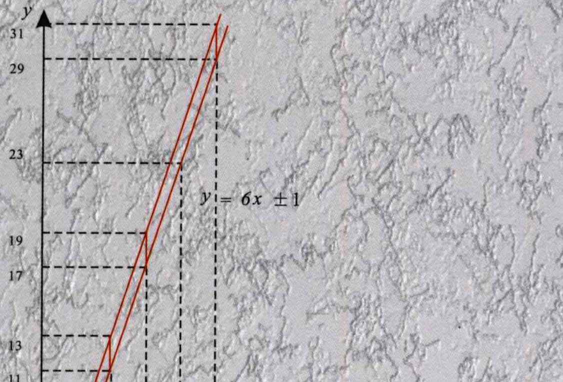
破解素数奥秘

——哥德巴赫猜想原题的证明

宋树魁　宋　昊　编著



西北工業大學出版社

破解素数奥秘

——哥德巴赫猜想原题的证明

宋树魁　宋　昊　编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书主要介绍了素数的历史，当今素数领域中未解难题，怎样研究素数，素数研究新发现与新成果，素数奥秘与哥德巴赫猜想原题的关系，哥德巴赫猜想原题证明，素数的应用等。附录为当今世界素数研究与猜想证明论著选录，分别收录了4篇国内学者在素数和哥德巴赫猜想方面研究的部分成果。

本书可供数学研究人员和数学爱好者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

破解素数奥秘：哥德巴赫猜想原题的证明/宋树魁，宋昊编著.
—西安：西北工业大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-5612-2412-0

Ⅰ.破… Ⅱ.①宋…②宋… Ⅲ.素数—普及读者 Ⅳ.0156.2-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第093394号

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路127号 **邮编：** 710072
电　　话： (029)88493844 88491757
网　　址： www.nwpup.com
印 刷 者： 陕西丰源印务有限公司
开　　本： 850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张： 5.375
字　　数： 129千字
版　　次： 2008年7月第1版 2008年7月第1次印刷
定　　价： 15.00元

前　言

数论是最古老的数学分支，也是数学基础研究的重要组成部分。历史上遗留下来的素数难题和哥德巴赫猜想一直是数论研究的重要问题之一，对于它们的研究可以极大地推动整个数论的发展。数学研究人员为之付出了巨大努力和艰苦劳动，促进了数论的发展，并取得了一些重要结果，但对于素数分布规律等重要问题并没有取得实质性的突破。在了解素数历史和研究现状的情况下，我们对各种素数研究方法作了系统的分析，采用新方法进行研究，经过多年的努力获得了一些结果。为了能让更多的数学爱好者了解我们所用的新方法，得到的新结果，特成此书。

本书是在我们对前人所采用的各种研究方法学习后，进行了系统分析而得到的成果。打破在自然数中研究素数的格局，开创了一个“在奇数中研究奇素数”的新方法，发现了素数分布规律，破解了一系列素数难题，并在此基础上又用新方法证明了哥德巴赫猜想原题，这些结果都与素数表中实际存在的情况相吻合。附录节选了一些有代表性的关于素数研究和哥德巴赫猜想证明的论著，为的是使读者可以从中了解历史上一些著名数学家的研究方法与结果。

没有前辈数学家们的顽强拼搏，为之奋斗终生，就不会有后来人的创新成果问世，是这些从未谋面的老师为我们开启了通向成功的大门，在此表示深深的谢意。

在原国家科委领导的大力支持下，我们于 1998 年出版了《素

数与哥德巴赫猜想(1,1)题解》,之后得到了许多院士、教授的热情帮助和指导,为我们改进和完善本书提供了极大的支持,在此,特向他们表示真挚的感谢。最后,更要感谢西北工业大学出版社的同志,是他们为此书的编辑出版做了大量的工作才使本书面世。

