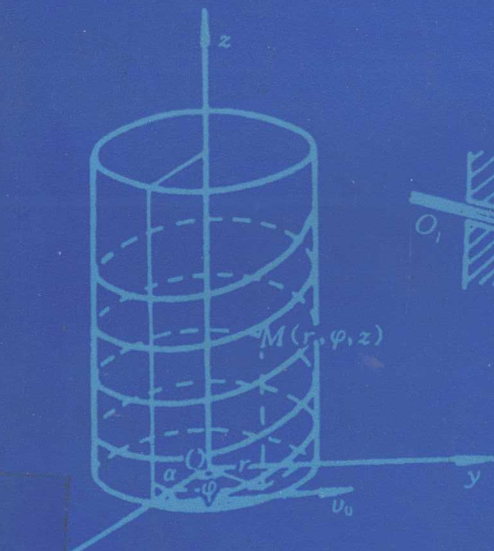
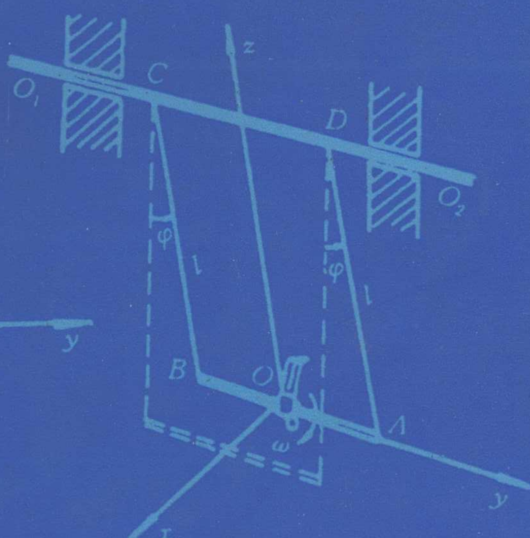
理论力学原理与方法

（牛顿力学部分）

刘焕堂 编著





厦门大学出版社

理论力学原理与方法

（牛顿力学部分）

刘焕堂 编著

厦门大学出版社

[闽]新登字 09 号

理论力学原理与方法

（牛顿力学部分）

厦门大学出版社出版发行
地址：厦门大学　邮编：361005
福建第二新华印刷厂印刷
地址：三明市新市中路 70 号　编邮：365001
*
开本 850×1168　1/32　12 印张　301 千字
1997 年 6 月第 1 版　　1997 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—1000 册
ISBN 7—5615—1273—2/O・77
定价：16.00 元

内 容 提 要

本书系统地介绍了理论力学（牛顿力学部分）的基本原理与基本方法。内容包括：质点运动学、质点动力学、相对运动、质点组动力学、刚体运动学、刚体动力学以及把牛顿力学推向无限——牛顿宇宙学。全书共分七章，书中各章均附有大量典型的例题和充实的习题（并附有答案），不仅便于读者理解、掌握和应用，也易于自学与教学参考。

本书既可供高等院校有关专业理论力学课程的教材使用，也可供有关科研、工程技术人员参考。

前　言

理论力学作为理论物理中“四大力学”（即理论力学、热力学与统计物理、电动力学、量子力学）的基础课程之一，由于它具有承前启后的重要作用，加上近代航天技术的兴起与突飞猛进，对这门古老的学科提出了更高的要求。因此，为了保持其系统性、完整性与科学性，作者十多年来，在厦门大学物理系讲授《理论力学》的教学实践基础上，结合科技的新成就编著了《理论力学原理与方法》（牛顿力学部份）、《分析力学原理与方法》、《连续介质力学原理与方法》等系列教材。本书是其中之一。此套系列教材，力图系统地介绍理论力学的基本原理与基本方法，并想通过大量典型范例的分析，有助于提高读者分析与解决力学问题的能力。同时，在本书的最后一章，把牛顿力学推向无限——牛顿宇宙学作为牛顿力学的终结，使得这门古老学科与当代前沿结合起来。

本书在出版的过程中，得到了厦门大学南强丛书（教材系列）评审出版领导小组、厦门大学物理系的大力支持与资助，同时书稿也得到了厦门大学物理系许乔蓁副教授、数学系董奢副教授的详细审阅，并提出了许多宝贵的意见，刘珩同志对全书的插图进行精心的绘制，作者借此机会一一表示衷心的感谢。

