



读考研书 找人大社

2009 考研

历届数学真题题型解析(数学二)

主编 黄先开 曹显兵

● 囊括**22年**全部真题 ● 名师归纳总结**115**题型

全书按大纲考试要求设置结构，每章下归纳题型分类解析1987—2008年真题
题题精解，有分析，有评注，多种解法、多种思路

章章总结，将历年试题题型、分值分布情况分别列表，考试重点清晰可见

每章后附自测练习题，全部来自数一、二、四的历年真题，互相借鉴，触类旁通

22年试卷附录在后，供考生自测之用，其解析在正文的位置全部标明

 中国人民大学出版社



013-44/199
:2009(3)
2008

考研历届数学真题 题型解析(数学三)

► 主 编 黄先开 曹显兵
► 编 者 黄先开 曹显兵
施明存 殷先军

正版
查询及
服务
程序



← 刮 开 涂 层



← 获 取 20 位 数 字 编 码



← 上 www.1kao.net 注 册



← 登 录 增 值 服 务 进 免 费 课 堂



2009

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研历届数学真题题型解析. 数学三/黄先开,曹显兵主编. 3版

北京:中国人民大学出版社,2008.3

ISBN 978-7-300-07365-1

I. 考…

II. ①黄…②曹…

III. 高等数学-研究生-入学考试-解题

IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 021426 号

考研历届数学真题题型解析(数学三)

主 编 黄先开 曹显兵

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242(总编室)

010-82501766(邮购部)

010-62515195(发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司

规 格 210 mm×285 mm 16 开本

印 张 26.5

字 数 825 000

邮政编码 100080

010-62511398(质管部)

010-62514148(门市部)

010-62515275(盗版举报)

版 次 2006 年 6 月第 1 版

2008 年 3 月第 3 版

印 次 2008 年 3 月第 1 次印刷

定 价 39.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

郑重声明

黄先开、曹显兵教授主编的《考研历届数学真题题型解析》系列图书，因其名师的底蕴、全面的内容、权威的解析，名副其实地成为全面、权威、实用的数学真题类考研辅导书。

当前考研图书市场盗印盗销行为猖獗。盗版行为在侵害作者和出版者权益的同时，也因其印装粗劣、错漏百出，使考生蒙受金钱损失、精力损失，甚至误导考生，毁掉考生考研前程。

多年来，我们一直与盗版行为作着艰苦的斗争，并让一些盗版者受到了应有的处罚。今年，我们将进一步加大打击盗版的力度，并利用包括法律在内的一切手段，让盗版者受到严惩。

请广大考生认准以下防盗版特征：(1) 封面防伪标带 20 位密码网上注册查真伪。
(2) 封面压有带人大出版社社标的压纹。

在以上措施的基础上，我们奉行以服务打击盗版，让买人大版图书的考生享受到实实在在的服务。今年我们将继续为购书考生提供网上增值服务，详情请及时登录中国 1 考网 (www.1kao.net) 查询。

为保障您和您尊敬的老师的合法权益，请将您掌握的盗版者信息及时提供给我们。

举报电话：010-62515275

编辑电话：010-62511915

咨询电话：010-62511349

电子邮箱：1kao2005@163.com

中国人民大学出版社授权律师

北京市洪范广住律师事务所

徐 波

2008 年 2 月

真题复习 攻克数学的突破口

数学在研究生入学考试中分值之高，使其对于考研的成功与否起着至关重要的作用。而要攻克这一重点与难关，必须要把真题复习作为突破口。

黄先开、曹显兵教授多年从事研究生入学考试的研究与辅导，在考生中广受赞誉，他们积丰富经验所主编的这套《考研历届数学真题题型解析》，内容权威，覆盖面广，解析精准，对于考生深度复习真题，全面提高应试能力大有帮助。

