河南省文化产业发展重点项目

高职高专系列教材

河南科学技术出版社

“十一五”高职高专公修课规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

赵俊英 杨 玉 主编

河南科学技术出版社

“十一五”高职高专公修课规划教材

高等数学

赵俊英　杨　玉　主编

河南科学技术出版社

·郑州·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/赵俊英，杨玉主编.—郑州：河南科学技术出版社，2008.9
（“十一五”高职高专公修课规划教材）
ISBN 978-7-5349-4065-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①赵…②杨… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第131302号

出版发行：河南科学技术出版社
地址：郑州市经五路66号　　邮编：450002
电话：（0371）65737028
网址：www.hnstp.cn
策划编辑：李迎辉
责任编辑：李迎辉
责任校对：柯　姣
封面设计：张　伟
版式设计：栾亚平
印　　刷：河南第一新华印刷厂
经　　销：全国新华书店
幅面尺寸：185 mm×260 mm　　印张：14.75　　字数：380千字
版　　次：2008年9月第1版　　2008年9月第1次印刷
定　　价：28.00元

《高等数学》教材建设工作委员会名单

《高等数学》编者名单

主　编　赵俊英　杨　玉
副主编　江展华　樊剑侠　刘彩云

前　言

根据近年来高职高专数学教学改革的要求（即在学生掌握本课程的基本内容和基本方法的前提下尽量减少学时）和学生的实际情况，出版一本便于学生牢固掌握知识的教材便成为迫切需要。

高职高专教育作为我国高等教育的一个重要组成部分，与普通高等教育相比有着它自身的特点，其目标是培养生产和管理第一线的技术应用型人才。为满足高等职业技术院校、高等专科学校和成人高等学校的教学需要，以及在职从业人员学习高等数学的要求，在有关领导的支持下，我们在多年教学实践的基础上，编写成这本教材。

《全国普通高等专科教育座谈会纪要》指出，高等专科学校的教学“要突出理论知识的应用和实践动手能力的培养”；原国家教委《关于推动职业大学改革与建设的几点意见》中又指明，职业大学的理论教学要以应用为目的，以“必需、够用”为原则。按照这些原则，本教材的编写力求体现以下特点：

1. 贯彻理论联系实际的原则，着重管理和工程技术等方面的实际应用。本教材的基本概念都由实际问题引入，并注意联系各方面的应用，以提高学生解决实际问题的能力。

2. 减少系统的理论推导，加强重要法则和公式的运用。许多定理、结论都以“法则”、“公式”形式出现，每节均配备作为基本知识、法则和公式应用训练的例题和实训题，以加强这些法则和公式的熟练运用。

3. 增强教材的适用性。本教材汇集了若干层次的基本知识及应用内容（加 * 的部分为选修内容），供不同专业和不同教学对象选用。

4. 在本教材的编写过程中，我们努力做到由浅入深、循序渐进。在内容的讲述和结论的证明中力求简单明了，每节内容之后有习题，每章之后附有复习题用以复习和巩固本章内容，而本章小结可以帮助学生对本章内容进行总体了解和掌握，并把本章内容更好地连贯起来。

5. 把掌握基础知识、基本技能与培养科学的思维方式相结合。调

动学生学习数学的积极性，遵循学生的认知规律，使各个层次的学生都能有所提高。

本教材由赵俊英老师（第一、二、六章）、杨玉老师（第三、四、五章）、江展华老师（第七、八章）、樊剑侠老师（第一、二章）、刘彩云老师（第六章）组成编写组，经过半年多紧张、艰苦的工作，多次商榷、修改而成稿。

编者

2008 年 5 月

目 录

第一章　函数、极限与连续

极限概念是研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的.它是微积分学的重要基本概念之一,微积分学中的其他几个重要概念,如连续、导数、定积分等,都是用极限表述的,并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的.本章在对函数概念进行复习和补充的基础上,介绍数列与函数极限的概念、求极限的方法及函数的连续性.

第一节　函　数

函数是微积分学研究的对象.在中学里我们已经学习过函数概念,在这里我们不进行简单的重复,而是从全新的视角对它进行描述并重新分类.在学函数之前了解几个基本概念.

