全国高等农林院校“十一五”规划教材

经济数学

郭正光　王万雄　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

经 济 数 学

郭正光　王万雄　主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学/郭正光，王万雄主编．—北京：中国农业出版社，2007.8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11848-5

Ⅰ．经…　Ⅱ．①郭…②王…　Ⅲ．经济数学-高等学校-教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 107193 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

责任编辑　朱　雷　吕心鹏

中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：820mm×1080mm 1/16　　印张：25.25

字数：600 千字

定价：35.00 元

内 容 提 要

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材.

本教材共十一章，包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何初步、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程以及数学实验等内容，各章中增加了高等数学在经济管理中的有关应用问题. 书后附有各章节习题及综合练习题的参考答案和积分表. 本教材内容由浅入深，叙述详细，主次分明，通俗易懂. 便于教学，也便于自学；例题选取难易适度，并且有助于加深对基本概念的理解和计算方法的掌握；强调数学方法与其他学科，尤其是经济学的相互联系，增强应用数学方法的意识，为后继课程的学习打好数学基础.

各章节中打有“*”号的内容可作为选学内容或供学有余力的学生提高使用.

本教材既可作为高等农林院校经济管理类本、专科（高职）的高等数学课程教材，也可作为其他院校经济管理类专业和各类成人教育相应课程的教材，还可作为经济管理科技人员的参考书.

编写人员名单

主　编	郭正光	王万雄		
副主编	汪德洪	廖　霞	周裕中	薛自学
参　编	郭正光	王万雄	廖　霞	
	汪德洪	薛自学	周裕中	
	朱艳科	高胜哲	欧增奇	

前　言

本教材是由华南农业大学、甘肃农业大学、西南大学、大连水产学院联合编写的全国高等农林院校“十一五”规划教材，是一部为适应高等农林院校经济管理类专业对微积分学的基本要求而编写的教材．我们希望该教材能够配合高等农林院校经济管理类专业的教学改革，密切数学与专业的相互渗透和融合，为培养学生的数学素质及其应用能力做出应有的贡献．

我们在编写过程中，以面向经济管理类专业和科技发展的需要为原则，舍弃了部分难度较大而应用很少的传统微积分内容，增加了数学建模和经济应用等知识，与以往教材的区别是：本教材增加了数学实验（第十一章）的内容，编者旨在培养和提高学生的数学建模和科学计算的能力．在体系编排上，既注意体现数学课程循序渐进、由浅入深的特点，又尽可能地对体系合理优化安排，避免繁琐复杂的推理证明，逻辑推理及证明尽可能做到适可而止．为了方便对教材中内容的选学和分层次教学，书中标有＊号的内容可以选学，不讲授这部分内容不会影响教材的系统性．在习题的选配方面，各节精选了一些概念性强、方法有代表性、难度适中的练习题．为了改变传统数学教材在许多非数学专业大学生心目中枯燥无味的形象，编写时注重概念与定理的直观描述与背景介绍，强调理论联系实际．为了便于读者阶段性复习，每章末给出了综合练习题．

本书既可以作为高等农林院校经济管理类专业本、专科（高职）的高等数学课程的教材，也可以作为各类成人教育相应课程的教材，还可以作为农林经济管理类科技人员的参考书．

参加本书编写的有郭正光（华南农业大学）、王万雄（甘肃农业大学）、廖霞（西南大学）、汪德洪（大连水产学院）、薛自学（甘肃农业大学）、周裕中（华南农业大学）、朱艳科（华南农业大学）、高胜哲（大连水产学院）、欧增奇（西南大学）．最后由郭正光和王万雄统一定稿．

最后，对上述参编单位表示衷心感谢．

由于作者水平有限，书中错漏之处在所难免，恳请读者特别是使用本教材的教师批评指正，以便使本教材在今后教学实践的基础上更加完善．

编　者

2007年4月

目　录

引　言

一、微积分学思想

经济类高等数学是研究经济领域内数量关系与优化规律的科学，主要包括微分学和积分学，简称微积分. 微积分研究的对象是函数，主要是初等函数，其研究的方法是极限方法.

微积分的产生一般分为三个阶段：极限概念；求积的无限小方法；积分与微分的互逆关系.

从古希腊开始，微积分的萌芽、产生、发展经历了两千多年的探索道路. 我国古代的庄子在《天下篇》中就有"一尺之锤，日取其半，万世不竭"的极限思想. 公元263年，刘徽提出了"割圆术"，用正多边形来逼近圆周，这正是极限思想的成功运用.