考研数学的复习是一项系统工程，在全力攻克真题的同时，考生还需要在其他方面下工夫。相关图书如下：

- 《2009 年考研数学经典讲义（理工类）》
- 《2009 年考研数学经典讲义（经济类）》
- 《2009 年考研数学最新精选 600 题（理工类）》
- 《2009 年考研数学最新精选 600 题（经济类）》
- 《2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷（数学一）》
- 《2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷（数学二）》
- 《2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷（数学三）》
- 《2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷（数学四）》

以上图书均由黄先开、曹显兵等教授主编。经过认真复习，我们相信您定可以轻松上阵，考取高分，圆考研名校梦。

前言

自从 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学数学实行统一考试以来,至今已 22 年,共命制试卷近百份,有上千道试题。这些试题是参加命题的专家、教授的智慧 and 劳动的结晶,它既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,展示出统考以来数学考试的全貌,又蕴涵着命题专家在《数学考试大纲》要求下的命题指导思想、原则、特点和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。

拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的数学历年真题,是广大准备考研学子的期盼。通过认真分析研究、了解、消化和掌握历年试题,可以发现命题的特点和趋势,找出知识之间的有机联系,总结每部分内容的考查重点、难点,归纳常考典型题型,凝练解题思路、方法和技巧,明确复习方向,从而真正做到有的放矢、事半功倍地进行复习。本书是作者在十多年收集、整理资料和进行考研数学辅导的基础上,通过对历年试题的精心分析研究,并结合授课体会和学生的需要全新编写而成的,相信能够满足考生的要求。

我们认为本书具有以下特点:

1. 内容最全面。汇集了统考以来 22 年的所有试题,便于考生全面系统地把握历年试题的动态变化。在每章后面还将其余三类试卷的相关典型真题作为习题提供(如数学一每章后面精选了数学二、数学三和数学四的同类型考题),以便考生进一步巩固相关知识,考生有了本书后,也就相当于拥有了其余三类试卷的资料。

2. 题型最丰富。根据考试大纲的要求,每一章节均按题型进行归类,并对每一题型进行了分析、归纳和总结。这样考生可通过题型研究,把握命题特点和命题思路,做到举一反三,触类旁通。

3. 解析最详尽。先分析——解题的思路、方法,然后详解——详细、规范的解答过程,再就是评注——解题思路、方法和技巧的归纳总结,所涉及的知识、命题意图和可能延伸的考查情形。对命题思路、解题的重点难点进行这样深入细致的解析,相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧,从而大大提高应试水平。

4. 对照最直接。本书在每部分的开头,先列出了考试大纲规定的内容与要求,与此相对照再进行题型归类和分析总结,顺序与考试大纲和一般教材一致,便于考生对照复习。

5. 总结最完整。除每类题型均有归纳总结外,每章还有历年考研试题按题型分布和分数的总结,这样可以帮助考生了解每类题型考查的频率、所占的比重,从而发现命题的重点、最常考的题型,以便更有针对性地进行复习。

本书既根据考试内容按章节编排,又提供成套试卷。复习前期建议考生按章节内容与教材、复习指导书同步进行,后期可将本书作为模拟训练套题使用。尽管本书每题均有详尽的解析,但希望读者不要輕易去查看分析、详解和评注,而一定要自己先动手去进行演练。在每题做完之后,再去看书中的分析、详解和评注,仔细回顾、研究一下自己的分析、思路和解答过程与书中有什么异同;如果存在问题,应尽量查清原因,看看自己是在基本理论、基本概念与基本方法等方面有欠缺,还是在做题技巧、知识的综合与灵活运用等方面掌握不够。注意,这

样的归纳总结过程是必不可少的，其重要性甚至超过做题本身。整本书都这样复习下来，在掌握基本理论、基本概念和基本方法上，在综合、灵活运用知识和思维能力的训练上，相信读者一定会有质的提高。

本书一方面保留了我们过去编写的历年试题解析图书的优点，同时在这次编写完善过程中，参考了众多相关的教材和复习指导书，在此不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。