一、基本概念

1.集合

具有某种特定性质的事物的总体称为集合,组成这个集合的事物称为该集合的元素.

$a \in A, a \notin A$.

注　(1)集合的表示法:

列举法　$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$;

描述法　$A = \{a \mid P(a)\}$.

(2)子集:若 $x \in A$,则必 $x \in B$,就说 A 是 B 的子集,记为 $A \subset B$.

数集分类:$\mathbf{N}$— 自然数集,$\mathbf{Z}$— 整数集,$\mathbf{Q}$— 有理数集,$\mathbf{R}$— 实数集.

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

(3)数集间的关系:若 $A \subset B$,且 $B \subset A$,就称集合 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

例如:$A = \{1,2\}$, $C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$,则 $A = C$.

(4)空集:不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.

例如:$\{x \mid x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

规定:空集为任何集合的子集.

2. 区间

区间指介于某两个实数之间的全体实数，这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a,b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$，有如下定义：

开区间：集合 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$.

闭区间：集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$，即 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

半开半闭区间：集合 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 称为左闭右开区间，记为 $[a,b)$，即 $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；集合 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 称为左开右闭区间，记为 $(a,b]$，即 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

无限区间：$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$，$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$；$(a,+\infty) = \{x \mid x > a\}$，$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$；$\mathbf{R} = (-\infty,+\infty)$.

3. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$，数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为：$U_\delta(a)$，即 $U_\delta(a) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$. 点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

因为 $|x-a| < \delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$,

所以 $U_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$.

注 (1) 邻域的几何意义：邻域是数轴上一个以 a 为中心，长度为 2δ 的开区间.

(2) 点 a 的去心的 δ 邻域记为 $U_\delta^0(a)$，即 $U_\delta^0(a) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$.

二、函数的概念

1. 常量与变量

在日常生活、生产活动和经济活动中，经常遇到各种不同的量，例如：身高、气温、产量、收入、成本等. 这些量可以分为两类，一类量在考察的过程中不发生变化，只取一个固定的值，我们把它称为常量，例如，圆周率 π 是个永远不变的量，某种商品的价格、某个班的学生人数在一段时间内保持不变，这些都是常量；另一些量在所考察的过程中是变化的，可以取不同的数值，我们把它称为变量，例如，一天中的气温、生产过程中的产量都是在不断变化的，它们都是变量.

在理解常量与变量时，应注意下面几点：

(1) 常量和变量依赖于所研究的过程. 同一个量，在某一过程中可以认为是常量，而在另一过程中则可能是变量，反过来也是同样的. 例如，某种商品的价格在一段时间内是常量，但在较长的时间内则是变量. 这说明常量和变量具有相对性.

(2) 从几何意义上讲，常量对应着实数轴上的定点，变量则对应着实数轴上的动点.

(3) 一个变量所能取的数值的集合叫做这个变量的变动区域.

有一类变量，例如时间可以取介于两个实数之间的任意实数值，叫做连续变量，连续变量的变动区域常用区间表示.

常量习惯用字母 a,b,c,d 等表示，变量习惯用 x,y,z,u,v,w 等表示.

2. 函数的概念

在某个变化过程中，往往出现多个变量，这些变量不是彼此孤立的，而是相互影响和相互制约的，一个量或一些量的变化会引起另一个量的变化. 如果这些影响是确定的，是

依照某一规则的，那么我们说这些变量之间存在着函数关系．

例如，伽利略发现自由落体下落的距离 s 与经历的时间 t 的平方成正比，得到著名的公式：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 (g \approx 9.81\ \mathrm{m/s^2}),$$

确定了变量 t 与 s 之间的依赖关系，即函数关系．这就是自由落体运动规律的数学表述．

定义 1－1　设 x 和 y 是两个变量，若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时，变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y = f(x)$．这里，x 称为自变量，y 称为因变量或函数，f 是函数符号，它表示 y 与 x 的对应规则．有时函数符号也可以用其他字母来表示，如 $y = g(x)$ 或 $y = \varphi(x)$ 等．

