



名师导学系列

考研数学

思维定势 与常考题型

● 主编 叶盛标 叶长春



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013/470
:2008
2008



名师导学系列

考研数学

思维定势 与常考题型

主编 叶盛标 叶长春
副主编 叶长春 叶盛标

ISBN 7-04-021111-1
定价 28.00元

• 主编 叶盛标 叶长春



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学思维定势与常考题型/叶盛标,叶长春主编.

—北京:高等教育出版社,2008.5

ISBN 978-7-04-024492-2

I. 考… II. ①叶…②叶… III. 高等数学-研究生-人
学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 033417 号

策划编辑 刘佳 责任编辑 张耀明 封面设计 王凌波
责任绘图 宗小梅 责任校对 张颖 责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社

社址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

总机 010-58581000

经销 蓝色畅想图书发行有限公司

印刷 北京鑫海金澳胶印有限公司

开本 787×1092 1/16

印张 21.25

字数 550 000

购书热线 010-58581118

免费咨询 800-810-0598

网址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

网上订购 <http://www.landaco.com>

<http://www.landaco.com.cn>

畅想教育 <http://www.widedu.com>

版次 2008年5月第1版

印次 2008年5月第1次印刷

定价 32.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 24492-00

前 言

长期深入研究历年全国硕士研究生入学统一考试真题(国题),和长期从事考研数学辅导工作之后,笔者认为,考生在备考过程中必须坚持“以考纲为纲,以课本为本,以思维定势拿高分,以常考题型论输赢”的指导思想。

以考纲为纲。考纲是专家命题、考生备考的唯一法律依据。

以课本为本。考纲源于教学大纲,但又不同于教学大纲,因此,首先要用考纲圈定课本上的复习内容,考纲上没有而课本上有的内容,一定要划掉;考纲上有而课本上没有的内容,一定要补充。在考纲的指导下,认真研读课本,才能全面地系统地掌握所要考的内容。

以思维定势拿高分。思维定势就是人们的一种思维倾向,它是人们在长期的思维过程中所形成的一种思维条件反射,亦称思维惯性。我们平时脱口而出的“七七四十九,九九八十一”就是思维定势。要对付考试,必须掌握对于常考题型的思维定势!

以常考题型论输赢。常考题型是基本概念、基本理论、基本方法的具体化,是考点的具体化,是考纲的具体化,是对历年国题的归纳整理,是对历年国题的深刻认识。国题集中体现了全国命题小组各位专家的智慧,剔除了题海中的偏题、怪题、难题,是题海中的精品,所以我们必须研究国题,通过研究国题,真正掌握常考题型。本书的例题和习题主要就是按全国硕士研究生入学统一考试大纲精选的国题,衷心希望对考生的复习起到抛砖引玉的作用!

