普通高等教育“十一五”国家级规划教材

全国高等农林院校“十一五”规划教材

微积分学习指导

欧阳安　主编

中国农业出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

全国高等农林院校"十一五"规划教材

微积分学习指导

欧阳安　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导/欧阳安主编．—北京：中国农业出版社，2007.8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材．全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11882-9

Ⅰ．微… Ⅱ．欧… Ⅲ．微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 116559 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

责任编辑 龙永志

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720 mm×960 mm 1/16　　印张：12

字数：208 千字

定价：16.50 元

内容简介

本书是与王乃信教授主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《微积分》配套使用的学习指导书，全书共分9章，每章均由5个部分内容组成，即按照内容提要、典型例题分析（含例题、分析、解答、评注、同步练习）、同步练习参考答案、单元测验题、单元测验题参考答案5个部分来编写，书后配有5套《微积分》课程考试模拟试题及解答，旨在帮助读者按照教学进度理解掌握《微积分》课程的重点、难点，学会分析问题的思考方法，提高解题能力，强化技能训练，学好《微积分》课程，同时也为考研的读者提供切实的帮助.

本书可作为高等农林院校农林、经济各专业本、专科学生的课程辅导及应试参考书，也可作为报考硕士研究生的考生进行强化训练的辅导资料,同时可供教师教学参考.

主　　编　欧阳安
副 主 编　连　坡
参加编写人员　邓业胜　王　洁　赵　斌　庹文利
白旭英　魏　宁　位　刚

前　言

《微积分》是高等农林院校一门重要基础课，是许多专业学生学好后继课程的前提，也是高等农林院校有关专业硕士研究生入学考试的必考内容．

我们配合王迺信教授主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《微积分》的编排顺序和内容，根据农林院校的教学特点，编写了《微积分学习指导》一书，以互动式的教学方式帮助学生能够按照教学进度理解掌握《微积分》课程的基本概念、基本理论以及基本方法，学会分析问题的思考方法，提高解题能力，强化技能训练，学好《微积分》课程，同时也为考研的读者提供切实的帮助，并为教学提供参考．

本书涵盖了《微积分》教学大纲和研究生考试大纲涉及的全部内容，突出了对重点和难点内容的解析、评注，并通过每一例题后所配的同步练习，帮助读者及时消化掌握该例题所展示的解题思路和典型方法，切实提高学生的解题技能，使指导真正取得实效．

全书共分9章，每章均由5部分内容组成．

1. **内容提要**　简要介绍本章内容，列出基本概念、重要定理和公式．

2. **典型例题分析**　由例题、分析、解答、评注、同步练习5部分组成，是本书的重点和特色．其中例题分为两类：一类例题帮助读者加深对课程基本内容的理解和掌握；另一类例题训练读者综合运用基本内容的能力．这些例题均从历年本科生期末试题、研究生入学试题及各教材综合题中精选；分析和评注部分突出了对重点和难点内容的解析、评注，同时对教学大纲要求的基本方法和典型方法进行了归纳总结．通过对例题一题多解、对方法与技巧的总结与分析，对综合例题中知识点交叉模式的了解与熟悉，使读者达到对这些内容具有较强敏感性的状态，取得举一反三的效果；同步练习旨在帮助读者及时消化掌握该例题所展

示的基本或典型解题思路和方法，切实提高读者的解题技能，使指导取得实效．

3. **同步练习参考答案**　帮助读者检验读书学习和同步练习的学习效果，便于读者提高自学、自测能力．

4. **单元测验题**　督促和帮助读者通过完成单元测验题对本章内容进行梳理、总结，发现问题，纠正错误，弥补不足，巩固和提高阶段学习效果．

5. **单元测验题参考答案**　督促和帮助读者检验阶段学习效果，便于读者加深对基本概念和理论的正确理解，开阔思路，提高综合分析解决问题的能力．

本书最后配有5套《微积分》课程考试模拟试题及解答，为了便于读者在《微积分》课程结束后，全面地检验复习情况，以创造最佳应试状态，取得优异成绩．

本书可作为高等农林院校农林、经济各专业本、专科生的《微积分》课程辅导及应试参考书，也可作为报考硕士研究生的考生进行强化训练的指导书，同时还可为教师教学提供有益参考资料．

