KAOYAN

名师导学系列

考研数学 思维定势与常考题型

主编 叶盛标 叶长春

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

名师导学系列

考研数学
思维定势与常考题型

●主编 叶盛标 叶长春

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学思维定势与常考题型/叶盛标,叶长春主编.
—北京:高等教育出版社,2008.5
ISBN 978-7-04-024492-2

Ⅰ.考… Ⅱ.①叶…②叶… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 033417 号

策划编辑 刘 佳 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波
责任绘图 宗小梅 **责任校对** 张 颖 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092 1/16	**版　　次**	2008年5月第1版
印　　张	21.25	**印　　次**	2008年5月第1次印刷
字　　数	550 000	**定　　价**	32.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 24492-00

前　言

长期深入研究历年全国硕士研究生入学统一考试真题(国题),和长期从事考研数学辅导工作之后,笔者认为,考生在备考过程中必须坚持“以考纲为纲,以课本为本,以思维定势拿高分,以常考题型论输赢”的指导思想。

以考纲为纲。考纲是专家命题、考生备考的唯一法律依据。

以课本为本。考纲源于教学大纲,但又不同于教学大纲,因此,首先要用考纲圈定课本上的复习内容,考纲上没有而课本上有的内容,一定要划掉;考纲上有而课本上没有的内容,一定要补充。在考纲的指导下,认真研读课本,才能全面地系统地掌握所要考的内容。

以思维定势拿高分。思维定势就是人们的一种思维倾向,它是人们在长期的思维过程中所形成的一种思维条件反射,亦称思维惯性。我们平时脱口而出的“七七四十九,九九八十一”就是思维定势。要对付考试,必须掌握对于常考题型的思维定势!

以常考题型论输赢。常考题型是基本概念、基本理论、基本方法的具体化,是考点的具体化,是考纲的具体化,是对历年国题的归纳整理,是对历年国题的深刻认识。国题集中体现了全国命题小组各位专家的智慧,剔除了题海中的偏题、怪题、难题,是题海中的精品,所以我们必须研究国题,通过研究国题,真正掌握常考题型。本书的例题和习题主要就是按全国硕士研究生入学统一考试大纲精选的国题,衷心希望对考生的复习起到抛砖引玉的作用!

“以考纲为纲,以课本为本,以思维定势拿高分,以常考题型论输赢”就是本书的指导思想。

本书的最大特色是用歌诀这种独特的为学生所喜闻乐见的形式表达考研数学的思维定势与常考题型。实践表明,对考研数学的复习具有刻骨铭心的效果。

叶盛标

2008年2月8日

于武昌巡司河畔

目　录

高等数学篇

* 常考题型 20[1,2]，即这个题型是数学一、数学二的考生要掌握的，下同。

线性代数篇

概 率 论 篇

数理统计篇

高等数学篇

三大函数，三大运算.

导数是研究函数性质的有力工具.

三大函数 $\begin{cases}\text{初等函数——公式搞定}\\\text{分段函数——分段搞定}\\\text{上限函数——导数搞定}\end{cases}$

三大运算 $\begin{cases}\text{求极限}\\\text{求导}\\\text{求积分}\end{cases}$

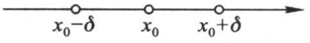
第一章　极限与连续

内容提要

1. 极限的定义（科学的 ε 语言——五句话）

i）函数极限的定义

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.



$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.（左极限）

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon\Leftrightarrow f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=A$.（右极限）

ii）数列极限的定义（科学的 ε 语言——五句话）

$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$|x_n-A|<\varepsilon$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

2. 函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0).$$

3. 函数、极限、无穷小关系定理

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，即 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

4. 无穷小的运算

i）有限个无穷小的和仍为无穷小.

ii）有限个无穷小的积仍为无穷小.

iii）有界函数与无穷小之积仍为无穷小.

5. 无穷小的比较

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$， i）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，$\beta(x)$是比$\alpha(x)$低阶的无穷小. 记作$\alpha(x)=o(\beta(x))$.

ii）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，则称当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为同阶的无穷小.

iii）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为等价的无穷小，记作$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

iv）若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c\neq 0, k>0$，则称当$x\to x_0$时，$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小.

