
		反三角函数的连续性
		基本初等函数的定义
		初等函数的定义

第一节　函数的极限、函数和极限的四则运算

高考考点和趋势分析

近几年的高考对导数和极限部分的考查主要集中在极限的概念和极限的运算法则上，以选择题为主.一般情况下为选择题或者填空题2～3道，预计今后高考试题中类似题目还会有，且难度不会太大.

目标 1:从函数的变化理解函数极限的概念;

目标 2:掌握函数极限的四则运算法则,会求某些函数的极限.

知识点讲解与应用

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限(考频 1 次,其中,选择题 1 次,填空题 0 次,解答或证明题 0 次)

设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有意义,A 是一个常数,若对任给 $\varepsilon>0$,不论它多么小,都存在正数 X,使得 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称当 x 趋向无穷时,$f(x)$ 的极限是 A,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to\infty$ 时).

其几何解释为:不等式 $|x|>X$ 即 $x<-X$ 或 $x>X$,表示点位于$[-X,X]$之外,而不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,等价于 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$,表示函数值 $f(x)$ 在 $A-\varepsilon$ 和 $A+\varepsilon$ 之间.如图 1-1-1 在直角坐标系 Oxy 中画出直线 $y=A-\varepsilon$、$y=A+\varepsilon$ 和 $y=A$ 便知:对于任给 $\varepsilon>0$,在 x 轴上总存在一个充分大的区间$[-X,X]$,使得当点 x 位于区间$[-X,X]$之外时,相应的点$(x,f(x))$全部落于图中的带形区域内.

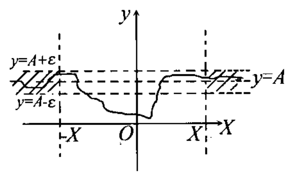


图 1-1-1

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限(考频 2 次,其中,选择题 2 次,填空题 0 次,解答或证明题 0 次)

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有意义(在 x_0 处可能无意义),A 是一个常数,若对任意实数 $\varepsilon>0$,不论多小,都存在正数 δ,使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称当 x 趋向 x_0 时,$f(x)$ 的极限是 A,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$(当 $x\to x_0$ 时).

其几何解释为:不等式 $0<|x-x_0|<\delta$,即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$,$x\neq x_0$,表示点 x 位于$[x_0-\delta,x_0+\delta]$内,且 x 与 x_0 不重合.而不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,等价于 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$,表示函数值 $f(x)$ 在 $A-\varepsilon$ 和 $A+\varepsilon$ 之间.如图 1-1-2 在直角坐标系 Oxy 中画直线 $y=A-\varepsilon$、$y=A+\varepsilon$ 和 $y=A$ 便知:对于任给 $\varepsilon>0$,在 x 轴上总存在 δ,使得当点 x 位于区间$[x_0-\delta,x_0+\delta]$之内且 $x\neq x_0$ 时,相应的点$(x,f(x))$全部落于图中的带形区域内.

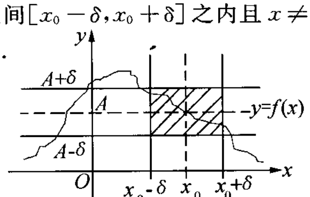


图 1-1-2

3. **函数的左右极限(考频 1 次,其中,选择题 1 次,填空题 0 次,解答或证明题 0 次)**

一般的,如果 x 从点 x_0 的左侧($x < x_0$)无限趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋于常数 A,就说 A 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限,记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.

一般的,如果 x 从点 x_0 的右侧($x > x_0$)无限趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋于常数 A,就说 A 是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限,记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

当 $\lim\limits_{x \to x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} = \lim\limits_{x \to x_0^+} A$ 称函数的极限存在,且等于 A.