本书可供数学研究人员和数学爱好者阅读参考。

由于作者水平有限,书中疏漏和不妥之处恳请读者指正。

编著者

2007 年 12 月

目　录

第一章 素数与哥德巴赫猜想

一、素数的历史

素数这个概念，早在公元前就为人们所熟知。后来人们发现所有自然数都是由素数相乘得到的。欧几里德证明了素数有无限多个，因此，任意大的素数都存在。可是，在自然数的序列 1，2，3，4，…中，素数与合数混杂在一起，对前数千个素数的分布情况进行研究，发现素数的分布没有规则，因此鉴别一个自然数是素数还是合数就成为问题。这个问题在中世纪就引起了人们的注意。当时人们试图寻找素数规律与公式，到高斯时代基本上确认了准确的素数公式是不存在的。高斯发现了一个近似公式。在那时，即使对一个 10 位的整数来作素性判别都是相当困难的，因此，高斯认定素性判别是数论中最困难的问题之一。此后，这个问题吸引了大批数学研究人员，当时人们没有计算机这个有力的工具，对一般 10 位以上的数都束手无策。所以，他们只对特殊的数作了些研究，或者只对素数判别作了一般性的讨论。而真正要使用得出的结论去判断一个大数是否是素数时，常常因为计算量太大而归于失败。20 世纪初，手摇计算机的产生帮助了数学研究人员对素性的判别工作。1950 年后，电子计算机的诞生有力支持了数学研究人员的素性判别工作，创造出了许多新方法，取得了很多好成果。虽然有了许多素性判别方法，但对某一具体数来说最有效的方法还是最古老的试除判别法。当今素数表也是用试除判别法制作的。

大约在 2 500 年前，我国古代数学家就发现了 2^2-2 是 2 的倍数，2^3-2 是 3 的倍数，2^5-2 是 5 的倍数，2^7-2 是 7 的倍数，2^{11}

-2 是 11 的倍数，而 2,3,5,7,11 都是素数，所以古人由此肯定“若 2^n-2 是 n 的倍数(即 $2^n\equiv 2(\bmod n)$)，则 n 是素数”。莱布尼兹研究了《易经》中的这一记载后，也相信了这个结论，然而，这个结论却是不正确的。1819 年，法国数学家赛路斯指出，$2^{341}\equiv 2(\bmod 341)$时，341 就不是素数，而 $341=11\times 31$ 是个合数。虽然用这个结论进行素性判别出错的概率很小，例如在 $n<2\times 1\ 010$ 的范围内，出错的概率小于 $19\ 865/(882\ 206\ 716+19\ 865)\approx 0.000\ 002\ 5$。不过，这样的结果在进行素性判别时却用处不大。

在 16 至 17 世纪时，欧洲数学研究人员对素数开始了大量研究，涌现出许多数论学者，如高斯、费尔玛(Fermat)、默森尼(Mersenne)等。他们研究的素数难题直至 20 世纪末也没有得到解决。

20 世纪 70 年代，查基尔(Don Zagier)作出了最完善的素数表，根据这个素数表得出了素数分布的有关情况：

1～100 中间有 25 个素数；

1～1 000 中间有 168 个素数；

1 000～2 000 中间有 135 个素数；

2 000～3 000 中间有 127 个素数；

3 000～4 000 中间有 120 个素数；

4 000～5 000 中间有 119 个素数；

5 000～10 000 中间有 560 个素数。

前人用大量的时间验证了素数客观存在情况，发现了许多素数特性、最大的素数和一些素数判断方法。

从素数的分布情况看，越往上越稀少。到目前为止所知道的最大素数是 $2^{19\ 937}-1$。

关于素数的分布有许多问题需要解决，首先应解决的问题是素数的个数问题。

在数论中常用 $\pi(x)$ 表示不大于 x 的素数的个数，即，$\pi(3)=$

2, $\pi(100)=25$, $\pi(1\ 000)=168$。

数学家们把几个不很大的 x 里的 $\pi(x)$, $\frac{x}{\log x}$ 和它们的比值列表如表 1.1 所示。

表 1.1　素数个数的几种比值对照表

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$	$\frac{\pi(x)}{x/\log x}$	$\frac{\pi(x)}{x}$
10	4	4		
100	25	22		
1 000	168	144.764	1.160 5	0.168 0
2 000	303	263.126	1.151 5	0.151 5
5 000	669	587.047	1.139 6	0.133 8
10 000	1 229	1 085.72	1.131 9	0.122 9
50 000	5 133	4 621.166	1.110 7	0.102 66
100 000	9 592	8 685.889	1.104 3	0.095 92

表 1.1 说明：① 素数有无限个；② 当 x 越大时，$\pi(x)$ 与 $\frac{x}{\log x}$ 的比值越接近 1；③ 当 x 越大时，$\pi(x)$ 与 x 的比值越接近于 0。阿达玛(Hadamard) 和德·拉·瓦莱·普森(De la Vall'ee Poussin) 分别独立地在 1896 年证明了素数定理，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1$。