由于时间比较仓促，加上编者水平所限，书中难免还有不足之处，恳请广大读者批评指正。

成功来源于自信，只要广大考生充满信心，通过脚踏实地的艰苦努力，就一定能够心想事成。

编者

2008年2月于北京

目 录

第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续 3

题型 1.1	函数的概念及其特性	3
题型 1.2	极限概念与性质	5
题型 1.3	函数极限的计算	6
题型 1.4	函数极限的逆问题	10
题型 1.5	数列的极限	10
题型 1.6	无穷小量的比较	12
题型 1.7	函数的连续性、间断点、 分类	13
本章总结		16
自测练习题		17
自测练习题答案或提示		19

第二章 一元函数微分学 21

题型 2.1	考查导数的定义	21
题型 2.2	利用导数求曲线的切线、 法线方程	24
题型 2.3	一般导函数的计算	26
题型 2.4	可导、连续与极限的关系	29
题型 2.5	微分的概念与计算	30
题型 2.6	利用导数确定单调区间 与极值	31
题型 2.7	求函数曲线的凹凸区间 与拐点	34
题型 2.8	求函数曲线的渐近线	36
题型 2.9	确定函数方程 $f(x) = 0$ 的根	38
题型 2.10	确定方程 $F(x, f(x),$ $f'(x)) = 0$ 的根	38
题型 2.11	微分中值定理的 综合应用	42
题型 2.12	利用导数证明不等式	43
题型 2.13	导数在经济上的应用	44
本章总结		51

自测练习题	51
-------	----

自测练习题答案或提示	55
------------	----

第三章 一元函数积分学 57

题型 3.1	原函数与不定积分 的概念	57
题型 3.2	定积分的基本概念 与性质	59
题型 3.3	不定积分的计算	61
题型 3.4	定积分的计算	63
题型 3.5	变限积分	65
题型 3.6	定积分的证明题	70
题型 3.7	广义积分	77
题型 3.8	应用题	80
本章总结		87
自测练习题		87
自测练习题答案或提示		90

第四章 多元函数微分学 93

题型 4.1	基本概念题	93
题型 4.2	二元函数的极限	93
题型 4.3	求复合函数的偏导数和 全微分	95
题型 4.4	求隐函数的偏导数和 全微分	100
题型 4.5	求多元函数的极值和 最值	103
本章总结		108
自测练习题		109
自测练习题答案或提示		111

第五章 重积分 113

题型 5.1	与二重积分性质有关 的问题	113
题型 5.2	交换积分顺序或坐标系	114

题型 5.3	选择适当坐标系计算 二重积分	116
题型 5.4	利用积分区域的对称性和被积 函数的奇偶性计算	121
题型 5.5	分块积分	123
题型 5.6	无界区域上的二重积分	125
题型 5.7	解含有未知函数二重积分的 函数方程	127
本章总结		128
自测练习题		128
自测练习题答案或提示		130
第六章	无穷级数	131
题型 6.1	判定数项级数的敛散性	131
题型 6.2	证明数项级数的敛散性	136
题型 6.3	求幂级数的收敛半径、 收敛区间及收敛域	136

题型 6.4	求幂级数的和函数	138
题型 6.5	求数项级数的和	143
题型 6.6	将函数展开成幂级数	146
本章总结		148
自测练习题		148
自测练习题答案或提示		151

第七章 常微分方程 152

题型 7.1	一阶微分方程	152
题型 7.2	高阶常系数线性 微分方程	156
题型 7.3	求解含变限积分的方程	157
题型 7.4	微分方程的应用	159
题型 7.5	一阶差分方程	161
本章总结		163
自测练习题		163
自测练习题答案或提示		166

第二部分

线性代数

第一章 行列式 171

题型 1.1	利用行列式的性质和按行(列) 展开定理计算行列式	171
题型 1.2	利用行列式和矩阵的运算性质 计算行列式	173
题型 1.3	利用秩、特征值和相似矩阵等 计算行列式	175
本章总结		177
自测练习题		177
自测练习题答案或提示		179