集合 D 称为函数的定义域，相应的 y 值的集合则称为函数的值域．

当自变量 x 在其定义域内取定某确定值 x_0 时，因变量 y 按照所给函数关系 $y = f(x)$ 求出的对应值 y_0 叫做当 $x = x_0$ 时的函数值，记为 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$．

例 1　已知 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$，求：$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(x^2)$．

解　$f(0) = \frac{1-0}{1+0} = 1$，$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$，$f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = \frac{1+x}{1-x}$，

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},\quad f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = \frac{-x}{2+x},\quad f(x^2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = \frac{3}{5x^2+2x}$；　(2) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$；　(3) $f(x) = \ln(4x-3)$；

(4) $f(x) = \arcsin(2x-1)$；　(5) $f(x) = \ln(4x-3) - \arcsin(2x-1)$．

解　(1) 在分式 $\frac{3}{5x^2+2x}$ 中分母不能为零，所以 $5x^2+2x \neq 0$，解得 $x \neq -\frac{2}{5}$，且 $x \neq 0$，即定义域为

$$(-\infty, -\frac{2}{5}) \cup (-\frac{2}{5}, 0) \cup (0, +\infty).$$

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2 \geqslant 0$，解得 $-3 \leqslant x \leqslant 3$，即定义域为 $[-3,3]$．

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x-3>0$，解得 $x > \frac{3}{4}$，即定义域为 $(\frac{3}{4}, +\infty)$．

(4) 反正弦或反余弦中的式子的绝对值必须小于等于 1，所以有 $-1 \leqslant 2x-1 \leqslant 1$，解得 $0 \leqslant x \leqslant 1$，即定义域为 $[0,1]$．

(5) 该函数为 (3)、(4) 两例中函数的代数和，此时函数的定义域应为 (3)、(4) 两例

中定义域的交集，即$(\frac{3}{4},+\infty)\cap[0,1]=(\frac{3}{4},1]$.

应当指出，在实际应用问题中，除了要根据解析式本身来确定自变量的取值范围以外，还要考虑到变量的实际意义.

3. 函数的表示方法

常用的函数表示法有解析法(又称公式法)、表格法和图形法，现举例说明如下.

(1) 解析法，又称公式法.

例如$f(x)=\sqrt{4-x^2}$，这是一个用解析式表示的函数. 当x在-2到2之间取任意值时，由公式可以确定唯一的y值.

(2) 表格法.

某国1980年至1985年人口估计数字关系如表1－1所示.

表1－1

年份／年 x	1980	1981	1982	1983	1984	1985
人口／百万 y	37.18	39.03	40.80	42.57	44.36	56.39

(3) 图形法.

图1－1是气象站用自动温度记录仪记录下来的某地一昼夜气温变化线.

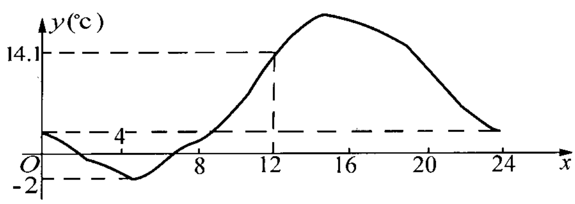

图1－1

这是用图形表示的函数. 气温y与时间x的函数关系是由曲线给出的. 当x取0到24中任意一个数时，在曲线上都能找到确定的y值与它对应. 例如$x=12$时，$y=14.1$ ℃.

4. 分段函数

某市电话局规定市话收费标准为：当月所打电话次数不超过30次时，只收月租费25元，超过30次的，每次加收0.23元. 则电话费y和用户当月所打电话次数x的关系可用下面的形式给出：

$$f(x)=\begin{cases}25 & x\leqslant 30\\ 25+0.23(x-30) & x>30\end{cases}.$$

像这样把定义域分成若干部分，函数关系由不同的式子分段表达的函数称为分段函数. 分段函数是微积分中常见的一种函数. 例如在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示成

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}.$$

例 3　设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ 2 & x=0\\ 3x & x<0\end{cases}.$$

当 x 取 $(0,+\infty)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取 $(-\infty,0)$ 内的值时，y 的值由关系式 $y=3x$ 来计算．例如，$f(3)=3^2+1=10$，$f(-5)=3\cdot(-5)=-15$．

注　分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集．

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x & -4\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<3\\ 5x-1 & x\geqslant 3\end{cases}$，求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(4)$ 及函数的定义域．

解　因为 $-\pi\in[-4,1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；因为 $1\in[1,3)$，所以 $f(1)=1$；因为 $4\in[3,+\infty)$，所以 $f(4)=5\times4-1=19$；函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,+\infty)$.