微分是通过对曲线作切线问题和求函数的极值问题而产生的. 微分方法的第一个真正值得注意的先驱工作起源于1629年费尔玛陈述的概念，他给出了如何确定极大值和极小值的方法，其后英国剑桥大学的巴罗教授给出了求切线的方法，进一步推动了微分学概念的产生.

积分是由求某些面积、体积和弧长引起的，古希腊数学家阿基米德在《抛物线求积法》中用穷竭法求抛物线弓形的面积是积分学的真正萌芽.

牛顿和莱布尼兹在总结前人的基础上，从不同的背景（运动的和几何的）出发，经过各自独立的研究，建立了微分法和积分法，并洞悉了二者之间的联系，因此，将他们两人并列为微积分的创始人，并且莱布尼兹创造的微分和积分符号一直沿用至今.

微积分的精髓在于：在变化中考察各量之间的关系. 可以说，没有变化就没有微积分.

微积分的产生是数学上的伟大创造，它从生产实践和理论科学的需要中产生，又反过来广泛影响它们的发展.

二、预备知识

1. 集合及其运算

集合是数学中的一个基本概念，一个班的全体学生构成一个集合，全体整数构成一个集合等. 一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为一个集合（简称集）. 组成这个集合的事物称为这个集合的元素.

集合通常用大写的拉丁字母 A, B, C, …表示，其元素则用小写的拉丁字母 a, b, c, …表示. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$，否则，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$. 含有有限个元素的集合称为有限集；不是有限集的集合称为无限集.

对于数集，习惯上，全体自然数的集合记作 $\mathbf{N}$；全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$；全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$. 我们有时在表示数集的字母的右上角标上"$*$"来表示该数集内排

除0的集，标上“+”来表示该数集内排除0与负数的集. 例如，全体正整数的集合记作 $\mathbf{Z}^+$，即 $\mathbf{Z}^+=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 如果集合 A 与集合 B 互为子集，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$，即 $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$. 不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$，规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

集合的基本运算有交、并、差等. 设 A、B 两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集(简称交)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集(简称并)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集(简称差)，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\};$$

有时我们所研究的集合 A、B 都是集合 I 的子集，此时，称集合 I 为全集或基本集，称 $I\backslash A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^C.

设 A、B、C 为任意三个集合，则集合的交、并、余运算满足下列运算规律：

交换律　$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；

结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

分配律　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

对偶律　$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$，$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

2. 区间和邻域

所谓区间是指介于两个实数 a 与 b 之间的一切实数，在数轴上就是从 a 到 b 的线段. a 与 b 称为区间的端点，当 $a<b$ 时，a 称为左端点，b 称为右端点. 数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a, b)；数集

$$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记作 $[a, b]$. 类似地，数集

$$\{x \mid a\leqslant x<b\},$$

$$\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

称为半开区间，分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$.

除了上述这些有限区间以外，还有各种无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，可类似地表示无限区间，例如，集合 $\{x \mid x\geqslant a\}$ 可记为 $[a, +\infty)$，集合 $\{x \mid x<b\}$ 可记为 $(-\infty, b)$，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记为 $(-\infty, +\infty)$.

闭区间 $[a, b]$、开区间 (a, b) 及无限区间 $[a, +\infty)$ 和 $(-\infty, b)$ 在数轴上表示分别如图 0-1 (a)、(b)、(c) 和 (d).

有些定理的成立与变量的区间的开闭有很大关系，但有些情形不需要考虑区间的开闭以及是有限区间还是无限区间，此时，我们常常统称为区间，并记作 I.

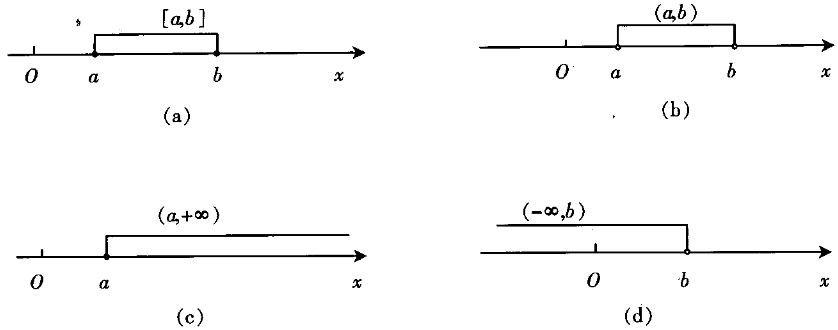

图 0－1

有一类特殊的区间，我们称为邻域，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$．设 δ 是任一正数，以点 a 为中心，以 δ 为半径的开区间，即开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\ \delta)$（图 0－2）．依定义有

$$U(a,\ \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

或

$$U(a,\ \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

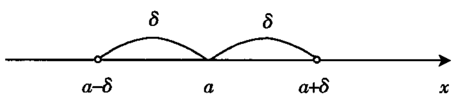

图 0－2

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，所以点 a 的 δ 邻域 $U(a,\ \delta)$ 表示：与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