默森尼曾经研究过形式为 2^p-1 的素数，其中 p 代表素数，1644 年他证明了 $p=2,3,5,7,13,17,19,31,127$ 时，2^p-1 是素数，由于默森尼在这个问题上的贡献，人们把形式为 2^p-1 的素数叫默森尼数。

费尔玛数记为 $F_n=2^{2^n}+1$，最前面的 5 个费尔玛数是 3, 5, 17, 257, 65 537。由于这 5 个数都是素数，所以费尔玛认为 n 大于 0

时 F_n 都是素数，但这并不正确，至今费尔玛数只有5 个。

素数研究中除寻找素数外，还致力于发现素数的分布规律问题，寻找素数分布方程。数百年来，人们从验证的角度发现了一些经验方程，它们是 $y = 4m + 3 \quad (m = 0,1,2,3,\cdots)$；$y = 6m + 5 \quad (m = 0,1,2,3,\cdots)$。

二次型有：

$y = an^2 + bn + c$

$y = n^2 - n + 17 \quad (0 \leqslant n \leqslant 16)$

$y = n^2 - n + 41 \quad (0 \leqslant n \leqslant 40)$

$y = n^2 - n + 72\,491 \quad (0 \leqslant n \leqslant 11\,000)$

但是这些经验方程所包含的素数极少。

还有许多数学家在研究素数时利用了解析方法，也取得了许多成果，为数论学科做出了巨大贡献。虽然如此，但最关键性的素数分布规律还是没有发现，许多其他素数难题至今还没解决，其中就包括著名的哥德巴赫猜想一题。

1981 年 2 月，中国科学出版社出版了“纯粹数学与应用数学专著第 7 号”——《哥德巴赫猜想》，该书的主编是著名数学家华罗庚，副主编有齐民友、江泽涵、吴文俊、吴大任、苏步青、柯召等著名数学家，作者是数学家潘承洞、潘承彪。这是一部关于世界 23 道数学难题之一的哥德巴赫猜想问题研究最权威的专著。书中详细介绍了哥德巴赫猜想问题的出现，发展进程，并对 200 多年来出现的各种证明方法、所得结果的优缺点以及主要人物的功绩给予了公正客观的评价，也对猜想研究未来发展做出了期望。

书中写到，1742 年德国数学家哥德巴赫(Goldbach)在和他的好朋友数学家欧拉(Euler)的几次通信中提出了关于正整数和素数之间关系的两个推测，即

(A)每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和；

(B)每一个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和。

这就是著名的哥德巴赫猜想问题。(A)被称为关于偶数的哥德巴赫猜想,(B)被称为关于奇数的哥德巴赫猜想。

由于 $2n+1=2(n-1)+3$,所以,从猜想 A 的正确性就立即推出猜想 B 亦是正确的。

1937 年苏联数学家 И. М. Виноградов 证明了(B)命题,所以,现在说到哥德巴赫猜想时总是只指猜想(A)命题,即关于偶数的哥德巴赫猜想(以下简称为猜想原题)。

1742 年 6 月 30 日欧拉在给哥德巴赫的信中写道:“我认为这是一个肯定的定理,尽管我还不能证明出来”。猜想原题提出至今已有 260 多年了,可是数学家们还不能肯定它的真伪。由于猜想原题本身具有极其简单明确的形式和貌似平凡的外衣,吸引了许多数学工作者和爱好者,特别引起了许多著名数学家的注意和兴趣,他们为此付出了艰苦的努力。

1900 年第二届国际数学大会在巴黎召开,德国数学家希尔伯特(D. Hilbert)在会上发表了著名演说,提出了 23 个他认为是最重要的没有解决的数学问题。哥德巴赫猜想就是其中第八个问题的一部分。


希尔伯特

哥德巴赫猜想提出之后的 100 多年里,猜想的研究并未取得重要进展,在此时间里几乎所有数学家都研究过此题,但数学研究人员还想不出如何着手来对猜想进行哪怕是有条件的极初步的有意义的探讨,从而使得猜想变得更加著名而为世人皆知。

上述情况一直延续到 1920 年,当时数学研究人员普遍认为要想解决猜想 A 实在太困难了,人们设想能否先来证明每一个充分大的偶数是两个素因子个数不多的乘积之和,由此通过逐步减少

素因子的个数的办法来寻求一条解决猜想(A)的道路。于是提出一个与猜想(A)相近似的新命题,即“每一个充分大的偶数是一个不超过 a 个素数的乘积与一个不超过 b 个素数的乘积之和”。虽然此命题与猜想原题题意不同,但如果能证明到命题(1,1)也就基本上解决了猜想原题。