第二章 矩阵 180

题型 2.1	有关逆矩阵的 计算与证明	180
题型 2.2	矩阵的乘法运算	183
题型 2.3	解矩阵方程	185
题型 2.4	与初等变换有关的命题	186
题型 2.5	与伴随矩阵 A^* 有关的命题	188
题型 2.6	矩阵秩的计算与证明	190
本章总结		193
自测练习题		194

自测练习题答案或提示	196
------------	-----

第三章 向量 198

题型 3.1	向量的线性组合与 线性表示	198
题型 3.2	向量组的线性相关性	202
题型 3.3	求向量组的秩与 矩阵的秩	208
本章总结		210
自测练习题		210
自测练习题答案或提示		212

第四章 线性方程组 213

题型 4.1	解的判定、性质和结构	213
题型 4.2	求齐次线性方程组的 基础解系、通解	216
题型 4.3	求非齐次线性方程组 的通解	219
题型 4.4	抽象方程组的求解问题	225
题型 4.5	有关基础解系的命题	227
题型 4.6	讨论两个方程组解之间 的关系(公共解、同解)	228
题型 4.7	与 $AB = 0$ 有关的命题	233

题型 4.8 线性方程组的综合应用	234
本章总结	236
自测练习题	236
自测练习题答案或提示	238
第五章 特征值与特征向量	240
题型 5.1 求数字矩阵的特征值和 特征向量	240
题型 5.2 求抽象矩阵的特征值	242
题型 5.3 特征值、特征向量 的逆问题	243
题型 5.4 相似矩阵的判定 及其逆问题	244
题型 5.5 可对角化的判定 及其逆问题	246
题型 5.6 实对称矩阵的性质	248

题型 5.7 特征值、特征向量 的应用	253
本章总结	255
自测练习题	255
自测练习题答案或提示	257
第六章 二次型	259
题型 6.1 二次型的矩阵、 秩和正负惯性指数	259
题型 6.2 化二次型为标准形	260
题型 6.3 化二次型为标准形 的逆问题	263
题型 6.4 合同变换与合同矩阵	264
题型 6.5 正定二次型与正定矩阵	267
本章总结	272
自测练习题	272
自测练习题答案或提示	273

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率	277
题型 1.1 事件的关系与概率 的基本性质	277
题型 1.2 古典概型与几何概型	279
题型 1.3 乘法公式、 条件概率公式	282
题型 1.4 全概率公式、 贝叶斯公式	283
题型 1.5 事件的独立性	285
题型 1.6 贝努利概型	287
本章总结	288
自测练习题	289
自测练习题答案或提示	290
第二章 随机变量及其分布	291
题型 2.1 概率分布的基本概念 与性质	291
题型 2.2 求随机变量的分布律、 分布函数	294
题型 2.3 利用常见分布计算概率	296
题型 2.4 常见分布的逆问题	299
题型 2.5 随机变量函数的分布	300
本章总结	303
自测练习题	303

自测练习题答案或提示	304
第三章 多维随机变量及其分布	306
题型 3.1 二维离散型随机变量的联合 分布、边缘分布、条件分布	306
题型 3.2 二维连续随机变量的联合分布、 边缘分布、条件分布	308
题型 3.3 二维随机变量函数 的分布	310
题型 3.4 随机变量的独立性 与相关性	313
题型 3.5 综合题	315
本章总结	318
自测练习题	319
自测练习题答案或提示	320
第四章 随机变量的数字特征	323
题型 4.1 数学期望与方差的计算	323
题型 4.2 一维随机变量函数的 期望与方差	325
题型 4.3 二维随机变量函数的 期望与方差	326
题型 4.4 协方差与相关系数 的计算	327
题型 4.5 随机变量的独立性与	