本书主编为欧阳安，副主编为连坡，参加编写的有邓业胜、王洁、赵斌、庹文利、白旭英、魏宁、位刚，全部插图由邓业胜、赵斌、魏宁绘制，本书由欧阳安负责统稿和定稿．本书在编写过程中得到了西北农林科技大学王乃信教授的热情指导和帮助，在此表示衷心地感谢，并对西北农林科技大学应用数学系的全体教师和本书所选用参考文献的作者致以诚挚的谢意！

由于编者的经验和水平所限，不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正．

编　者

2007年5月

目　　录

前言

第 1 章　函数与极限 ······ 1

1.1　内容提要 ······ 1

1.1.1　函数 ······ 1

1.1.2　函数极限 ······ 2

1.1.3　函数的连续性 ······ 4

1.1.4　无穷小的比较及等价无穷小 ······ 4

1.2　典型例题分析 ······ 5

1.3　同步练习参考答案 ······ 9

1.4　单元测验题 ······ 9

1.5　单元测验题参考答案 ······ 11

第 2 章　导函数与微分 ······ 13

2.1　内容提要 ······ 13

2.1.1　导数 ······ 13

2.1.2　微分 ······ 14

2.1.3　微分中值定理 ······ 15

2.2　典型例题分析 ······ 15

2.3　同步练习参考答案 ······ 23

2.4　单元测验题 ······ 24

2.5　单元测验题参考答案 ······ 25

第 3 章　原函数与积分 ······ 27

3.1　内容提要 ······ 27

3.1.1　原函数 ······ 27

3.1.2　不定积分 ······ 27

3.1.3　定积分 ······ 28

3.2　典型例题分析 ······ 30

3.3 同步练习参考答案 …… 41
3.4 单元测验题 …… 43
3.5 单元测验题参考答案 …… 44

第4章 导数的应用 …… 46

4.1 内容提要 …… 46
4.1.1 函数的变化率 …… 46
4.1.2 洛必达（L'Hospital）法则 …… 46
4.1.3 Taylor 公式 …… 47
4.1.4 函数性质的判定方法 …… 48
4.2 典型例题分析 …… 50
4.3 同步练习参考答案 …… 60
4.4 单元测验题 …… 64
4.5 单元测验题参考答案 …… 65

第5章 积分的应用 …… 67

5.1 内容提要 …… 67
5.1.1 平面图形的面积 …… 67
5.1.2 体积 …… 69
5.1.3 平面曲线的弧长 …… 70
5.1.4 旋转体的侧面积 …… 71
5.1.5 定积分在物理中的应用 …… 71
5.2 典型例题分析 …… 72
5.3 同步练习参考答案 …… 85
5.4 单元测验题 …… 86
5.5 单元测验题参考答案 …… 88

第6章 反常积分 …… 90

6.1 内容提要 …… 90
6.1.1 无穷区间上的反常积分 …… 90
6.1.2 无界函数的反常积分 …… 90
6.1.3 Γ 函数 …… 90
6.2 典型例题分析 …… 90
6.3 同步练习参考答案 …… 92
6.4 单元测验题 …… 93
6.5 单元测验题参考答案 …… 94

第 7 章　微分方程 …… 99
7.1　内容提要 …… 99
7.1.1　微分方程的基本概念 …… 99
7.1.2　几种常见的一阶微分方程及其解法 …… 99
7.1.3　可降阶的高阶微分方程及其解法 …… 101
7.1.4　高阶线性微分方程 …… 101
7.1.5　二阶常系数线性微分方程解的性质、结构及解法 …… 102
7.2　典型例题分析 …… 103
7.3　同步练习参考答案 …… 115
7.4　单元测验题 …… 116
7.5　单元测验题参考答案 …… 117
第 8 章　二元函数微积分 …… 119
8.1　内容提要 …… 119
8.1.1　二元函数的定义 …… 119
8.1.2　二元函数的极限 …… 119
8.1.3　二元函数的连续性 …… 119
8.1.4　偏导数 …… 119
8.1.5　全微分 …… 120
8.1.6　多元函数的极值 …… 120
8.1.7　二重积分的定义 …… 121
8.1.8　二重积分的计算 …… 121
8.1.9　二重积分的应用 …… 122
8.2　典型例题分析 …… 122
8.3　同步练习参考答案 …… 134
8.4　单元测验题 …… 135
8.5　单元测验题参考答案 …… 136
第 9 章　级数 …… 137
9.1　内容提要 …… 137
9.1.1　级数及其敛散性 …… 137
9.1.2　级数的审敛法 …… 138
9.1.3　幂级数 …… 139
9.1.4　函数的幂级数展开 …… 141
9.1.5　Fourier 级数 …… 143