如果把点 a 的 δ 邻域 $U(a,\ \delta)$ 的中心点 a 去掉后，称此邻域为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\ \delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

有时把开区间 $(a-\delta,\ a)$ 称为 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,\ a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

3. 实数与实数的绝对值

整数和分数统称为有理数．有理数都可以表示为有限小数或无限循环小数，如，$\dfrac{2}{5}$ 可表示为 0.4，$\dfrac{1}{3}$ 可表示为 0.333…等；所有形如 $\dfrac{n}{m}$（m，n 为互质的整数，$m\neq0$）的数都是有理数.

无限不循环小数叫做无理数．无理数不能表示成分数的形式，如：π，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$ 等.

有理数和无理数统称为实数．实数与数轴上的点是一一对应的，每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反之，每一个点又都表示一个实数.

如果一实数为 a，我们用 $-a$ 表示 a 的相反数，当 a 表示一个正实数时，$-a$ 就表示一个负实数；又当 a 表示一个负实数时，则 $-a$ 就表示一个正实数．a 与 $-a$ 互为相反数．0 的相反数为 0.

实数的绝对值是如下定义的：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0的绝对值是0. 如果 a 是一个实数，则有

$$|a|=\begin{cases}a, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

例如，$|\pi|=\pi$；$|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

解绝对值不等式可以归结为以下两种情形：

(1) $|x|<a$，当 $a\leqslant 0$，其解集为空集，当 $a>0$，解集为：

$$\{x|-a<x<a\};$$

(2) $|x|>a$，当 $a<0$，其解集为全体实数 $\mathbf{R}$，当 $a\geqslant 0$，解集为：

$$\{x|x<-a\}\cup\{x|x>a\}.$$

4. 逻辑推理及符号

若命题 A 成立必然得到命题 B 成立，则称命题 A 为命题 B 的充分条件，或称命题 B 为命题 A 的必要条件.

若命题 A 成立必然得到命题 B 成立且命题 B 成立必然得到命题 A 成立，则称命题 A 为命题 B 的充分必要条件，或称命题 B 为命题 A 的充分必要条件，即命题 A 等价于命题 B.

在数学的逻辑推理中，为了书写方便，我们常采用下列逻辑符号.

符号“$\forall$”表示“任给”或“每一个”；符号“$\exists$”表示“存在”或“找到”；符号“$A\Leftrightarrow B$”表示命题（或条件）A 与 B 等价，或命题（或条件）A 与 B 互为充要条件.

第一章　函数与极限

微积分学是以函数为研究对象的一门科学. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 极限方法是研究函数的一种基本方法，它是学习微分学、积分学的基础. 本章将介绍函数、函数极限和函数连续等基本概念以及它们的一些性质.

第一节　函　　数

一、函数的定义

我们在研究某一实际问题或自然现象的过程中，往往发现所涉及的变量并不是独立变化的，变量之间总会存在着某种依赖关系. 下面我们考察两个例子：

例 1　圆的面积 s 随半径 r 的改变而变化，它们的关系为

$$s=\pi r^2,\ r\in(0,\ +\infty).$$

例 2　自由落体运动中，下落的距离 h 和时间 t 都是变量，它们有如下关系：

$$h=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in[0,\ T].$$

从以上的例子我们看到，它们所描述的问题虽各不相同，但却有共同的特征：

(1) 每个问题中都有两个变量，它们之间不是彼此孤立的，而是相互联系，相互制约的；

(2) 当一个变量在它的变化域中任意取一值时，另一个变量按一定法则取一定值与之相对应. 具有这两个特征的变量之间的依存关系，我们称为函数关系. 下面给出函数的定义.

定义 1　**设两个变量 x 和 y，当变量 x 在一给定的数集 D 中任意取一个值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.**

数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量或函数.

函数值 $f(x)$ 全体所构成的集合称为函数的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$.

例 1、例 2 的值域分别为：$R_f=(0,\ +\infty)$、$R_f=\left[0,\ \frac{1}{2}gT^2\right]$.

注　(1) 若对任意 $x\in D$，按照一定的法则 f 只有一个 y 值与之对应，则称函数 $y=f(x)$ 为单值函数，否则，称函数 $y=f(x)$ 为多值函数. 如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 为单值函数，函数 $x^2+y^2=r^2$ 为多值函数.

(2) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值，但习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数 f.