“以考纲为纲,以课本为本,以思维定势拿高分,以常考题型论输赢”就是本书的指导思想。

本书的最大特色是用歌诀这种独特的为学生所喜闻乐见的形式表达考研数学的思维定势与常考题型。实践表明,对考研数学的复习具有刻骨铭心的效果。

叶盛标

2008年2月8日

于武昌巡司河畔

目 录

高等数学篇

第一章 极限与连续	1	常考题型 21 ^[3,4] 现值、复利， 对应求解	37
内容提要	1	常考题型 22 ^[3,4] 弹性定义， 弹性分析	37
思维定势	3	常考题型 23 ^[3,4] 边际定义， 边际分析	38
常考题型	4	经典习题	39
常考题型 1 洛必达前，要用三处	4	第四章 不定积分	42
常考题型 2 单调有界，要看两头	6	内容提要	42
常考题型 3 夹逼定理，谁来夹逼	7	思维定势	42
常考题型 4 导数、积分，可求极限	8	常考题型	42
常考题型 5 特例特法，瞬间搞定	9	常考题型 24 不定积分，换元、分部	42
常考题型 6 无穷小量，年年比较	10	经典习题	46
常考题型 7 连续、间断，左右极限	11	第五章 定积分	48
常考题型 8 渐近线里，三种类型	12	内容提要	48
经典习题	13	思维定势	49
第二章 导数与微分	15	常考题型	49
内容提要	15	常考题型 25 上限函数，导数搞定	49
思维定势	16	常考题型 26 求定积分，牛-莱公式	53
常考题型	16	常考题型 27 分段函数，分段积分	54
常考题型 9 导数定义，永恒考题	16	常考题型 28 对称区间，偶倍奇零	55
常考题型 10 函数求导，年年都考	19	常考题型 29 从定积分，反求函数	55
常考题型 11 n 阶导数，形式优美	21	常考题型 30 广义积分，小心谨慎	56
常考题型 12 切线、法线，导数搞定	22	常考题型 31 积分区间，积分关键	57
经典习题	23	经典习题	58
第三章 中值定理与导数的应用	25	第六章 定积分的应用	61
内容提要	25	内容提要	61
思维定势	27	思维定势	62
常考题型	27	常考题型	63
常考题型 13 函数性态，导数搞定	27	常考题型 32 积分应用，微元素法	63
常考题型 14 证明不等，导数搞定	28	常考题型 33 函数平均，积分搞定	68
常考题型 15 中值定理，边值搞定	30	经典习题	68
常考题型 16 两个中值，两次搞定	32	第七章^[1] 空间解析几何与向量代数	70
常考题型 17 涉及高阶，泰勒搞定	33	内容提要	70
常考题型 18 最值、介值，狼狈为奸	34		
常考题型 19 实根个数，看头看脚	35		
* 常考题型 20 ^[1,2] 曲率半径， 曲率倒数	36		

* 常考题型 20^[1,2]，即这个题型是数学一、数学二的考生要掌握的，下同。

思维定势	71	常考题型 54 ^[1] 内含奇点, 阉割奇点	108
常考题型	71	常考题型 55 ^[1] 路径无关, 格林条件	109
常考题型 34 ^[1] 直线、平面, 点积、叉积	71	常考题型 56 ^[1] 若未封闭, 加盖减盖	111
经典习题	72	常考题型 57 ^[1] 应用问题, 微元素法	112
第八章 多元函数微分法及其应用	73	经典习题	113
内容提要	73	第十一章^[1,3] 无穷级数	114
思维定势	76	内容提要	114
常考题型	76	思维定势	117
常考题型 35 偏导计算, 年年都有	76	常考题型	117
常考题型 36 连、偏、微中, 关系定理	79	常考题型 58 ^[1,3] 级数敛散, 定、性、正、交	117
常考题型 37 ^[1,2] 隐函存在, 三偏搞定	80	常考题型 59 ^[1,3] 幂级数里, 收敛区间	121
常考题型 38 ^[1] 方向导数, 点积搞定	81	常考题型 60 ^[1,3] 幂级求和, 微分、积分	121
常考题型 39 ^[1] 散度三偏, 旋度六偏	82	常考题型 61 ^[1,3] 幂级展开, 从 q 开始	123
常考题型 40 ^[1] 切线三导, 法线三偏	82	常考题型 62 ^[1] 傅氏系数, 积分搞定	124
常考题型 41 二元极值, 一驻二判	84	常考题型 63 ^[1] 收敛定理, 三条结论	125
常考题型 42 二元最值, 一驻二边	85	经典习题	126
常考题型 43 条件极值, 拉氏函数	86	第十二章 微分方程	128
经典习题	87	内容提要	128
第九章 重积分	89	思维定势	128
内容提要	89	常考题型	129
思维定势	89	常考题型 64 可分离变量的微分 方程	129
常考题型	90	常考题型 65 齐次方程	130
常考题型 44 积分换序, 五字方针	90	常考题型 66 一阶线性, 三大定势	130
常考题型 45 二重积分, 五字方针	92	常考题型 67 ^[1] 伯努利方程	133
常考题型 46 ^[3,4] 二重积分, 无界区域	95	常考题型 68 ^[1] 全微分方程	133
常考题型 47 二重积分, 反求函数	95	常考题型 69 ^[1] 欧拉方程	134
常考题型 48 ^[1] 三重积分, 三大方法	96	常考题型 70 ^[1,2] 可降阶的高阶微分 方程	134
常考题型 49 ^[1] 应用问题, 微元素法	97	常考题型 71 ^[1,2,3] 二阶线性, 三大定势	136
经典习题	100	常考题型 72 应用问题, 导数搞定	138
第十章^[1] 曲线积分与曲面积分	102	常考题型 73 ^[3] 差分方程, 三大定势	140
内容提要	102	经典习题	141
思维定势	103	线性代数篇	
常考题型	104	常考题型	145
常考题型 50 ^[1] 曲线积分, 化定积分	104	常考题型 74 求行列式, 升、降、 转、化	145
常考题型 51 ^[1] 曲面积分, 二重积分	105		
常考题型 52 ^[1] 两曲积分, 三大公式	106		
常考题型 53 ^[1] 若未封闭, 加线减线	108		
第十三章 行列式	143		
内容提要	143		
思维定势	145		

