高等院校名师精品课程教材

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

# 微积分原理及实验

WEIJIFEN YUANLI JI SHIYAN

王拉娣　刘振洁 等　编著

中国科学技术出版社

高等院校名师精品课程教材

# 微积分原理及实验

王拉娣　刘振洁 等　编著

中国科学技术出版社

· 北 京 ·

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分原理及实验/王拉娣等编著. —北京:中国科学技术出版社,2004.12
高等院校名师精品课程教材
ISBN 978-7-5046-3957-8

Ⅰ.微… Ⅱ.王… Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 132242 号

**自 2006 年 4 月起本社图书封面均贴有防伪标志,未贴防伪标志的为盗版图书。**

**责任编辑:** 郑洪炜
**封面设计:** 陈京宇
**责任校对:** 刘红岩
**责任印制:** 王　沛

中国科学技术出版社出版
北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码:100081
电话:010-62103210　传真:010-62183872
http://www.kjpbooks.com.cn
科学普及出版社发行部发行
北京玥实印刷有限公司印刷
*
开本:787 毫米×960 毫米　1/16　印张:20.25　字数:400 千字
2005 年 1 月第 1 版　2007 年 8 月第 2 次印刷
印数:6001—10500 册　定价:38.00 元
ISBN 978-7-5046-3957-8/O·91

(凡购买本社的图书,如有缺页、倒页、
脱页者,本社发行部负责调换)

# 内 容 提 要

本书是山西省21世纪高等教育教学改革项目和国家教育部教学改革课题的研究成果，并融入了数学实验的技术和教学名师先进的教学理念.

全书在不打乱微积分传统逻辑体系的前提下，采用学生易于接受和与现代计算机技术相结合的方式，系统地讲述了一元函数和多元函数的极限、连续、导数、积分及空间解析几何、级数、微分方程等微积分基本内容和原理，并单元式地介绍了有关章节的数学实验方法及运用数学软件 Mathematica 的求解，并附有习题及参考答案.

本书可以作为财经类院校各专业的数学课教材使用，由于兼顾了

# 前　言

本书的主要作者王拉娣、刘振洁老师于2001年主持了山西省教育厅实施的21世纪高等教育教学改革研究项目——“面向经济全球化，构建经济管理类高等数学课程新体系”和“财经类《数学实验》课程的内容与教学实践研究”.在此基础上于2003年承担了国家教育部教改课题“将数学建模的思想与方法融入大学数学主干课程的研究与实践”中相关子课题的研究.项目组成员对国内同类高校数学基础课程的教学现状以及所用教材进行了充分调研，并与经济管理专业的教学、研究人员进行了多次研讨，制定了大学数学中最主要的课程微积分的课程体系、课程内容、编写大纲，明晰了将数学建模思想与方法及现代计算机技术融入微积分的教学体系的编写思路，即通过引入数学实验增加微积分的形象性、实用性和可操作性，提高学生学习微积分课程的兴趣，加快他们对微积分原理的理解和掌握速度，使他们能够更好地应用所学的知识解决理论和实际问题.

众所周知，微积分思想源远流长，其“有限”与“无限”、“直”与“曲”等相互转化的辩证思想更有着深刻的哲学意义.它所给出的方法在实际中有着非常广泛的应用，它的产生大大促进了科学技术和社会生产力的发展.可以说没有微积分，就没有今天的科学技术.如今，即使在社会科学领域也越来越多地运用数学方法进行研究.作为人类理性思维的结晶，微积分还是数学的支柱之一，也是数学研究中的重要方法和工具.而今，随着人类文明的进步和科学技术的发展，尤其是计算机技术的广泛普及，微积分的思想和原理既是人们求学深造的基础，同时也是基本素质和文化修养的重要组成，强烈影响着人们的思维方式和行为规范——这正是数学教育的结果.