挪威数学家布朗(Brun)改进了古老筛法,于 1920 年首先证明了该命题的自命题(9,9)的结果(所以这里称此命题为布朗命题),从此开始了一个布朗系列自命题的新时期。直至 1976 年陈景润的(1,2),在这中间还有许多这种命题的结果,如(7,7),(6,6),(5,5),(5,7),(4,4)和王元的(2,3),等等。

就布朗筛法自命题的证明结果而言,从《哥德巴赫猜想》中可以看到它们都存在如下缺点:①证明的题目都不是猜想原题,都是自己随意决定的命题,但是在宣传上却一直说是猜想成果,这是不正确的。②“这些结果中,都有一个共同的弱点,就是数学家们都不能肯定两个数中至少有一个为素数”。③所证结果中的素数个数都是最佳估值,根本无法确定出某一个具体的素数,只能笼统地假设某几个素数与某几个素数;④布朗筛法根本证明不出他的命题最终结果,在《哥德巴赫猜想》书中第 238 页里早已明确指出:“显然,利用陈景润的加权筛法不可能证明命题(1,1)……”。这一结论宣告了布朗筛法的结束。布朗筛法进行了 70 多年,最终没有达到预想的目的,但它对数论的发展作出了很大的贡献,同时它从侧面也提示人们在科学研究中应该注意到什么,那就是在科研中所采用的方法不能过于单一化和如同马拉松式的接力赛。在科研中一旦某种方法受阻就应寻找新的出路,不能僵化。数学的研究是缓慢的,如果像筛法这样来研究工程项目,其后果就可想而知了。

《哥德巴赫猜想》在引言中还明确写到:“陈景润的贡献,就方法上来说,在于他提出并实现了一种新的加权筛法”。

书中还介绍了一些密率成果,但所证之题也不是猜想原题,命

题与筛法命题相似。除此之外还介绍了其他几种研究猜想的方法。

引言中最后部分提到了著名的孪生素数问题，同时也指出了今后研究猜想的方向："从目前来看，我们认为猜想的最原始，最简单的形式也是最重要的。"

从其他素数文献中我们看到素数领域中还有许多难题没有解决，这些难题也一直困扰着数学家们达数百年之久。

猜想难题也是素数难题之一，这些难题之间就没有什么内在联系吗？

面对此种情况我们认为：要想研究猜想难题，应清楚地看到它与周边的素数难题和数论理论之间不可分割的关系。

首先必须从素数全局出发统筹考虑，以利发现它们的内在联系。同时还应从基础理论着手一步一步地查找数论中各种理论的情况是否存在某种不完善的地方，从中发现问题。深入了解数论中各种理论是否完善是十分必要的，这对研究素数领域中的许多难题有着至关重要的作用，如果某个环节出现问题就会影响着全局研究的成败。破解素数领域这些难题必须采用从全局情况出发系统地深入分析研究，才有可能从中发现规律以求突破。综上分析，我们首先从素数定义开始，不放过任一微小环节的理论概念，查找漏洞，堵塞漏洞，最后达到解决难题的目的。在此工作中，我们确实发现了许多不完善之处。例如：关于"1"的素数性质问题。素数的定义为：一个自然数如果只能被 1 和它自己整除而不能被别的自然数整除，这个数就叫素数。但是，在各种数论专著中"1"却不是素数，这是为什么？除此之外还有很多。因此，只有深入地研究清楚数论中每一个最基本的概念和理论，才能把素数研究好，这是破解素数众多难题的重要环节，这也是素数难题研究中非常重要的组成部分。

数学是自然科学中最基本的学科，是人类文明的一个重要组

成部分，与其他文化一样，数学也是几千年人类智慧的结晶。数学是一门积累性很强的学科，它的许多重要理论都是在继承和发展原有理论的基础上发展起来的。对数学来讲，“数”是数学中最基本的元素，所以，数的研究是数学中最基础的研究。初等数论是研究整数最基本的性质，是一门十分重要的数学基础课，它不仅是中、高等师范院校数学的必修课，而且也是计算机科学等相关专业必修的课程。初等数论初看起来似乎很简单但真正学好它并不容易，尤其是习题不好做(潘承洞、潘承彪著《初等数论》序)。

数最先是从自然数发展起来的，慢慢地细分出了奇数与偶数、合数与素数的。随着人类的发展，数学在不断进步，人类对偶数的性质、奇数的性质都有了全面、深刻的了解，并掌握了它们的各种规律；唯独素数问题千百年来虽然经过长期巨大努力，至今还是没有完全攻克它，并留下了许多奥秘与难题。