4. **常数函数的极限(考频 4 次,其中,选择题 3 次,填空题 0 次,解答或证明题 1 次)**

对于常数函数 $f(x) = c$(c 为常数),有 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

5. **四则运算法则(考频 3 次,其中,选择题 1 次,填空题 1 次,解答或证明题 1 次)**

若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ 都存在,则:

极限 $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)]$ 存在,且 $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

极限 $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)]$ 存在,且 $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

特例:$\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,其中 k 是常数;

当 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ 时,极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在,且 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

6. **函数极限与数列极限的比较(考频 1 次,其中,选择题 1 次,填空题 0 次,解答或证明题 0 次)**

函数极限的定义来自于数列的极限,但是函数极限与数列极限之间仍有着一定的区别.

我们考察一个数列 $\{a_n\}$($n = 0,1,2,\cdots$),如果它在 $n \to \infty$ 处有极限,不妨将它记作 A. 那么函数 $f(x) = \begin{cases} a_0 & (0 \leqslant x \leqslant 1), \\ a_1 & (1 \leqslant x \leqslant 2), \\ a_2 & (2 \leqslant x \leqslant 3), \\ \cdots & \\ a_n & (n \leqslant x \leqslant n+1), \\ \cdots & \end{cases}$ 在 $x \to +\infty$ 时,就存在极限,并且极限就是 A.

若对于 $x \to x_0$(或 $x \to +\infty$)时,一个函数的极限为 A. 这时如果数列 $\{x_n\}$($n = 0,1,2,\cdots$)满足条件 $x_n \to x_0$(或 $x_n \to +\infty$),则数列 $\{f(x_n)\}$($n = 0,1,2,\cdots$)的极限必为 A.

例 1 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^a}$,其中 a 是常数,且 $a \geqslant 1$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}$.

解答 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$；

(2) $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^a=+\infty$，$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^a}=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}}=+\infty$；

(4) 当 $x\to-\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$；

当 $x\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

故当 $x\to\infty$ 时，$\arctan x$ 极限不存在.

点评 考查 $x\to\infty$ 的极限定义.

例 2 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$.

解答 (1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{2^2-1}{2^2+1}=\frac{3}{5}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}\cdot\frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}}$$

$$=\lim_{x\to 1}-\frac{x-1}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})}$$

$$=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{(x+1)(2+\sqrt{x+3})}$$

$$=-\frac{1}{(1+1)(2+\sqrt{1+3})}$$

$$=-\frac{1}{8}；$$

(3) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x+2)}{(x-2)}=+\infty;$$

(4) 令 $x=y^{12}$,则当 $x\to 1$ 时,$y\to 1$,

则$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1-y^4}{1-y^3}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{(1+y)(1+y^2)}{1+y+y^2}=\dfrac{4}{3}$.

点评 考查 $x\to a(a\in\mathbf{R})$ 时的极限.

例 3 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-b\ (x\geqslant 1),\\ 3ax+2b\quad (x\leqslant 1)\end{cases}$ 在 $x=1$ 处有极限,求 a、b 的关系.

分析 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极限表明从 1 左右趋近的极限都相等,代入,解方程,求得 a、b.

解答 当 $x\geqslant 1$ 时,$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1+a-b$;

当 $x\leqslant 1$ 时,$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=3a+2b$.

故 $f(x)$ 在 x 处有极限,$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$,

即 $1+a-b=3a+2b$,整理有:$2a+3b-1=0$.

点评 本题考查极限的定义,尤其是特定点左右极限的定义,以及方程的思想.

例 4 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2}$.

分析 对减法的极限求法,虽然二者都存在极限,但是相减之后未必存在,所以一般都将其有理化,再来求加法的极限.

解答 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2};$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\cdot\frac{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}[(1+x)^{\frac{2}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}]$$

$= \frac{15}{2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2}\cdot\frac{(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+3x)^{\frac{1}{3}}(1-2x)^{\frac{1}{3}}+(1-2x)^{\frac{2}{3}}}{(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+3x)^{\frac{1}{3}}(1-2x)^{\frac{1}{3}}+(1-2x)^{\frac{2}{3}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{x+x^2}\cdot\frac{1}{(1+3x)^{\frac{2}{3}}+(1+3x)^{\frac{1}{3}}(1-2x)^{\frac{1}{3}}+(1-2x)^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{5}{3}$.

