

GANGJIN HUNNINGTU JIEGOU DE TANSUXING FENXI

钢筋混凝土结构的弹塑性分析

韦树英 韦斌凝 赵艳林 编著

▲ 广西师范大学出版社

TU375/56

2001

钢筋混凝土结构的弹塑性分析

韦树英 韦斌凝 赵艳林 编著

广西师范大学出版社

· 桂 林 ·

内 容 简 介

本书详细论述了钢筋混凝土结构的弹塑性分析方法。全书共分四篇(含十二章),主要内容有:结构弹塑性分析的基础知识;混凝土的破坏准则、本构关系模型以及钢筋混凝土结构构件的恢复力模型;梁、拱、板、壳、框架、剪力墙、框-剪结构等钢筋混凝土常用结构的弹塑性分析方法以及钢筋混凝土高层建筑结构的弹塑性地震反应的时程分析方法等。

本书可供大专院校土建专业师生和从事结构设计的科研、技术人员参考。

钢筋混凝土结构的弹塑性分析

韦树英 韦斌凝 赵艳林 著

责任编辑:李敏俐

封面设计:廖幸玲

广西师范大学出版社出版发行

(广西桂林市中华路 36 号 邮政编码:541001)

广西区计委印刷厂印刷

*

开本:787×1 092 1/16 印张:14.375 字数:368 千字

2001 年 5 月第 1 版

2001 年 5 月第 1 次印刷

印数:0 001~1 000 册

ISBN 7-5633-3195-6/TV·002

定价:25.00 元

前 言

以弹塑性变形理论为基础,研究结构随荷载的逐步增加,在由弹性状态过渡到弹塑性状态直至塑性极限状态而丧失承载能力的全过程中,对其内力和变形过程的分析,统称为结构的弹塑性分析。

长期以来,工程上对钢筋混凝土结构常采用线弹性理论来分析其应力或内力,而采用极限状态的设计方法来确定其强度、刚度和抗裂性。很显然,这种内力分析与承载力确定的方法是不协调的。这种分析方法虽然在常规设计中是简便有效的,但是,它只是保证结构安全的一种算法,并不能揭示结构内力和变形的重分布,不能计算结构任一点的应力状态,因此不能对结构的可靠性进行准确的评价。

采用弹塑性分析方法对结构进行分析,能够给出结构内力和变形发展的全过程,既能描述裂缝的形成和发展以及结构的破坏过程和形态,又能揭示结构的薄弱部位,从而对结构的承载能力作出较准确的评价。随着计算机应用技术的发展,人们已经完全可能对钢筋混凝土结构进行弹塑性分析了。弹塑性分析方法在钢筋混凝土结构计算中的应用将会越来越广泛。

本书是作者在近年来的教学实践和科研成果的基础上编写而成的。全书引用了国内外有价值的实验、研究结果,探讨了各种常用结构的弹塑性分析方法,可供大专院校土建类师生和工程技术人员参考使用。

全书分为四篇十二章。第一篇(一~二章)对弹塑性分析的基础知识,即应力理论和应变理论以及弹塑性理论等作了简要介绍,为读者阅读本书提供了必要的基础知识。第二篇(三~五章)介绍钢筋混凝土的力学性能。根据国内外的实验结果,介绍了混凝土的破坏准则、本构关系模型、钢筋与混凝土之间的黏结和钢筋混凝土构件的恢复力特性等,为钢筋混凝土结构的弹塑性分析提供了理论基础。第三篇(六~十一章)介绍钢筋混凝土结构的弹塑性分析方法,涉及梁、板、壳、拱、框架、剪力墙和框架-剪力墙等结构的弹塑性分析。第四篇(十二章)研究高层建筑结构的弹塑性地震反应时程分析方法,分别叙述了框架和框-剪结构以及筒体结构的弹塑性地震反应的时程分析方法。各章内容相对独立。

本书研究的部分课题是广西自然科学基金的资助项目。

由于作者水平有限,错漏之处在所难免。恳请读者批评指正。

作 者

2000 年 12 月

目 录

第一篇 结构弹塑性分析的基础知识

第一章 应力理论与应变理论	(1)
§ 1—1 应力张量和应力张量不变量	(1)
§ 1—2 应力偏量和应力偏量不变量	(4)
§ 1—3 八面体上的应力	(7)
§ 1—4 应力空间 π 平面	(7)
§ 1—5 不同参考构形定义的应力张量	(10)
§ 1—6 应变张量和应变张量不变量	(13)
§ 1—7 应变偏量和应变偏量不变量	(16)
第二章 塑性理论基础	(18)
§ 2—1 屈服条件	(18)
§ 2—2 塑性理论中的公设	(20)
§ 2—3 流动理论(增量理论)	(22)
§ 2—4 全量理论(形变理论)	(26)
§ 2—5 结构弹塑性分析的一般方法	(30)
§ 2—6 弹塑性问题的有限元解法	(30)