由于水平有限，时间匆忙，书中难免有缺点与错误，欢迎读者批评指正。

刘焕堂

1996 年 12 月于厦门大学物理系

目　录

绪 论

一、力学的研究对象和方法

力学是研究物体机械运动规律的科学。大家知道，运动从最广泛的意义上来说，它包含了宇宙间的一切变化和过程。它不仅包括了物体的空间位形（位置与形状）随时间的变化，而且还包含了物体的物理变化、化学变化与生物变化，乃至于人类的知觉和思维等等。而机械运动则是自然界最普遍、最基本的运动形态。因为机械运动是指物体的空间位形随时间的变化。

由于实际的研究对象往往是非常复杂的，因此我们在力学的研究中，通常利用虚构的理想模型——力学模型，来创立一个实际物体运动的近似理论。即通过对客观事物现象的观察、实验和实践，抓住那些对力学现象起主要作用的某些性质，而撇开那些影响不大的次要作用的性质，从而提炼出力学模型作为我们研究的对象——客观实体。如当物体运动的范围比它本身的尺寸要大得多时，我们就把此物体当作是只有质量而没有大小的一个“质点”。又如当物体在受到外力作用下变形是非常小时，我们就把此物体当作不变形的“刚体”。因此，“质点”与“刚体”这都是两种理想的力学模型。当然，除此之外，还有“质点系”模型以及“连续体”模型等。也正因为我们采用了上述抽象化的方法，人们就可以把历代人类从直接观察或在生产活动中所获得的无数经验加以概括、综合，进而归纳为一些基本假设与原理。然后再从这些基本假设与原理出发，通过严密的数学推导和逻辑运算，从而得出某些带根本性的理论结果。因此，我们可以从这些理论结果更方便地去研究所有的实际问题。当然，这些理论是否正确，应

该通过实践这个检验真理的唯一标准去检验。

二、力学的分类与适用范围

力学就其原理划分，有以牛顿定律为基础的经典力学——牛顿力学，它只能适用于宏观物体的低速运动；以相对性原理和真空中的光速与光源运动速度无关的两个基本假设为基础的相对论力学，它适用于速度很高（接近于光速）的物体的运动；以量子论、薛定谔方程和狄拉克方程为基础的量子力学，适用于坐标 x 及相应的动量 p_x 不能同时准确地测定（即测不准关系）的微观粒子的运动。而牛顿力学就其研究对象来划分，则有质点力学、刚体力学、连续介质力学。就其研究观点来划分，有运动学、动力学、静力学。本书只着重介绍动力学，至于平衡问题的静力学只作为动力学的特例来处理。而连续介质力学，由于篇幅的关系，本书也不加以讨论。

三、力学的发展简史

力学是历史最古老的学科之一，它的产生与发展始终是和人类生产活动密切相联系的。

力学在我国的产生是很早的。远在黄帝时代（距今约4600年），人们就开始制造耕作器械、车船以及房屋的修建。世界上最早关于力学的论述应该算是我国春秋战国时代伟大的科学家墨翟（公元前468—382）。在他及其学派的著作《墨经》里，就有了关于力、重心等概念的叙述。同时代的我国伟大工程师鲁班，在机械制造和建筑结构上的伟大成就，也是举世闻名的。在墨子以后的两千多年中，我国也有很多的科学家和工程师，在力学的应用方面做出了卓越的贡献。其中比较突出的有：秦李冰父子修造都江堰；汉张衡制造地震仪；三国时代的马钧造指南车与水车；南北朝时代的祖冲之造千里船和水碓磨；隋朝李春等设计与建造大跨度（37公尺）的石拱桥——安济桥（即赵州桥）；北宋时代的唐福就利用了火药制造了火药式火箭；元朝郭守敬在水利工程和仪

器制造上又有极大的成就；明朝王征制虹吸和自行车并著诸器图说；徐光启造天文仪器；宋应星著天工开物；……，这一切均说明我国是世界上的文明古国，对人类历史的发展曾做出了巨大的贡献。