另一方面，虽然微积分分析体系的建立，澄清了以往许多含糊不清的概念，形成了严谨的理论体系，但也使一些非数学专业人士感到微积分抽象难学、枯燥难懂、计算繁杂、不便实用，从而失去了学习的兴趣和热情.因此，如何提高学生学习微积分的积极性和主动性，提高它的普及率，使之成为一种更加方便实用的技术，而不是束之高阁的抽象理论，更加简便快捷地服务于社会和人类，就成了广大数学工作者共同探索的问题.采用数学实验的方法来学习、探索和应用微积分就是这一探索的产物.

数学实验的思想方法虽然早已有之，但作为一门课程则是20世纪末的事情.

目前全国工科数学指导委员会已将“工科数学实验”课列为基础课,并在逐步纳入教学计划.在此教学改革潮流的推动下,在国家级和省级相关课题研究的基础上,本书作者提出数学实验方法与微积分原理相结合的教学思路.在不打乱微积分的逻辑体系前提下,考虑到教学改革应具有历史继承性和学生参加全国各类统一考试的要求,我们编著了本书.这也是本书采用“微积分原理及实验”作书名的含义所在.

把数学实验的方法引入微积分是本书的一大特点,其目的一方面是运用成熟的数学软件,利用计算机来进行辅助教学,使数学教学更加生动,帮助学生理解微积分产生的背景,提高学生学习数学的兴趣;另一方面淡化数学的符号运算,更加突出数学知识的实用性和可操作性.随着计算机技术的发展和数学软件技术的成熟,人们可以越来越方便地在可视化界面下,用按键式方式学习数学,应用数学.使数学更加贴近现实生活,为现实生活服务.这一点对成人继续教育来说更有实际意义.

本书是在山西省首批教学名师王拉娣教授的直接参加和指导下完成的,并融入了全体参编人员从教十多年至二十多年的教学经验和对数学的理解.其章节安排自然流畅,课堂教学使用十分顺手;例题与习题编排合理,数学软件的应用与每章内容衔接自然.虽然许多内容的编排匠心独到,但却毫无刻意雕琢的痕迹.可以说本书是“教”出来的.

在本书的编写过程中,在力求展示微积分的核心内容,体现时代发展的要求,以及反映当前高等数学教学改革研究的最新成果的同时,还兼顾了全国硕士研究生入学考试大纲和全国成人高等学校专升本考试《高等数学》(一)、(二)的要求.

参加本书编著的人员有:王拉娣(第八章)、刘振洁(第二章)、刘晓蕾(第三章、第五章)、高崇山(第六章、第九章)、郝水平(第一章、第七章和第十一章)、祁鑫宁(第四章、第十章).

由于作者水平所限,尤其是把数学实验融入微积分的课堂教学所积累的经验更是有限,这种类型的参考书也较少.所以书中一定有许多缺点或不足,敬请广大同行不吝赐教,共同推动数学教学的改革与发展.如有抛砖引玉之功效,更是出版本书的一大幸事.

编著者

2004 年 12 月

# 目　录

# 第一章　函　数

在自然界和社会现象中,存在着各种各样的变量,它们之间相互联系、相互制约的关系,反映在数学上就是变量间的函数关系,而微积分正是研究这种关系的数学分支.本章将讨论函数的概念及其基本性质.

## 第一节　实数集

### 一、实数集与数轴

由于微积分主要在实数范围内研究函数,故本节先复习实数的基本知识.

人类从数个数引出了自然数的概念,并逐步扩张出整数、分数和无理数,这便构成了全体实数.其中既约分数$\frac{p}{q}$($q\neq0$,$p$,$q$ 均为整数)称为有理数,它又可写成整数、有限小数或无限循环小数的形式,而无理数只能是无限不循环小数.

我们把规定了原点、单位长度和正方向的直线称为数轴.由于实数可以和数轴上的点一一对应,所以我们将不再区分实数和数轴上的点,比如"点 7"就是"实数 7",它们代表同一含义.数轴上与有理数对应的点称为有理点,与无理数对应的点称为无理点.