不相关性	330
题型 4.6 应用题	332
题型 4.7 综合题	335
本章总结	341
自测练习题	342
自测练习题答案或提示	344
第五章 大数定律与中心极限定理	347
题型 5.1 切比雪夫不等式	347
题型 5.2 大数定律	348
题型 5.3 中心极限定理	348
本章总结	350
自测练习题	351
自测练习题答案或提示	351
第六章 数理统计的基本概念	352
题型 6.1 求统计量的数字特征	352
题型 6.2 求统计量的分布或	

取值的概率	355
本章总结	359
自测练习题	360
自测练习题答案或提示	360
第七章 参数估计	361
题型 7.1 求参数的矩估计和最大似然估计	361
题型 7.2 估计量的评价标准	365
题型 7.3 区间估计	366
本章总结	369
自测练习题	369
自测练习题答案或提示	370
第八章 假设检验	371
题型 8.1 单正态总体未知参数的假设检验	371
本章总结	371

附 录

附录一 1987 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	372
附录二 1988 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	373
附录三 1989 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	375
附录四 1990 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	377
附录五 1991 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	379
附录六 1992 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	380
附录七 1993 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	382
附录八 1994 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	383
附录九 1995 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	385
附录十 1996 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	387
附录十一 1997 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	389

附录十二 1998 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	390
附录十三 1999 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	392
附录十四 2000 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	394
附录十五 2001 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	395
附录十六 2002 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	397
附录十七 2003 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	399
附录十八 2004 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	401
附录十九 2005 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	403
附录二十 2006 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	405
附录二十一 2007 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	407
附录二十二 2008 年全国硕士研究生入学 统一考试数学三试题	409

PART ONE

第一部分

微 积 分

第一章 函数、极限、连续

考试内容与要求

考 试 内 容

函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,复合函数、反函数、分段函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,函数关系的建立.

数列极限与函数极限的定义及其性质,函数的左极限和右极限,无穷小量和无穷大量的概念及其关系,无穷小量的性质及无穷小量的比较,极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

函数连续的概念,函数间断点的类型,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质.

考 试 要 求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小量的概念和基本性质,掌握无穷小量的比较方法.了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

题型 1.1 函数的概念及其特性

1. (87, 2 分)* 判断题: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$. 【 】

【答案】 应填 $\times$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$,

故 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在也非无穷大.

* (87, 2 分) 表示该题为 1987 年考研数学三真题,其分值为 2 分. 全书同.

2. (88, 2分) 判断题: 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 都存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 存在. 【 】

【答案】 应填 $\times$.

【详解】 取 $f(x) = 0, g(x) = \sin \frac{1}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ (存在), 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在, 故结论错误.

3. (90, 3分) 设函数 $f(x) = x \cdot \tan x \cdot e^{\sin x}$, 则 $f(x)$ 是

(A) 偶函数.

(B) 无界函数.

(C) 周期函数.

(D) 单调函数. 【 】

【答案】 应选(B).

【详解 1】 令 $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi + \frac{\pi}{4}) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \infty,$$

因此 $f(x)$ 是无界函数, 故应选(B).

【详解 2】 可用排除法.

由于 $f(-x) = -x \cdot \tan(-x) \cdot e^{\sin(-x)} = -x \tan x e^{\sin x} \neq f(x)$,
故 $f(x)$ 不是偶函数, 显然 $f(x)$ 也不是周期函数.

而 $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$;

$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$;

$x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

故 $f(x)$ 也不是单调函数. 所以只有(B) 项正确.

【评注】 本题主要考查函数的基本性质: 奇偶性、周期性、单调性、有界性.

4. (04, 4分) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界?

(A) $(-1, 0)$.

(B) $(0, 1)$.

(C) $(1, 2)$.

(D) $(2, 3)$. 【 】

【答案】 应选(A).

【分析】 如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

【详解】 当 $x \neq 0, 1, 2$ 时, $f(x)$ 连续, 而

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4}, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty,$$

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界, 故选(A).