6. $x\to 0$时，常用的等价无穷小

$x\to 0$时，$\sin x\sim x, \tan x\sim x, \arcsin x\sim x, \arctan x\sim x$,

$e^x-1\sim x, \ln(1+x)\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2, (1+x)^k-1\sim kx$.

7. 等价无穷小的代换定理

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\alpha'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta'(x)=0$，且当$x\to x_0$时，

$$\alpha(x)\sim\alpha'(x), \beta(x)\sim\beta'(x),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$.

8. 极限的四则运算

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

i）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

ii）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$.

iii）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

9. 极限存在的两个准则

i）夹逼定理；

ii）单调有界数列有极限.

10. 两个重要极限

i）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.　　ii）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

11. 洛必达法则

设$f(x), g(x)$满足下列条件

i）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$（或为$\infty$），

ii）$f(x), g(x)$在x_0的某一去心邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$，

iii）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为无穷大），

则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为无穷大）.

12. 连续与间断

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$y=f(x)$在点$x_0$连续. 破坏“设”、“如果”、“且”三条件之一者谓之间断. 点x_0为间断点，若左极限$f(x_0-0)$及右极限$f(x_0+0)$都存在，那么称x_0为$f(x)$的第一类间断点，否则为第二类间断点.

在第一类间断点中，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，或$y=f(x)$在$x_0$处无定义，这时可人为地改变定义

或补充定义，使 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，此时的 x_0 为可去间断点.

若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的每一点都连续，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，又若 $y=f(x)$ 在 a 点右连续，在 b 点内左连续，则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

可以证明，初等函数在其定义区间都是连续的.

13. 最值定理

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $y=f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上取得最大值 M 和最小值 m.

极限理论，
最、保、介、零

14. 保号定理

i) 保函数号定理　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域，当 x 在该邻域内时，就有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

ii) 保极限号定理　如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

最：最值定理.
保：保号定理.
介：介值定理.
零：零点定理.

15. 介值定理

在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 和最小值 m 之间的任何值.

16. 零点定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

17. 求极限的方法

求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，以 x_0 强行代入 $f(x)$ 之中，若能代，谓之连续，即有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$；若不能代，先定型，后定法.

18. 求渐近线

i) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，则有水平渐近线 $y=c$.

ii) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则有垂直渐近线 $x=x_0$.

iii) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq 0$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，

则有斜渐近线 $y=kx+b$.

思维定势

思维定势 1

（遭遇题障的思维定势）

遭遇题障，
要用三处*.

三处*：遭遇题障，要用初等数学、高等数学或特例法处理一下，简称初处、高处或特处.

思维定势 2

（求极限的思维定势）

强行代入，
定型定法；
以洛为主，
单、夹、积、导.

洛：洛必达法则.
单：单调有界数列有极限.
夹：夹逼定理.
积：定积分的定义.
导：导数的定义

思维定势 3

（求由递推公式表达的数列的极限的思维定势）

(x_1, x_∞)

若 $x_{n+1}=f(x_n)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

这时要先看 x_1，有时还要看 x_1, x_2, x_3，再求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 于是数列 $\{x_n\}$ 单调、有界的性质一目了然.

数列极限看两头，
看了两头不用愁；
单调有界有极限，
先求后证两步走！

单调有界，
要看两头

思维定势4

（特例法的思维定势）

随时拿来随时用，
一般寓于特殊中，
A,B,C,D 任我选，
管他春夏与秋冬！

特例特法，瞬间搞定

遭遇抽象函数$f(x)$，可依题设条件，选取$f(x)=1,x,-x,|x|,x^2,-x^2,x^3,x^4$，结果马上得出，对客观试题，一用就灵！

思维定势5

（求渐近线的思维定势）

要求渐近线，
就是求极限：
水平、垂直和斜的，
思考要全面！

渐近线里，三种类型

常考题型

常考题型1　洛必达前，要用三处

【例1】（全国2008数一，数二）

求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

强行代入，定型定法：以洛为主，单、夹、积、导

【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos\left(\frac{x+\sin x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)}{x^3}\cdot\frac{\sin x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\frac{x-\sin x}{2}}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$\xlongequal{洛必达}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

洛必达前，要用三处

初处：$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

高处：$x\to0,\sin\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)\sim\frac{x-\sin x}{2}$.

【例2】（全国2008数三，数四）

求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

洛必达前，要用三处

【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

高处：$x\to0$，
$\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)\sim\frac{\sin x}{x}-1$.