例 5　用分段函数表示函数 $y=3-|2-x|$，并画出图形.

解　根据绝对值定义可知，当 $x\leqslant 2$ 时，$|2-x|=2-x$；当 $x>2$ 时，$|2-x|=x-2$. 于是有 $f(x)=\begin{cases}3-(2-x) & x\leqslant 2\\ 3-(x-2) & x>2\end{cases}$，即 $y=\begin{cases}1+x & x\leqslant 2\\ 5-x & x>2\end{cases}$．其图形如图 1－2 所示．

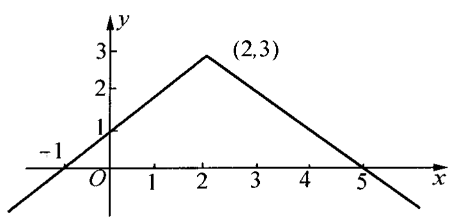

图 1－2

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1－2　设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正数 m，对于所有的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant m$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界的. 如果不存在这样的正数 m，则称 $f(x)$ 在 D 上是无界的．

如图 1－3 所示，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的几何意义是：曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条直线之间．

对于函数的有界性，要注意以下两点：

(1) 当一个函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的. 例如

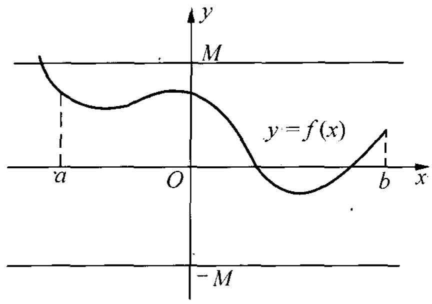

图 1 - 3

$y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，有 $|\sin x| \leqslant 1$，但我们也可以取 $M=2$，即 $|\sin x|<2$ 总是成立的，实际上 M 可以取任何大于 1 的数.

(2) 有界性是依赖于区间的. 如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 内是有界的，但在区间 $(0,1)$ 内则无界.

2. 函数的奇偶性

定义 1 - 3 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对任意的 $x \in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对任意的 $x \in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

由定义可知，对任意的 $x \in D$，必有 $-x \in D$，否则，$f(-x)$ 没有意义，因此函数具有奇偶性时，其定义域必定是关于原点对称的.

偶函数的图像是对称于 y 轴的，如图 1 - 4 所示. 因为 $f(-x)=f(x)$，所以如果点 $P(x,f(x))$ 是曲线上的一个点，则它关于 y 轴的对称点 $Q(-x,f(x))$ 也是曲线上的点.

奇函数的图像是对称于原点的，如图 1 - 5 所示. 因为 $f(-x)=-f(x)$，所以如果点 $P(x,f(x))$ 是曲线上的一个点，则它关于原点的对称点 $Q(-x,-f(x))$ 也是曲线上的点.

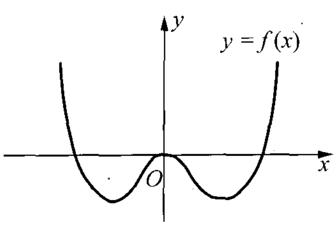

图 1 - 4

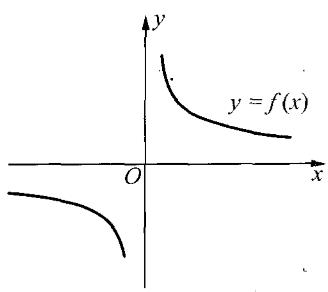

图 1 - 5

例 6 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x^2+\sin x$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^{x}) \quad (a>0, a \neq 1)$.

解 (1) 因为 $f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x \neq f(x)$，同样可以得到 $f(-x) \neq -f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.