常考题型 75 抽象问题,性质搞定	147	常考题型	169
常考题型 76 D 不为零,用克莱姆	149	常考题型 87 线性方程,三大定势	169
经典习题	150	常考题型 88 线性方程,同解共解	175
第十四章 矩阵	152	常考题型 89 线性表示,线性方程	177
内容提要	152	经典习题	179
思维定势	154	第十七章 矩阵的特征值和特征向量	182
常考题型	154	内容提要	182
常考题型 77 矩阵运算,加减乘除	154	思维定势	182
常考题型 78 矩阵方程,逆阵搞定	157	常考题型	182
常考题型 79 初等变换,“左行右列”	157	常考题型 90 两“特”定义,计算	
常考题型 80 矩阵研究,从秩入手	157	两“特”	182
经典习题	159	常考题型 91 矩阵相似,定义搞定	184
第十五章 向量	161	常考题型 92 方阵角化,计算两“特”	185
内容提要	161	常考题型 93 先行角化,快乐求幂	188
思维定势	163	常考题型 94 实对称阵,两“特”	
常考题型	163	两“化”	189
常考题型 81 “相关”、“无关”,定义		- 经典习题	192
入手	163	第十八章 二次型	194
常考题型 82 “相关”、“无关”,从秩		内容提要	194
入手	164	思维定势	195
常考题型 83 极大无关,量内变换	166	常考题型	195
常考题型 84 要正交化,用“施密特”	167	常考题型 95 二次型秩,矩阵之秩	195
常考题型 85 正交矩阵,性质搞定	167	常考题型 96 正交变换,两“特”	
常考题型 86 ^[1] 前基、后基,		两“化”	195
过渡矩阵	167	常考题型 97 正定判定,标、特、	
经典习题	168	主、定	197
第十六章 线性方程组	169	常考题型 98 合同变换,合同矩阵	199
内容提要	169	经典习题	201
思维定势	169		

概 率 论 篇

第十九章^[1,3,4] 随机事件与概率	203	第二十章^[1,3,4] 一维随机变量及其分布	209
内容提要	203	内容提要	209
思维定势	204	思维定势	210
常考题型	205	常考题型	210
常考题型 99 ^[1,3,4] 事件表达,		常考题型 103 ^[1,3,4] 分布函数,	
第一重要	205	定义搞定	210
常考题型 100 ^[1,3,4] 概率计算,		常考题型 104 ^[1,3,4] 常用分布,正、指、	
加减乘除	205	二、均	214
常考题型 101 ^[1,3,4] 全概逆概,		经典习题	216
两个阶段	205	第二十一章^[1,3,4] 多维随机变量及其	
常考题型 102 ^[1,3,4] 事件独立,		分布	218
定义判别	206		
经典习题	207		