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

洛必达前，要用三处

【例 3】（全国 2004 数二）

求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

幂指函数，对数恒等

【解】强行代入 $x=0$，未定式为$\frac{0}{0}$型，当 $x\to0$ 时，

$$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}$$

$$=x\ln\left[1+\frac{\cos x-1}{3}\right]\sim x\cdot\frac{\cos x-1}{3}\sim x\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=-\frac{x^3}{6}.$$

初处：$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x=e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}$.

高处：三个等价无穷小.

$$\therefore\quad\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

【例 4】（全国 2005 数二）

设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq0$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$.

洛必达前，要用三处

高处：利用定积分的性质和换元积分法，把分子、分母都变为积分上限的函数.

其中 $\int_0^x f(x-t)\,dt\xlongequal[u=x-t]{\text{令}}-\int_x^0 f(u)\,du=\int_0^x f(u)\,du$

【解】
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt}{x\int_0^x f(u)\,du}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)\,du+xf(x)}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x f(u)\,du+xf(x)}$$

$$\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{积分}}\lim_{x\to0}\frac{xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}\quad(\xi\text{在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(\xi)}{f(\xi)+f(x)}=\frac{f(0)}{f(0)+f(0)}=\frac{1}{2}.$$

【例 5】（全国 2007 数三，数四）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

洛必达前，要用三处

【解】$|\sin x+\cos x|<2$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

初处：$|\sin x+\cos x|<2$.

$$\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x(\ln 2)^2+6x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}} \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x(\ln 2)^3+6}$$

$$=0.$$

$\therefore$ 当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}$ 为无穷小量，而 $(\sin x+\cos x)$ 有界，于是答案为 0.

【例 6】 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

【解】

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})},$$

> 初处：
> $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；
> $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

而 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$，

$\therefore$ 原式 $=0$.

【另解】 取 $f(t)=\sin t$，

$b=\sqrt{x+1}$， $a=\sqrt{x}$，

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

$$\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{拉格朗日}}\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\cos\xi)\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \quad (\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x+1}),$$

> 高处：
> $f(b)-f(a)\xlongequal[\text{中值定理}]{\text{拉格朗日}}f'(\xi)(b-a)$，
> 其中 $a<\xi<b$.

而 $|\cos\xi|\leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$，

> 拉氏形状，不"拉"不行

$\therefore$ 原式 $=0$.

常考题型 2　单调有界，要看两头

【例 7】 （全国 1996 数一）

设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$　$(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

【分析】 由 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}$，$l=\sqrt{6+l}$，$l^2=6+l$，$l^2-l-6=0$，解得 $l_1=3$，$l_2=-2$（舍去）.

$\{x_n\}$ 应为单调下降有界数列.

> 数列极限看两头，
> 看了两头不用愁：
> 单调有界有极限，
> 先求后证两步走！

【解】 先证 $\{x_n\}$ 单调下降有下界.

$x_1=10$，$x_2=\sqrt{6+10}=4<x_1$.

假设 $x_{k-1}>x_k$，则

$x_k=\sqrt{6+x_{k-1}}>\sqrt{6+x_k}>x_{k+1}$，

由数学归纳法知，对一切正整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$.

例 7 图

又　$x_1=10>3$，

$x_2=\sqrt{6+10}=4>3$，

假设　$x_k>3$，则　$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+3}=3$.

由数学归纳法知 $x_n>3,(n=1,2,\cdots)$. 即 $\{x_n\}$ 为单调下降有下界的数列，所以有极限，设极限为 l.

由　$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n},\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n},l=\sqrt{6+l},l^2-l-6=0,l_1=3,l_2=-2$(舍去)，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

【例 8】（全国 2006 数一，数二）

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限.

（Ⅱ）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

【分析】　由 $x_{n+1}=\sin x_n$，得　$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=\sin(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)$

$\therefore$　$L=\sin L,L=0.\ x_\infty=0$.

可见 $\{x_n\}\downarrow$，以 0 为下界.

【解】（Ⅰ）因 $0<x_1<\pi$，则 $0<x_2=\sin x_1\leqslant1<\pi$，于是 $0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant1<\pi(n=1,2,\cdots)$ 所以 $\{x_n\}$ 有界.