通常,实数集记为 **R**,有理数集记为 **Q**,整数集记为 **Z**,自然数集记为 **N**.

### 二、实数的绝对值及其性质

**定义 1.1**　设 $a$ 为一个实数,定义 $a$ 的绝对值为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant0\\ -a, & a<0\end{cases}$$

绝对值的几何意义:$|a|$表示数轴上点 $a$ 与原点间的距离;$|a-b|$表示数轴上点 $a$ 与点 $b$ 之间的距离.

绝对值有下列基本性质:

(1) $|a|\geqslant0$;$|a|=|-a|$;$|a|=\sqrt{a^2}$

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

(3) $|ab| = |a| \cdot |b|$

一般地,有 $|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|$

(4)对于 $a \geqslant 0$,不等式 $|x| \leqslant a$ 成立的充分必要条件是 $-a \leqslant x \leqslant a$;不等式 $|x| \geqslant a$ 成立的充分必要条件是 $x \leqslant -a$ 或 $x \geqslant a$.

(5) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

证:由性质(2)可知,

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|$$

则

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|$$

再由性质(4)可得

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

一般地,有

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

［证毕］

(6) $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$

通常把性质(5),(6)称为三角不等式.

## 三、区间与邻域

设 $a,b$ 为两个实数,且 $a<b$.称集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间,记作 $(a,b)$;称集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 为闭区间,记作 $[a,b]$;称集合 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 与集合 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 为半开半闭区间,分别记作 $(a,b]$ 与 $[a,b)$.

这些都是有限区间,$a,b$ 为它们的左、右端点,此外还有无限区间:

$(a,+\infty)$ 即 $\{x \mid x>a\}$,$[a,+\infty)$ 即 $\{x \mid x \geqslant a\}$,

$(-\infty,a)$ 即 $\{x \mid x<a\}$,$(-\infty,a]$ 即 $\{x \mid x \leqslant a\}$,

$(-\infty,+\infty)$ 即全体实数集 $\mathbf{R}$.

区间可以在数轴上表示,如区间 $(a,b)$ 和 $[a,b]$ 可表示为图 1.1.


图 1.1

为表示一个点及其附近点构成的集合,特引进邻域的概念.

**定义 1.2**　对于实数 $a$ 及正数 $\delta$,称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为以 $a$ 为中心,$\delta$ 为半径的邻域,简称点 $a$ 的 $\delta$ 邻域(见图 1.2).记作 $O(a,\delta)$.即

$$O(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$$

它也是由与点 $a$ 的距离小于正数 $\delta$ 的全体实数组成的集合,故有

$$O(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

去掉中心点 $a$ 的邻域,称为点 $a$ 的空心邻域,记作 $O(a,\delta)\setminus\{a\}$,即

$$\begin{aligned}O(a,\delta)\setminus\{a\}&=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\\&=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}\end{aligned}$$

而$(a-\delta,a)$和$(a,a+\delta)$分别称为点 $a$ 的左邻域和右邻域(见图 1.2).


图 1.2

今后当我们讲到 $a$ 点附近和 $a$ 点的左(右)侧时,即指 $a$ 点的某空心邻域和 $a$ 点的某左(右)邻域.又当存在点 $a$ 的某 $\delta$ 邻域 $O(a,\delta)$,使 $O(a,\delta)\subset I$($I$ 为一实数集)时,称点 $a$ 为集合 $I$ 的内点.

# 第二节 函数的概念

## 一、常量与变量

在观察自然现象和经济现象时,会遇到各种各样的量.其中有些量在观察过程中保持不变或取固定的数值,称为常量,通常用 $a,b,c$ 等表示;另一些量在观察过程中不断变化或可取不同的数值,称为变量,通常用 $x,y,z$ 等表示.