同样，力学在西方国家的发展也是较早的。如古埃及金字塔的建造过程中就会利用杠杆、滑车和斜面；希腊的阿基米德（Archimedes 公元前 287—212 年）建立的杠杆平衡学说，奠定了静力学的基础。由于 15 世纪后半叶，欧洲的商业资本开始发达，生产力迅速发展，向一切科学提出了很多亟待解决的问题，于是，力学与其他学科一样，得到空前的发展。意大利的伽利略（Galileo 公元 1564—1642 年），他利用实验和演绎的方法，研究了动力学问题。他不仅提出了落体在真空中运动的规律与惯性定律，还引入了加速度的概念，从而奠定了动力学的基础。英国的牛顿（Newton，公元 1642—1727 年），不仅在前人工作的基础上发表了著名的三大运动定律，而且他与莱布尼茨（Leibniz 公元 1646—1716 年）同时创立了微积分学，并利用它去研究力学规律，终于在 1687 年完成了巨著《自然哲学之数学原理》，从而奠定了经典力学的基础——牛顿力学。继牛顿之后，欧勒（Euler 公元 1707—1783 年）提出了质点和刚体的一般微分方程；法国的达朗伯（Da'lembert 公元 1717—1783 年）贡献了有名的达朗伯原理；拉格朗日（Lagrange 公元 1736—1813 年）引进了广义坐标的概念，通过一个机械系统，推导出拉格朗日形式的动力学方程，从而形成了拉格朗日力学，并于 1788 年完成了他的巨著《分析力学》；哈密顿（Hamilton 公元 1805—1865 年）于 1834 年引入了广义动量的概念，建立起哈密顿形式的动力学方程——正则方程，同时他又提出了著名的哈密顿原理，从而形成了哈密顿力学。在以拉格朗日力学与哈密顿力学为核心的分析力学的创立与发展过程中，曾经有过贡献的还有：拉普拉斯（Laplace）、富立叶（Fourier）、高

斯（Gauss）、泊松（Poisson）、雅可俾（Jacobi）、阿佩尔（Appell）、莫培督（Maupertuis）、赫姆霍兹（Helmholtz）、赫芝（Hertz）等科学家。所有这些贡献使得经典力学从牛顿力学阶段向分析力学阶段发展。当然，20 世纪相对论力学和量子力学的相继创立，使力学的发展又向前迈进一大步，特别是 20 世纪 50 年代末以来，由于人造地球卫星、火箭和宇宙航行等先进科学技术的迅速发展对力学提出了许多新的课题，从而推动了现代力学的飞跃的发展。

第一章　质点运动学

§1—1　质点的运动学方程与轨道

所谓质点运动学是从几何的角度来研究质点的空间位置随时间变化的规律。因此，我们称质点的空间位置随时间变化的规律为质点运动学方程。称质点在空间中所描绘出来的轨迹为质点的运动轨道。若质点运动的轨道是一条直线时，则称这种运动为直线运动；若质点运动的轨道是一条曲线时，则称这种运动为曲线运动。

一、坐标系

大家知道，物体的位置只能是相对地确定。因此，要确定一个物体的空间位置，必须找到一个参考的物体（即参考体）。一旦参考体确定之后，我们就可以在它上面适当选取某种坐标系，抽象地代替该参考体以及来描述物体的空间位置。常用的坐标系有：直角坐标系；柱面坐标系；球面坐标系；自然坐标系等。当然，在平面问题中，还有平面极坐标系等。至于选取何种坐标系，那要看解决具体问题的方便而定。

二、质点的运动学方程与轨道

下面我们来研究一下运动的质点 M 在 $Oxyz$ 直角坐标系下的情况：

若以矢径 $\boldsymbol{r}$ 来表示运动质点 M 的位置时，那么称 $\boldsymbol{r}$ 为运动质点 M 的位置矢径（简称位矢），如图 1.1 所示。显然，位矢 $\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.1}$$

称方程(1.1)式为运动质点 M 的运动学矢量方程。

由于 $\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ (1.2)