9.2 典型例题分析 …… 144
9.3 同步练习参考答案 …… 158
9.4 单元测验题 …… 159
9.5 单元测验题参考答案 …… 161

模拟试题（1） …… 163
模拟试题（2） …… 164
模拟试题（3） …… 166
模拟试题（4） …… 167
模拟试题（5） …… 169
模拟试题参考答案（1） …… 171
模拟试题参考答案（2） …… 172
模拟试题参考答案（3） …… 174
模拟试题参考答案（4） …… 176
模拟试题参考答案（5） …… 178

第1章　函数与极限

1.1　内容提要

1.1.1　函数

1. 函数的定义　在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果存在一种法则，使得对于 x 取值集合 D 内的每一个值，都有惟一确定的 y 值和它对应，则变量 y 称为变量 x 的函数，记为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

x 称为自变量，y 称为函数变量，自变量 x 取值的集合 D 称为函数的定义域，如果 D 由区间构成则称为函数的定义区间，与 x 的取值对应的 y 的取值称为函数值，函数值的集合称为函数的值域，记为 $z=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$.

对应法则和定义域是函数的两个要素.

2. 基本初等函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数称为基本初等函数.

3. 分段函数　若函数对于其定义域内的自变量要用两个或两个以上的解析式表示，而不能用一个统一的解析式表达，则称该函数为分段函数.

4. 复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 z_φ，若 $D_f\cap z_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

5. 反函数　设已知函数为 $y=f(x)$，若能由此解出 $x=\varphi(y)$ 是一个函数，则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯上常用 x 作自变量，故 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

6. 初等函数　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的能用一个解析式表示的函数，统称为初等函数.

7. 函数的性质

(1) 奇偶性. 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意给定的 $x\in D$ 有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意给定的 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 周期性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $T\neq0$，使得对于任给

的 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为周期．使得等式成立的最小正数 T，称为 $f(x)$ 的最小正周期，简称为函数 $f(x)$的周期．

(3) 有界性．设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $M>0$，使得对于任给的 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 有界，或称 $f(x)$ 为有界函数；反之，则称 $f(x)$ 为无界函数．

(4) 单调性．设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于任意的 x_1，$x_2\in D$，当 $x_1<x_2$时，若 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增；若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调增．当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上严格单调减．

1.1.2　函数极限

1. 相关概念

(1) 极限．在函数 $f(x)$ 中，如果当自变量 x 不等于 x_0 而无限趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

在函数 $f(x)$ 中，如果当自变量 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为当 $x\to\infty$时 $f(x)$ 的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

(2) 无穷小．如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小．如果$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to\infty$时的无穷小．

(3) 单侧极限．如果当自变量 x 满足 $x<x_0$ 而无限趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限，或称 A 为当 $x\to x_0-0$ 时 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$，或 $f(x_0^-)=A$.

如果当自变量 x 满足 $x>x_0$ 而无限趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限，或称 A 为当 $x\to x_0+0$ 时 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

如果当自变量 x 满足 $x>0$ 而绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为当 $x\to+\infty$时 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

如果当自变量 x 满足 $x<0$ 而绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 无限趋向于常数 A，则称 A 为当 $x\to-\infty$时 $f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

左、右极限统称为单侧极限．

2. 函数极限的性质

性质 1　单调有界函数的单侧极限一定存在．

性质 2　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-A)=0$；$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-A)=0$.

性质 3　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ 的充要条件是：在 $x\to x_0$ 的过程中，对于任意的 $B>0$，从某一时刻起恒有 $f(x)<B$；且对于任意的 $C<0$，从某一时刻起恒有 $f(x)>C$.

推论 1　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：在 $x\to x_0$ 的过程中，对于任意的 $B>A$，从某一时刻起恒有 $f(x)<B$；且对于任意的 $C<A$，从某一时刻起恒有 $f(x)>C$.

推论 2　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则在 $x\to x_0$ 的过程中，从某一时刻起，$f(x)$ 有界．

推论 3　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，则在 $x\to x_0$ 的过程中，从某一时刻起恒有 $f(x)>0$；如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A<0$，则在 $x\to x_0$ 的过程中，从某一时刻起恒有 $f(x)<0$.