内容提要	218	常考题型 109 ^[1,3,4]	数字特征, 分布搞定	233
思维定势	220	常考题型 110 ^[1,3,4]	数字特征, 性质搞定	236
常考题型	220	经典习题		237
常考题型 105 ^[1,3,4]	二维离散, 同一表格	第二十三章^[1,3,4] 大数定律与中心极限定理		
常考题型 106 ^[1,3,4]	二维连续, 五字方针	内容提要	239	
常考题型 107 ^[1,3,4]	二维混合, 全概搞定	思维定势	239	
常考题型 108 ^[1,3,4]	随机变量, 独立、相关	常考题型	240	
经典习题	228	常考题型 111 ^[1,3,4]	大数定律:切、伯、 辛钦	240
经典习题	229	常考题型 112 ^[1,3,4]	“列-林、棣-拉”, 两个“中心”	240
第二十二章^[1,3,4] 随机变量的数字特征	231	常考题型 113 ^[1,3,4]	切氏不等,期望、 方差	241
内容提要	231	经典习题	241	
思维定势	233	数理统计篇		
常考题型	233	第二十四章^[1,3] 数理统计的基本概念	243	
数理统计篇				
内容提要	243	内容提要	243	
思维定势	245	思维定势	245	
常考题型	246	常考题型	246	
常考题型 114 ^[1,3]	数理统计, 三八分布	常考题型 117 ^[1,3]	密度连乘	250
经典习题	247	常考题型 118 ^[1,3]	区间估计, 三八分布	252
第二十五章^[1,3] 参数估计	248	经典习题	255	
内容提要	248	第二十六章^[1,3] 假设检验	257	
思维定势	249	内容提要	257	
常考题型	249	思维定势	258	
常考题型 115 ^[1,3]	样矩、总矩, 两矩相等	常考题型	258	
常考题型 116 ^[1,3]	似然函数, 密度连乘	常考题型 119 ^[1,3]	假设检验, 三八分布	258
经典习题	255	经典习题	259	
经典习题	247	经典习题参考答案		
经典习题	247	260		
经典习题	247	附录 最低限度的高等数学公式(73个)		
经典习题	247	326		

高等数学篇

三大函数,三大运算.

导数是研究函数性质的有力工具.

三大函数 { 初等函数——公式搞定
分段函数——分段搞定
上限函数——导数搞定

三大运算 { 求极限
求导
求积分

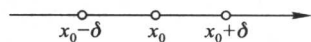
第一章 极限与连续

内容提要

1. 极限的定义(科学的 ε 语言——五句话)

i) 函数极限的定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$



$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A. \text{ (左极限)}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A. \text{ (右极限)}$

ii) 数列极限的定义(科学的 ε 语言——五句话)

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - A| < \varepsilon, \text{ 则有 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$

2. 函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

3. 函数、极限、无穷小关系定理

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x),$$

其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, 即 $\alpha(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

4. 无穷小的运算

i) 有限个无穷小的和仍为无穷小.

ii) 有限个无穷小的积仍为无穷小.

iii) 有界函数与无穷小之积仍为无穷小.

5. 无穷小的比较

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0,$

i) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小. 记作 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

ii) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶的无穷小.

iii) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价的无穷小, 记作 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

iv) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0, k > 0$, 则称当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

6. $x \rightarrow 0$ 时, 常用的等价无穷小

$x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,$

$e^x - 1 \sim x, \ln(1+x) \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^k - 1 \sim kx.$

7. 等价无穷小的代换定理

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta'(x) = 0$, 且当 $x \rightarrow x_0$ 时,
 $\alpha(x) \sim \alpha'(x), \beta(x) \sim \beta'(x),$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$.

8. 极限的四则运算

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = AB.$

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$

9. 极限存在的两个准则

i) 夹逼定理;

ii) 单调有界数列有极限.

10. 两个重要极限

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$ ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

11. 洛必达法则

设 $f(x), g(x)$ 满足下列条件

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (或为 ∞),

ii) $f(x), g(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$,

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大),

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为无穷大).

12. 连续与间断

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续. 破坏“设”、“如果”、“且”三条件之一者谓之间断. 点 x_0 为间断点, 若左极限 $f(x_0 - 0)$ 及右极限 $f(x_0 + 0)$ 都存在, 那么称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点, 否则为第二类间断点.

在第一类间断点中, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 或 $y = f(x)$ 在 x_0 处无定义, 这时可人为地改变定义

或补充定义,使 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续,此时的 x_0 为可去间断点.

若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的每一点都连续,则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续,又若 $y=f(x)$ 在 a 点右连续,在 b 点内左连续,则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

可以证明,初等函数在其定义区间都是连续的.

13. 最值定理

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 $y=f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m .