在我们讨论的问题中,有些量是主动变化的,称之为自变量;有些量则是随其他量的变化而变化,称之为因变量.例如,工作时间与产量的关系中,时间是自变量,产量是因变量;信件的重量和邮资的关系中,重量是自变量,邮资是因变量;以及身高随年龄而变化,利息随本金(期数、利率固定)而变化等.总之,在具体问题中,因变量总是随自变量的变化而变化.

因变量又称为自变量的函数.

## 二、函数的定义及其表示法

当自变量在某一范围取值时,按照某种对应法则,因变量会有唯一确定的数值与之对应.将这一特征一般化便得到函数的定义:

**定义 1.3** 设 $D$ 为一非空实数集,如果存在一个对应法则 $f$,使得对于每一个 $x\in D$,都有唯一确定的实数 $y$ 与之对应,则称 $y$ 是定义在 $D$ 上的函数,记作 $y=f(x)$. $D$ 称为函数的定义域,$x$ 为自变量,$y$ 为因变量.对应法则 $f$ 又叫函数关系.

定义域 $D$ 通常记为 $D_f$,当定义域为区间时,称为定义区间.

当 $x$ 取值 $x_0$ 时,与之对应的 $y$ 的取值 $y_0$ 称为函数在 $x_0$ 处的函数值,记为

$$y_0 = f(x_0) = f(x)\big|_{x=x_0} = y\big|_{x=x_0} = y(x_0)$$

全体函数值组成的集合,称为函数的值域,记为 $Z$ 或 $Z_f$,即

$$Z = Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

注意:确定一个函数需要两个要素,即定义域和对应法则.当两个函数的定义域和对应法则相同时,则认为这两函数为同一个函数.这里对应法则相同指的是对定义域内的每一个点,两函数的值都相等.

至于函数的自变量和因变量用什么样的字母表示没有关系,它不影响函数的本质.

例如:

(1) $y=1$ 与 $y=\frac{x}{x}$,因为 $y=1$ 的定义域是全体实数,而 $y=\frac{x}{x}$ 的定义域是不为零的实数,定义域不同,所以它们不是同一个函数.

(2) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=|x|$,前者的定义域是 $\{x \mid x\geqslant 0\}$,后者的定义域是全体实数,所以它们也不是同一函数.

(3) $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$,虽然定义域相同,但对应法则不同,故不是同一个函数.

(4) $y=\sqrt{x}$ 与 $u=\sqrt{v}$,这两函数的定义域和对应法则都相同,所以是同一个函数.

## 三、函数的表示

我们知道,函数的本质是变量间的对应,凡能实现这种对应关系的任何形式均为函数的表示形式,常用函数表示法有三种.

1. 表格法

把自变量和因变量的相应取值列成表格的形式.如三角函数表、列车时刻表等.这种方法可以简单、明确地表示变量间的对应关系,在实际中有广泛的应用.

2. 图像法

在平面直角坐标系中,用曲线表示函数关系.这种方法有明显的几何直观性,在实际工作中经常用到,且对理论研究有很好的辅助作用.

3. 解析法

用一个或几个数学式子来表示函数关系的方法,称为解析法或公式法.如圆面积公式,圆锥体的体积公式等.

此外,还有其他表示函数的方法,如"$y$ 为不超过 $x$ 的最大整数",是用语言叙述的,通常记为 $y=[x]$.如 $[2.5]=2$,$[-1.5]=-2$.