【评注】 一般地, 如函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界; 如函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有界.

小结

函数的概念及其复合, 包括分段函数的复合, 本质上是函数关系的建立问题, 而建立函数关系是进一步研究函数性质的基础. 对于函数的四个主要特性: 奇偶性和周期性一般用定义检验; 单调性则大多用导数符号分析; 有界性往往需要结合极限与连续的性质来确定.

题型 1.2 极限概念与性质

1. (00, 3分) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且等于零.

(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.

(D) 不一定存在.

【 】

【答案】 应选(D).

【分析】 若不能得出肯定的结论时, 可举反例进行说明.

【详解】 若令 $\varphi(x) = 1 - e^{-|x|}$, $g(x) = 1 + e^{-|x|}$, $f(x) = 1$,

则有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$,

且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$,

可排除(A), (C) 两个选项.

又令 $\varphi(x) = e^x - e^{-|x|}$, $g(x) = e^{-|x|} + e^x$, $f(x) = e^x$, 显然 $\varphi(x), g(x), f(x)$ 满足题设条件, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在, 因此(B) 也可排除, (D) 为正确选项.

【评注】 注意 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 并不能推出 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 存在且相等.

2. (03, 4分, 数一) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

【 】

【答案】 应选(D).

【详解 1】 本题考查极限的概念, 极限值与数列前面有限项的大小无关, 可立即排除(A), (B); 而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 可能存在也可能不存在, 举反例说明即可; 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 属“ $1 \cdot \infty$ ”型, 必为无穷大量, 即不存在. 故应选(D).

【详解 2】 用举反例法, 取 $a_n = \frac{2}{n}, b_n = 1, c_n = \frac{1}{2}n (n = 1, 2, \dots)$, 则可立即排除(A), (B), (C), 因此正确选项为(D).

3. (07, 4分) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 应填 0.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} = 0$, 而 $\sin x + \cos x$ 有界, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = 0.$$

小结

关于极限的存在性, 以下几点是值得注意的:

1. 若 $\lim f$ 存在, $\lim g$ 不存在, 则 $\lim(f \pm g)$ 一定不存在, 但 $\lim fg, \lim \frac{f}{g}$ 可能存在, 也可能不存在;
2. 若 $\lim f = l \neq 0, \lim g = \infty$, 则 $\lim fg = \infty$;
3. 若 f 有界, $\lim g = \infty$, 则 $\lim(f \pm g) = \infty$, 但 $\lim fg$ 不一定为 ∞ .

题型 1.3 函数极限的计算

一、利用左右极限求函数极限

1. (92, 3 分, 数一) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A) 等于 2.

(B) 等于 0.

(C) 为 ∞ .

(D) 不存在但不为 ∞ .

【答案】 应选(D).

【分析】 本题的关键是注意 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$, 故有

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty,$$

可见, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在但不为 ∞ .

【评注】 $\lim_{x \rightarrow x_0} a^{x-x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \arctan \frac{1}{x-x_0}$ 等均是极限不存在的情形, 遇此情形一般应通过左右极限进行讨论.

2. (00, 5 分, 数二) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

【分析】 本题函数关系式中含有绝对值, 本质上是一分段函数, 在分段点的极限应通过左右极限来讨论.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{2}{1} - 1 = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1,$$

可见, 原式 = 1.

【评注】 形如 $|f(x)|$, $\max\{f(x), g(x)\}$ 的函数, 本质上是分段函数, 在求极限、导数和积分时一般均应分段讨论.

小结

在讨论分段函数极限时一般用结论 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 因此, 当左右极限 $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ 有一个不存在或都存在但不相等时, 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在.

二、求未定式 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0 \right)$ 的极限

1. (87, 4 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

【分析】 “ 1^∞ ”型未定式.

【详解】 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} [(1 + xe^x)^{\frac{1}{xe^x}}]^{\frac{x}{1+xe^x}} = e^1 = e$.