14. 保号定理

i) 保函数号定理 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 而且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域, 当 x 在该邻域内时, 就有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

ii) 保极限号定理 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 而且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

15. 介值定理

在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值.

16. 零点定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$.

17. 求极限的方法

求 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 以 x_0 强行代入 $f(x)$ 之中, 若能代, 谓之连续, 即有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; 若不能代, 先定型, 后定法.

18. 求渐近线

i) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 则有水平渐近线 $y = c$.

ii) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则有垂直渐近线 $x = x_0$.

iii) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$,

则有斜渐近线 $y = kx + b$.

思维定势

思维定势 1

(遭遇题障的思维定势)

遭遇题障,

要用三处*.

三处*: 遭遇题障, 要用初等数学、高等数学或特例法处理一下, 简称初处、高处或特处.

思维定势 2

(求极限的思维定势)

强行代入,

定型定法;

以洛为主,

单、夹、积、导.

洛: 洛必达法则.

单: 单调有界数列有极限.

夹: 夹逼定理.

积: 定积分的定义.

导: 导数的定义.

思维定势 3

(求由递推公式表达的数列的极限的思维定势)

数列极限看两头,

看了两头不用愁;

单调有界有极限,

先求后证两步走!

单调有界,
要看两头

(x_1, x_∞)

若 $x_{n+1} = f(x_n)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

这时要先看 x_1 , 有时还要看 x_1, x_2, x_3 , 再求出

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 于是数列 $\{x_n\}$ 单调、有界的性质一目了然.

思维定势 4

(特例法的思维定势)

随时拿来随时用，
一般寓于特殊中，
A, B, C, D 任我选，
管他春夏与秋冬！

特例特法，
瞬间搞定

遭遇抽象函数 $f(x)$ ，可依题设条件，选取 $f(x)$
 $= 1, x, -x, |x|, x^2, -x^2, x^3, x^4$ ，结果马上得出，对客
观试题，一用就灵！

思维定势 5

(求渐近线的思维定势)

要求渐近线，
就是求极限：
水平、垂直和斜的，
思考要全面！

渐近线里，
三种类型

常考题型

常考题型 1 洛必达前，要用三处

【例 1】 (全国 2008 教一，教二)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(\frac{x + \sin x}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right) \cdot \sin x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x - \sin x}{2}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

【例 2】 (全国 2008 教三，教四)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$

【解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

强行代入，
定型定法：
以洛为主，
单、夹、积、导

洛必达前，
要用三处

$$\text{初处: } \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\text{高处: } x \rightarrow 0, \sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right) \sim \frac{x - \sin x}{2}$$

洛必达前，
要用三处

高处: $x \rightarrow 0$,

$$\ln\left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1\right) \sim \frac{\sin x}{x} - 1$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

洛必达前，
要用三处

【例3】(全国2004数二)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right].$$

幂指函数，
对数恒等

【解】强行代入 $x=0$ ，未定式为 $\frac{0}{0}$ 型，当 $x \rightarrow 0$ 时，

$$\begin{aligned} \left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 &= e^{x \ln \frac{2 + \cos x}{3}} - 1 \sim x \ln \frac{2 + \cos x}{3} \\ &= x \ln \left[1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right] \sim x \cdot \frac{\cos x - 1}{3} \sim x \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} \right) \\ &= -\frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

初处：

$$\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x = e^{x \ln \frac{2 + \cos x}{3}}$$

高处：三个等价无穷小。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

【例4】(全国2005数二)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0) \neq 0$ ，求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$.

洛必达前，
要用三处

$$\begin{aligned} \text{【解】} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(u) du} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \\ & \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x)}{\int_0^x f(u) du + x f(x)} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \end{aligned}$$

高处：利用定积分的性质和换元积分法，把分子、分母都变为积分上限的函数。

$$\begin{aligned} \text{其中 } \int_0^x f(x-t) dt & \stackrel{\text{令}}{=} \int_x^0 f(u) du \\ &= \int_0^x f(u) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(u) du + x f(x)} \\ & \stackrel{\text{积分}}{\text{中值定理}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(\xi)}{x f(\xi) + x f(x)} \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{f(\xi) + f(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

【例5】(全国2007数三，数四)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

洛必达前，
要用三处

【解】 $|\sin x + \cos x| < 2$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

初处：

$$|\sin x + \cos x| < 2.$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{2^x \ln 2 + 3x^2} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \\ & \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 2}{2^x (\ln 2)^2 + 6x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \\ & \stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{2^x (\ln 2)^3 + 6} \\ & = 0. \end{aligned}$$

∴ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3}$ 为无穷小量, 而 $(\sin x + \cos x)$ 有界, 于是答案为 0.