点评 对根式的减法一般采取有理化的形式将其变成加法和除法.

例 5 若 $n\in\mathbf{N}$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}=-1$,求 a、b 应满足的条件.

分析 商的极限当分子分母的极限都存在的时候就等于极限的商,但是此题是不是分子分母都有极限呢?需要分类讨论.

解答 ① 若 $2a+b\neq 0$,且 $a-2b-1\neq 0$,我们考察 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}$,

此时若 $1000a+b>2005$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}=0$;

若 $1000a+b<2005$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}=\infty$.

但根据已知条件:$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}=-1$,这是不可能的.

即,若 $2a+b\neq 0$,且 $a-2b-1\neq 0$,则 $1000a+b=2005$

此时 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{2005}+1}=\frac{2a+b}{a-2b-1}=-1$.

联立方程组 $\begin{cases}\frac{2a+b}{a-2b-1}=-1,\\ 1000a+b=2005,\end{cases}$

我们可以解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=5.\end{cases}$

② 若 $a-2b-1=0$,

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}[(2a+b)x^{2005}-1]=-1$.

此时,$\lim\limits_{x\to\infty}(2a+b)x^{2005}=0$,当且仅当 $2a+b=0$ 时成立,

联立方程组 $\begin{cases}2a+b=0,\\ a-2b-1=0,\end{cases}$

我们可以解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{5},\\ b=-\frac{2}{5}.\end{cases}$

③若 $2a+b=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2a+b)x^{2005}-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{(a-2b-1)x^{1000a+b}+1}=-1$，

此时，$\lim\limits_{x\to\infty}(a-2b-1)x^{1000a+b}=0$，当且仅当 $a-2b-1=0$ 或 $1000a+b<0$ 成立

联立方程组 $\begin{cases}2a+b=0,\\a-2b-1=0,\end{cases}$

我们可以发现和上组情况完全相同，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{5},\\b=-\dfrac{2}{5}.\end{cases}$

联立不等式组 $\begin{cases}2a+b=0,\\1000a+b<0,\end{cases}$

我们可以解得 $b=-2a(a<0)$，

综上所述 a、b 应满足的条件为：$\begin{cases}a=2,\\b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{5},\\b=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$ 或 $b=-2a(a<0)$.

点评 分类讨论的思想.

基础练习题

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，则下面说法正确的是________.

A. $f(x_0)=A$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

C. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有定义　　D. 以上说法都不正确

2. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+3}{3x^3+1}=2$，则 $a=$ ________.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & (x<0),\\0 & (x=0),\\10^x & (x>0),\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的极限是________.

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. 不存在

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(2x)}=\dfrac{3}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}$ 的值为________.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{4+x}-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x\leqslant 1),\\ 2x^3+a & (x>1),\end{cases}$ 若 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，求常数 a 的值.

7. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}=3$，求常数 a,b.

8. 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$.

(参考答案见 P17)

高屋建瓴

洛必达法则(考频 2 次，其中，选择题 1 次，填空题 0 次，解答或证明题 1 次)

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的一个空心邻域 $S_0(a,\delta)$ 内有定义，且满足条件 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，在 $S_0(a,\delta)$ 内，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 存在，且 $g'(x)\neq 0$，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k\left(\text{或}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty\right)\text{，则}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k(\text{或}\infty)\text{；}$$

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 a 的一个空心邻域 $S_0(a,\delta)$ 内有定义，且满足条件 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，在 $S_0(a,\delta)$ 内，$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 存在，且 $g'(x)\neq 0$，

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k\left(\text{或}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty\right)\text{，则}\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k(\text{或}\infty).$$

上述性质称为洛必达法则.

例6　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2+e^{-x}}{1-\cos x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+4x+2}{2x^2+x-1}$.

解答　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{2x}=\infty$；