单调有界，
要看两头

又　$x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，即　$x_{n+1}<x_n$，所以 $\{x_n\}\downarrow$，以 0 为下界.

$\therefore\{x_n\}$ 单调下降且有界，$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在，且由上面的分析求出 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=0$.

洛必达前，
要用三处

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x_n\to0}\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$　(1^∞)

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$$

初处：

$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}}$，

$\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(1+\dfrac{\sin x}{x}-1\right)$.

高处：$x\to0$，

$\ln\left(1+\dfrac{\sin x}{x}-1\right)\sim\dfrac{\sin x}{x}-1$.

常考题型 3　夹逼定理，谁来夹逼

【例 9】（全国 1995 数二）

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

【解】　$\because\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$,

强行代入，
定型定法：
以洛为主，
单、夹、积、导

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{1}{2}$.

【例 10】（同济大学等八院校 1985，全国 2000 数二）

设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\,dt$，

(1) 当 n 为正整数，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，证明 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$；

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

【解】 由于被积函数 $|\cos t|$ 是周期为 π 的连续函数，所以可将 $[0,+\infty)$ 分为小区间：

$$0<\pi<2\pi<3\pi<\cdots<n\pi<(n+1)\pi<\cdots,$$

夹逼定理，谁来夹逼

对任意正数 x，一定存在非负整数 n，使得 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$.

(1) 因为 $|\cos x|\geqslant 0$，且 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$，所以

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x\leqslant S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的周期函数，在每个周期上积分值相等，所以

第(1)题提示
第(2)题用夹逼定理

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos x|\,\mathrm{d}x=2(n+1).$$

因此当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有 $2n\leqslant S(x)<2(n+1)$.

(2) 由(1)知，当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时，有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

$$\therefore\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

【说明】 在 1985 年同济大学等八院校考这道题时，没出现第(1)题，因而难度要大一点，因为(1)的结果对(2)是提示、启发. 也就是说，这道题目的国题更容易为学生所接受，所理解.

倘若无第(1)题，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t}{x},\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x|\cos t|\,\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}|\cos x|$ 不存在，

洛必达法则失效，我们知道，求极限的方法为：强行代入. 定型定法：以洛为主，单、夹、积、导. 现在还有 4 个方法：单调有界数列有极限，夹逼定理，定积分的定义，导数的定义，显然只能用夹逼定理.

常考题型 4　导数、积分，可求极限

【例 11】 (全国 1998 数一，北京大学 1999)

求 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

【解】 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0},$$

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，

其中 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$.

注意：

ξ_i 决定被积函数 $f(x)$：$f(\xi_i)$ 变为 $f(x)$；

ξ_i 决定积分区间：

$\xi_1\to a,\xi_n\to b$；

ξ_i 决定微分 $\mathrm{d}x$：

$\xi_{i+1}-\xi_i$ 变为 $\mathrm{d}x$.

$$\because\quad\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=1\cdot\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

根据夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\dfrac{2}{\pi}$.

【例 12】（清华大学 2000，北京大学 1996，北京大学 2001，华中师范大学 2002，湖北工业大学，东北师范大学，西北电讯工程学院）

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微，$f(a)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}$.

【解】 $f(a)\neq 0$，不妨设 $f(a)>0$，由于 $f'(a)$ 存在，$f(x)$ 在点 a 连续，

所以，当 n 充分大时，
$$f\left(a+\frac{1}{n}\right)>0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)}{\frac{1}{n}}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln f(a+t)-\ln f(a)}{t}}\xlongequal{\text{导数定义}}e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

常考题型 5　特例特法，瞬间搞定

【例 13】（全国 2001 数三，数四）

8 道选择
定、计、排、特

设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

试卷中有 8 道选择题，用定义法、直接计算、排除法、特例法可以搞定！

【解】 取 $f'(x)=-(x-a)$，$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2+C$. 故选(B). 对于客观试题，可以大胆地使用特例法.

【例 14】（全国 1996 数一）

设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则

特例特法，
瞬间搞定

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【解】 取 $f''(x)=|x|$，于是由

	$(-\delta,0)$	0	$(0,\delta)$
$f''(x)$	+	0	+
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	小	↗

$f(x)$ 应在点 $x=0$ 处取极小值. 选(B).

【例 15】（全国 1996 数二，数四）

设 $f(x)$ 处处可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.