式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴、y 轴、z 轴上的单位矢量。

故得 $$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

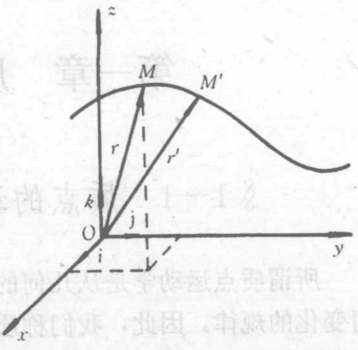


图 1.1

称方程(1.3)式为运动质点 M 的运动学分量方程。

由方程(1.3)式可知，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的位置随质点 M 的运动而变化，它的端点的轨迹就是质点 M 的运动轨道。因此，方程(1.3)式实际上是以时间 t 为参数的质点 M 的轨道参数方程。因为只要把时间 t 视为中间参数，在方程(1.3)中联立消去，即可得出质点 M 的坐标分量之间的关系式——轨道方程。下面我们举一个简单的例子来加以说明。

例：设已知质点的运动方程（即它的运动规律）为

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t & (1) \\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases}$$

试求质点的轨道。

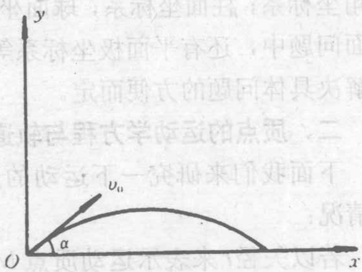


图 1.2

解：化(1)式得

$$t=\frac{x}{v_0\cos\alpha} \quad (3)$$

把(3)式代入(2)式并经整理得 $y = x\mathrm{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0{}^2\cos^2\alpha}$

上式表示质点的轨道是经过原点的抛物线方程。

至于平面极坐标系、柱面坐标系、自然坐标系的情况，我们将在下一节进一步介绍。

§1—2 速度和加速度以及它们在各种常用坐标轴上的分量

一、速度和加速度

1. 速度

现在我们来研究一下质点 M 作曲线运动的情况，如图 1.3 所示。设 t 时刻质点 M 的位矢为 $\boldsymbol{r}$ (t)，$t+\Delta t$ 时刻质点就运动到 M′，其位矢为 $\boldsymbol{r}'$ $(t+\Delta t)$。于是，质点 M 的位移为

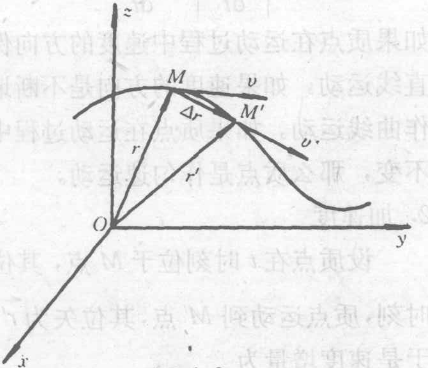


图 1.3

$$\boldsymbol{MM}' = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r}$$

因此，在 Δt 时间间隔里，质点的平均速度为

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.4}$$

由于时间间隔的大小取得不同，那么得到的质点的平均速度（大小和方向）也就不同。因而平均速度就不能精确地描述质点位置的变化。为此我们令 $\Delta t \to 0$，即考虑 M′ 趋于 M 时的平均速度的极限

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.5}$$

作为描述质点在 t 时刻的运动状态的特征量。并称$\boldsymbol{v}$为质点 M 在 t 时刻的瞬时速度（简称速度）。于是，速度（即位矢$\boldsymbol{r}$端点 M 的速度）是位矢$\boldsymbol{r}$对时间 t 的一阶导数。它是一个矢量，既有大小又有方向。由于当 $\Delta t\to 0$ 时，矢量$\Delta \boldsymbol{r}$的极限方向和轨道的切线方向一致，并朝运动的方向，所以在某一瞬时质点的速度$\boldsymbol{v}$的方向是沿运动的轨道的切线方向。同时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$（$ds$ 是轨道的弧元），因此速度$\boldsymbol{v}$的大小（即模数或速率）又可表示为

$$v=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot{s} \tag{1.6}$$

如果质点在运动过程中速度的方向保持不变，那么此质点就是作直线运动。如果速度的方向是不断地在改变，那么此质点就是在作曲线运动。如果质点在运动过程中速度的大小（即速率）保持不变，那么质点是作匀速运动。