性质 4　设 $f(x)$，$g(x)$ 均为当 $x\to x_0$ 时的无穷小，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 也均为当 $x\to x_0$ 时的无穷小．

性质 5　设 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小，$u(x)$ 在 $x\to x_0$ 的过程中从某一时刻起有界，则 $u(x)f(x)$ 仍为当 $x\to x_0$ 时的无穷小．

推论 1　设 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小，如果从某一时刻起恒有 $|g(x)|\leqslant|f(x)|$，则 $g(x)$ 也为当 $x\to x_0$ 时的无穷小．

推论 2　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$. 如果在 $x\to x_0$ 的过程中，从某一时刻起恒有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

4. 函数极限的运算

定理 1　函数极限满足四则运算法则：设极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$.

当极限出现在分式的分母时，极限不得为零．

1.1.3 函数的连续性

1. 连续性的概念

(1) 连续性．若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在$x_0$点处连续．若函数$f(x)$在某一区间上的每一个点处连续，则称函数$f(x)$在该区间上连续．不连续的点通常称为间断点．

(2) 单侧连续．若$\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在$x_0$点处左连续，若$\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在$x_0$点处右连续．

左连续和右连续统称为单侧连续．

2. 初等函数的连续性

定理 2　初等函数在其定义区间内是连续的．

3. 闭区间连续函数的性质

性质 1（最大值和最小值定理）　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上一定有最大值和最小值．

推论　闭区间上的连续函数一定在该区间上有界．

性质 2（中间值定理）　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)=A$，$f(b)=B$，$A\neq B$. 对介于A，B之间的任一数值C，在开区间(a,b)内必有ξ，使$f(\xi)=C$.

推论 1（零点定理）　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$，$f(b)$异号，则必有$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$.

推论 2　闭区间上的连续函数一定取得最大值与最小值之间的所有数值．

1.1.4 无穷小的比较及等价无穷小

1. 无穷小的比较　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$是比$g(x)$高阶的无穷小，又称当$x\to x_0$时$g(x)$是比$f(x)$低阶的无穷小，记为$f(x)=o(g(x))$ $(x\to x_0)$．

(2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小.

(3) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记为 $f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$.

2. 等价无穷小代换　若当 $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ 时，α，β，α'，β'均为无穷小量，又 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

3. 几个常用的等价无穷小　当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$；$\ln(1+x)\sim x$；$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$；$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\sin x^n\sim x^n$；$e^x-1\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\arctan x\sim x$.

1.2　典型例题分析

例 1.1　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant0$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

【分析】　确定复合函数定义域的基本方法是先求 $\varphi(x)$ 的表达式，后确定其定义域.

【解】　由 $f(x)=e^{x^2}$有 $f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}$；又 $f(\varphi(x))=1-x$，故 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$，即 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$. 由 $\varphi(x)\geqslant0$ 可得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，于是 $\varphi(x)$ 定义域为：$\ln(1-x)\geqslant0$，即 $x\leqslant0$.

【同步练习】　已知 $f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 的定义域.

例 1.2　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

【分析】　当分式中分子分母同时含有致零因子时，应先消去致零因子后求极限.

【解】

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{[(1+x)-(1-x)](\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1-x)^2})}{[(1+x)-(1-x)](\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{3}{2}.$$

【同步练习】 求$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.

例 1.3 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$.

【分析】 求带绝对值的函数的极限，一般要通过单侧极限来确定．

【解】 由于$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right]=0+1=1$,

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right]=2-1=1,$$

从而$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]=1$.

【同步练习】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-x}}{\cos\dfrac{1}{x}}$.

例 1.4 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

【解】 注意到分子、分母的最高次数均为$\dfrac{n(n+1)}{2}$，故分子、分母同除以$x^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)}{\left[n^n+\dfrac{1}{x^n}\right]^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

【同步练习】 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

例 1.5 求极限$\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

【分析】 借助于变量代换及等价无穷小可求复合函数的极限．

【解】 令$t=x-1$，则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}t\cdot\tan\frac{\pi(t+1)}{2}=\lim_{t\to0}t\cdot\left(-\cot\frac{\pi t}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\frac{\pi t}{2}}{\tan\frac{\pi t}{2}}=-\frac{2}{\pi}.$$

【同步练习】 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}[(x+2)e^{\frac{1}{x}}-x]$.

例 1.6 若$x\to0$时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$与$x\sin x$为等价无穷小，求a的值．