【例 6】 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

【解】

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}, \end{aligned}$$

初处:

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

而 $\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0,$

∴ 原式 = 0.

【另解】 取 $f(t) = \sin t,$

$$b = \sqrt{x+1}, \quad a = \sqrt{x},$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \\ & \stackrel{\text{拉格朗日}}{\stackrel{\text{中值定理}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\xi) (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \xi) \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \quad (\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x+1}), \end{aligned}$$

高处:

$$f(b) - f(a) \stackrel{\text{拉格朗日}}{\stackrel{\text{中值定理}}{=}} f'(\xi) (b - a),$$

其中 $a < \xi < b$.

而 $|\cos \xi| \leq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0,$

∴ 原式 = 0.

拉氏形状,
不“拉”不行

常考题型 2 单调有界, 要看两头

【例 7】 (全国 1996 数一)

设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n} \quad (n=1, 2, \dots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

【分析】 由 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6+x_n} = l, l = \sqrt{6+l}, l^2 = 6+l, l^2 - l - 6 = 0,$

解得 $l_1 = 3, l_2 = -2$ (舍去).

$\{x_n\}$ 应为单调下降有界数列.

【解】 先证 $\{x_n\}$ 单调下降有下界.

$$x_1 = 10, x_2 = \sqrt{6+10} = 4 < x_1.$$

假设 $x_{k-1} > x_k$, 则

$$x_k = \sqrt{6+x_{k-1}} > \sqrt{6+x_k} > x_{k+1},$$

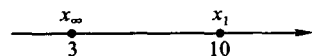
由数学归纳法知, 对一切正整数 n , 都有 $x_n > x_{n+1}$.

$$\text{又 } x_1 = 10 > 3,$$

$$x_2 = \sqrt{6+10} = 4 > 3,$$

假设 $x_k > 3$, 则 $x_{k+1} = \sqrt{6+x_k} > \sqrt{6+3} = 3.$

数列极限看两头,
看了两头不用愁:
单调有界有极限,
先求后证两步走!



例 7 图

由数学归纳法知 $x_n > 3, (n=1, 2, \dots)$. 即 $\{x_n\}$ 为单调下降有下界的数列, 所以有极限, 设极限为 l .

由 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6+x_n}, l = \sqrt{6+l}, l^2 - l - 6 = 0, l_1 = 3, l_2 = -2$ (舍去), $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$.

【例 8】(全国 2006 数一, 数二)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n=1, 2, \dots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限.

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】由 $x_{n+1} = \sin x_n$, 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = \sin(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$

$\therefore L = \sin L, L = 0. x_\infty = 0$.

可见 $\{x_n\} \downarrow$, 以 0 为下界.

【解】(I) 因 $0 < x_1 < \pi$, 则 $0 < x_2 = \sin x_1 \leq 1 < \pi$, 于是 $0 < x_{n+1} = \sin x_n \leq 1 < \pi (n=1, 2, \dots)$ 所以 $\{x_n\}$ 有界. 单调有界, 要看两头

又 $x_{n+1} = \sin x_n < x_n$, 即 $x_{n+1} < x_n$, 所以 $\{x_n\} \downarrow$, 以 0 为下界.

$\therefore \{x_n\}$ 单调下降且有界, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且由上面的分析求出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

洛必达前, 要用三处

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x_n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \quad (1^\circ)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}}{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1 \right)}{x^2}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}}$$

$$\xrightarrow{\text{洛必达}} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

初处:

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}},$$

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1 \right).$$

高处: $x \rightarrow 0$,

$$\ln \left(1 + \frac{\sin x}{x} - 1 \right) \sim \frac{\sin x}{x} - 1.$$

常考题型 3 夹逼定理, 谁来夹逼

【例 9】(全国 1995 数二)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解】 $\because \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n+n} \leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n+n} \leq \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n+1}$,

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2}.$$

\therefore 原式 $= \frac{1}{2}$.