2. 加速度

设质点在 t 时刻位于 M 点，其位矢为$\boldsymbol{r}(t)$、速度为$\boldsymbol{v}(t)$；$t+\Delta t$ 时刻，质点运动到 M' 点，其位矢为 $\boldsymbol{r}'(t+\Delta t)$、速度为 $\boldsymbol{v}'(t+\Delta t)$，于是速度增量为

$$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$$

因此，在 Δt 时间间隔里，质点的平均加速度为

$$\boldsymbol{a}^{*}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1.7}$$

由于时间间隔的大小取得不同，那么得到的质点的平均加速度（大小和方向）也就不同。因而平均加速度不能准确地描述质点的真实运动状态。为此，我们令 $\Delta t\to 0$，即考虑 M' 趋于 M 时的平均加速度的极限

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{1.8}$$

作为描述质点在 t 时刻的运动状态的另一个特征量，并称a为质点 M 在 t 时刻的瞬时加速度（简称加速度）。于是，加速度是速度对时间的一阶导数，或是位矢对时间的二阶导数。同样，加速度也是一个矢量，既有大小又有方向。从图 1.4 中可清楚地看出加速度的方向总是朝着质点运动轨道凹的方向。

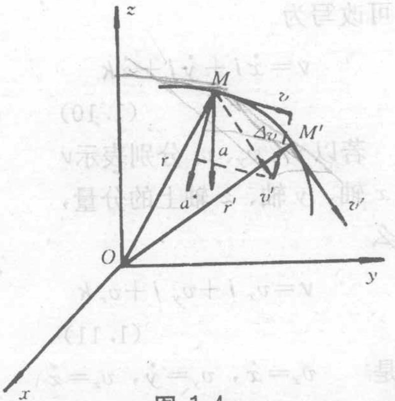


图 1.4

3. 运动学的两类基本问题

(i) 已知质点的运动学方程，求其速度与加速度。求解过程是微分过程，其解是唯一的。

(ii) 已知质点的速度或加速度，求其运动学方程或轨道。求解过程是积分过程，若加上初始条件，其解也是唯一的。

二、速度与加速度在各种常用坐标轴上的分量

1. 在直角坐标轴上的分量

(i) 速度在直角坐标轴上的分量　若设质点 M 在其运动轨道 C 上的位矢为$\boldsymbol{r}$，速度为$\boldsymbol{v}$，那么由于

$$\boldsymbol{r}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}$$

并根据速度的定义得：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\,\boldsymbol{i}+\dot{y}\,\boldsymbol{j}+\dot{z}\,\boldsymbol{k}+x\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}+y\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}+z\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

由于i、j、k分别为x轴、y轴、z轴上的常单位矢量（即方向始终不变的单位矢量），故（1.9）式可改写为

$$v=\dot{x}\,i+\dot{y}\,j+\dot{z}\,k \tag{1.10}$$

若以v_x、v_y、v_z分别表示v在x轴、y轴、z轴上的分量，那么

$$v=v_x\,i+v_y\,j+v_z\,k \tag{1.11}$$

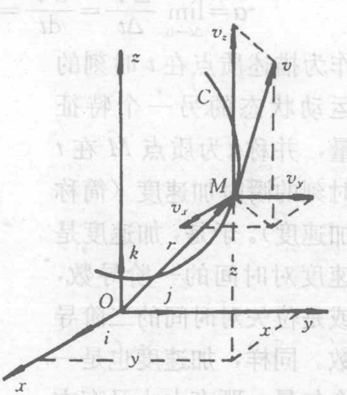


图 1.5

于是 $v_x=\dot{x}$，$v_y=\dot{y}$，$v_z=\dot{z}$ （1.12）

因此，质点的速度在固定直角坐标系任一坐标轴上的分量等于质点在该轴上的坐标对时间的一阶导数。总之，速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} \tag{1.13}$$

其方向由方向余弦

$$\cos(v,i)=\frac{v_x}{v}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$

$$\cos(v,j)=\frac{v_y}{v}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \tag{1.14}$$

$$\cos(v,k)=\frac{v_z}{v}=\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$

给出。

（ii）加速度在直角坐标轴上的分量

根据（1.8）式与（1.10）式得质点的加速度为