这些未解难题为素数研究蒙上了一层神秘的面纱，也给数学研究人员和数学爱好者们留下了为之奋斗的空间。可以说，数学历史上遗留下来最多的难题是素数难题。历史上多数数学研究人员都研究过素数难题，其中著名的数学家有欧拉、高斯、费尔玛、默森尼、莱布尼兹、契比雪夫、哥德巴赫、布朗以及华罗庚、潘承洞、潘承彪、王尼、陈景润等等。

数学是各种科学的基础，是逻辑性极强的学科，所以研究数学就更需要优良的方法。如果采用了正确的方法就可能获得事半功倍的效果。从努力钻研、运算技能技巧和研究方法与策略三方面来看，后者是最重要的，如果找到正确的先进方法就能用最少的时间取得最多的成果。

前人的方法是应该认真学习的，但也需要在实践中辨别其优劣，以利在前人的基础上进一步提高和改进，在今后研究中取得更新、更好的成果。盲目地百年不变地照搬前人的方法去研究同一难题是不可取的，有时会造成重大失误，应该引以为戒。

潘承洞、潘承彪两位数学家所著《哥德巴赫猜想》一书对古今素数研究的各种方法和所得结果给予了全面客观的总结和评价。此书是当今世界上最权威的素数研究文献，所用参考文献多达147个，书中特别详尽介绍了猜想问题的历史状况，提出的时间、人物、进展情况和它的难度以及此题在数学基础研究中的重大意义。它让人们清楚地看到：①哥德巴赫猜想原题是什么？其研究处于什么状态？②布朗命题是什么？它所获结果的真实性和最终结局情况又是如何？③两个命题的题意的差别在哪里？同时书中又提出，希望有人能寻找出新的方法来证明猜想原题，最终撷取这一世界数学皇冠上的明珠。

二、当今素数领域中未解难题

数学家们在素数研究上虽然付出了巨大努力并取得了一些成果，但许多素数中最关键的规律和特性研究还是没有得到突破，从整体上分析素数分布规律和素数分布方程是最重要的突破口。这是证明素数领域难题的关键，也是至今素数史上还遗留下许多著名未解难题的主要原因。

这些著名难题是：

(1)素数分布规律和分布方程问题；

(2)有无精度更高的素数个数公式问题；

(3)孪生素数奥秘问题；

(4)三素数、四素数问题；

(5)素数不等式问题；

(6)素数之间间距大小问题；

(7)最著名的世界23道数学难题中最难的哥德巴赫猜想问题。

这些难题从有文献资料记载以来有的已达千年，哥德巴赫猜想也有260多年。

其中,素数分布规律和孪生素数奥秘问题是非常有趣的问题,它吸引了大批数学家和爱好者。历史上数学家们在研究素数时发现:素数中往往有两个素数连续出现其差为2的现象很多,如:3,5;5,7;11,13;17,19;101,103;107,109;等等,这些两两一组的素数是怎样形成的呢?千百年来数学家们都力图破解它,至今也未获得重大突破。

数学家们除了寻找素数规律等问题外,还有最著名的世界数学难题之冠——哥德巴赫猜想原题的证明——也遇到了巨大阻力。现在数学家们认为:哥德巴赫猜想是3道世界数学难题中最难的一题。

进入20世纪以来数学界普遍认为对23道世界数学难题的研究成果可以衡量一个国家数学研究水平,如有一小部分的推进都被认为是对数学发展的巨大贡献。

三、素数的研究方法

素数规律是不以人们意志为转移的客观存在的事实,要想发现它的规律就得以实际情况为基础进行全面深入的研究,找出它的最突出的特点才是最有效的方法,除此没有第二条道路可走。

从各种文献中看到:数学研究人员研究素数全部是在自然数中进行的。在直角坐标系中所作出的素数图像都是折线,根本没有发现什么规律性。

千百年过去了,人们在素数难题面前仍是停滞不前。如果我们能冷静地想一想:为什么会出现这种现象?是什么原因造成的?就可以发现:数学家们在研究素数时思维方法是不科学的,没有真正地面对素数客观存在的事实。从钻研精神、运算技巧、研究方法三个方面看,古今数学家和爱好者十分重视前两项,对后一项却重视不够,没有找到最有效的方法。分析其原因,这是没有很好地利用唯物辩证法这一有力武器造成的。如果对某一重大课题不深入