特别指出的是，有些函数在其定义域的不同子区间上，表达式不同，这类函数称为分段函数．例如，符号函数（见图 1.3）．

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

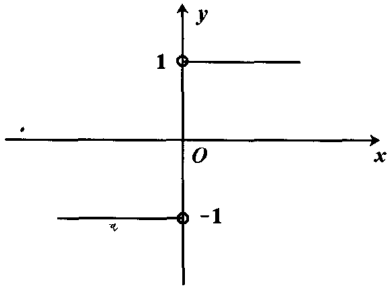

图 1.3

## 四、函数定义域的求法

若函数用解析式表示，则其定义域就是使函数表达式有意义的自变量的取值范围．例如，在一个分式中要求分母不为零；开偶次方时，要求被开方数大于等于零；在对数函数中，要求其真数大于零等．

对于实际应用问题中的函数，其定义域应结合实际意义来确定．例如，圆的面积 $S=\pi r^2$，$r$ 是圆的半径，其定义域为 $r>0$．

例 1.1　求函数　$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\lg(x+1)}$的定义域．

解：要使函数有意义，必须使 $4-x^2\geqslant 0$，$x+1>0$ 及 $x+1\neq 1$ 同时成立，

即
$$-2\leqslant x\leqslant 2,\ x>-1 \text{ 且 } x\neq 0$$

所以函数的定义域为

$$D=(-1,0)\cup(0,2]$$

注意：分段函数的定义域是各分段区间的并集，分段函数在其定义域上是一个函数，而不是几个函数．

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{当 } -1\leqslant x<0 \text{ 时}\\ x^2, & \text{当 } 0\leqslant x<1 \text{ 时}\end{cases}$

的定义域为 $D=[-1,0)\cup[0,1)$
$\qquad\qquad\quad =[-1,1)$

其图见图 1.4．

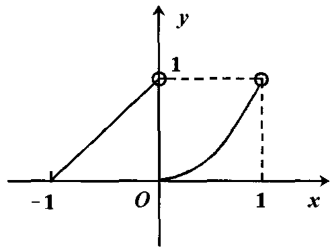

图 1.4

# 第三节　函数的几何特性

## 一、单调性

**定义 1.4**　设函数 $f(x)$在某区间 $D$ 上有定义，对于任意的 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，

(1)若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在 $D$ 上单调增加;

(2)若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在 $D$ 上单调减少.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数,使函数单调的区间称为单调区间.单调增加函数的图形沿 $x$ 轴的正方向呈上升趋势;单调减少函数的图形沿 $x$ 轴的正方向呈下降趋势.

例 1.2　讨论函数 $y=\frac{1}{x}$的单调性.

解:函数 $y=\frac{1}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

设　$x_1<x_2$　　则有

$$y(x_1)-y(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$$

显然 $y(x_1)-y(x_2)$的值可正可负,无法判断其符号.因此,函数 $y=\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上不具单调性.

但当 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$时,$y(x_1)-y(x_2)=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$,即 $y(x_1)>y(x_2)$,因此 $y=\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)$上单调减少;类似可知,$y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上也单调减少.

例 1.3　若函数 $f(x)$与 $g(x)$在区间$(a,b)$上都单调增加,试证:$f(x)+g(x)$在区间$(a,b)$上也单调增加(证明留作习题).

## 二、奇偶性

**定义 1.5**　设函数 $f(x)$在一个关于原点对称的集合 $D$ 上有定义,如果对于任意的 $x\in D$,恒有

(1)$f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数;

(2)$f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为偶函数.

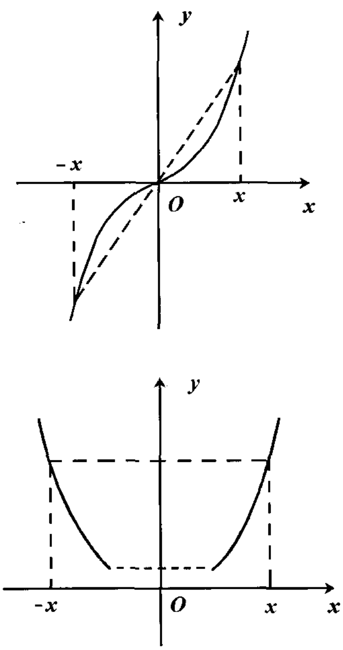


图 1.5

由定义可知,奇函数的图形关于坐标原点对称;偶函数的图形关于 $y$ 轴对称