【例 10】(同济大学等八院校 1985, 全国 2000 数二)

设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$,

(1) 当 n 为正整数, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 证明 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$;

强行代入, 定型定法; 以洛为主, 单、夹、积、导

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$.

【解】 由于被积函数 $|\cos t|$ 是周期为 π 的连续函数, 所以可将 $[0, +\infty)$ 分为小区间:

$$0 < \pi < 2\pi < 3\pi < \cdots < n\pi < (n+1)\pi < \cdots,$$

对任意正数 x , 一定存在非负整数 n , 使得 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$.

(1) 因为 $|\cos x| \geq 0$, 且 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx \leq S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的周期函数, 在每个周期上积分值相等, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx = 2(n+1).$$

因此当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有 $2n \leq S(x) < 2(n+1)$.

(2) 由(1)知, 当 $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ 时, 有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

【说明】 在 1985 年同济大学等八院校考这道题时, 没出现第(1)题, 因而难度要大一点, 因为(1)的结果对(2)是提示、启发. 也就是说, 这道题目的国题更容易为学生所接受, 所理解.

倘若无第(1)题,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x |\cos t| dt}{x}, \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x |\cos t| dt \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |\cos x| \text{ 不存在,}$$

洛必达法则失效, 我们知道, 求极限的方法为: 强行代入, 定型定法: 以洛为主, 单、夹、积、导. 现在还有 4 个方法: 单调有界数列有极限, 夹逼定理, 定积分的定义, 导数的定义, 显然只能用夹逼定理.

常考题型 4 导数、积分, 可求极限

【例 11】 (全国 1998 数一, 北京大学 1999)

求
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

【解】
$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+0},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \right) = 1 \cdot \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}.$$

夹逼定理,
谁来夹逼

第(1)题提示
第(2)题用夹逼定理

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

其中 $\lambda = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$.

注意:

ξ_i : 决定被积函数 $f(x)$: $f(\xi_i)$ 变为 $f(x)$;

ξ_i : 决定积分区间:

$\xi_1 \rightarrow a, \xi_n \rightarrow b$;

ξ_i : 决定微分 dx :

$\xi_{i+1} - \xi_i$ 变为 dx .

根据夹逼定理, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n + \frac{1}{i}} = \frac{2}{\pi}$.

【例 12】 (清华大学 2000, 北京大学 1996, 北京大学 2001, 华中师范大学 2002, 湖北工业大学, 东北师范大学, 西北电讯工程学院)

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微, $f(a) \neq 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n$.

【解】 $f(a) \neq 0$, 不妨设 $f(a) > 0$, 由于 $f'(a)$ 存在, $f(x)$ 在点 a 连续, 所以, 当 n 充分大时,

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \left[\frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{f(a)} \right]^n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln f\left(a + \frac{1}{n}\right) - \ln f(a)}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln f(a+t) - \ln f(a)}{t}} \stackrel{\text{导数定义}}{=} e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

常考题型 5 特例特法, 瞬间搞定

【例 13】 (全国 2001 数三, 数四)

设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续, 又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x-a} = -1$, 则

- (A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
 (B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.
 (C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
 (D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a, f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【解】 取 $f'(x) = -(x-a)$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x-a)^2 + C$. 故选 (B). 对于客观试题, 可以大胆地使用特例法.

【例 14】 (全国 1996 数一)

设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$, 则

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
 (B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.
 (C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
 (D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【解】 取 $f''(x) = |x|$, 于是由

	$(-\delta, 0)$	0	$(0, \delta)$
$f''(x)$	+	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	小	\nearrow

$f(x)$ 应在点 $x=0$ 处取极小值. 选 (B).

【例 15】 (全国 1996 数二, 数四)

设 $f(x)$ 处处可导, 则

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$.
 (B) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 (C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

8 道选择
定、计、排、特

试卷中有 8 道选择题, 用定义法、直接计算、排除法、特例法可以搞定!

特例特法,
瞬间搞定