第二篇 钢筋混凝土的力学性能

第三章 混凝土的破坏准则	(36)
§ 3—1 破坏曲面及其表述	(36)
§ 3—2 混凝土的破坏准则	(38)
§ 3—3 混凝土的单轴和双轴破坏准则	(42)
第四章 钢筋混凝土的本构关系	(46)
§ 4—1 混凝土本构模型的类型	(46)
§ 4—2 混凝土的非线性弹性本构模型	(50)

§ 4—3 钢筋本构关系	(59)
§ 4—4 钢筋与混凝土之间的粘结应力与滑移的关系模型	(60)
第五章 钢筋混凝土结构构件的恢复力特性	(63)
§ 5—1 钢筋混凝土构件的弯矩-曲率关系	(63)
§ 5—2 钢筋混凝土构件的滞回曲线	(71)

第三篇 钢筋混凝土结构的弹塑性分析

第六章 钢筋混凝土结构有限元模型与弹塑性分析的基本问题	(79)
§ 6—1 结构的离散化模型	(79)
§ 6—2 混凝土的开裂裂缝模型	(82)
§ 6—3 混凝土单元破坏的判断和计算处理	(82)
§ 6—4 钢筋单元屈服的处理	(89)
§ 6—5 联结单元破坏的处理	(89)
§ 6—6 钢筋混凝土结构弹塑性分析的一般步骤	(90)
第七章 钢筋混凝土薄板的弹塑性分析	(92)
§ 7—1 弯曲单元法	(92)
§ 7—2 分层单元法	(100)
§ 7—3 压型钢板-混凝土组合板弹塑性分析的混合单元法	(105)
第八章 钢筋混凝土结构圆柱薄壳弹塑性分析的分层拟协调元法	(128)
§ 8—1 结构的离散化与单元构造	(128)
§ 8—2 壳体弹塑性拟协调元的增量格式	(134)
§ 8—3 分层单元弹塑性本构矩阵	(135)
§ 8—4 分析方法	(137)
第九章 钢筋混凝土梁的弹塑性分析	(138)
§ 9—1 钢筋混凝土承墙梁	(138)
§ 9—2 钢筋混凝土曲梁和拱	(145)
第十章 钢筋混凝土剪力墙的弹塑性分析	(147)
§ 10—1 宽柱框架模型法分析并联剪力墙	(147)
§ 10—2 并联剪力墙的分段分析法	(151)
第十一章 钢筋混凝土框架及框架-剪力墙结构的弹塑性分析	(159)
§ 11—1 钢筋混凝土框架结构弹塑性分析的四元单元法	(159)

§ 11—2	框架及框架-剪力墙结构分析的弹塑性杆模型法	(165)
§ 11—3	钢筋混凝土框架弹塑性分析的 QR 法	(171)
§ 11—4	填充墙钢筋混凝土框架结构的弹塑性分析	(178)
§ 11—5	砖混框架结构的弹塑性分析	(183)
§ 11—6	钢筋混凝土框架-剪力墙弹塑性分析的等参单元法	(187)

第四篇 弹塑性地震反应分析

第十二章	钢筋混凝土高层建筑结构的弹塑性地震反应时程分析	(195)
§ 12—1	结构弹塑性地震反应时程分析的一般方法	(195)
§ 12—2	钢筋混凝土框架结构弹塑性地震反应分析的分段单元法	(199)
§ 12—3	钢筋混凝土高层建筑结构弹塑性地震反应分析的等效楼层刚度法	(203)
§ 12—4	钢筋混凝土筒体结构的弹塑性地震反应分析	(210)
参考文献		(215)
附 录	字母标记法与求和约定	(218)

第一篇 结构弹塑性分析 的基础知识

第一章 应力理论与应变理论

§ 1-1 应力张量和应力张量不变量

一、应力张量

在小变形情况下,总应力矢量定义为:

$$\sigma = \frac{dF}{dA} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

式中 dF 和 dA 为内力矢量和微面积。

由于是小变形,没有必要考虑变形前后面积的变化,也不必考虑内力作用方向在变形前后的变化,即

$$\frac{dF}{dA} \sim \frac{dF_0}{dA_0}$$

式中下标“0”表示变形前的量。

在连续介质中的一点,其应力状态可用图 1-1-1 所示的微元六面体中 3 个相邻面上的 9 个应力分量组成的对称二阶应力张量来表示:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{式 1-1-1})$$

式中 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 分别是垂直于坐标轴 x, y, z 的面上的法向应力,而 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 则是这些面上的剪应力。6 个剪应力有互等关系。例如,以六面体前后两个面的中心连线为例,可列出力矩平衡方程为:

$$2\tau_{yz} \cdot \Delta z \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{xy} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\Delta x}{2} = 0$$

从而可得:

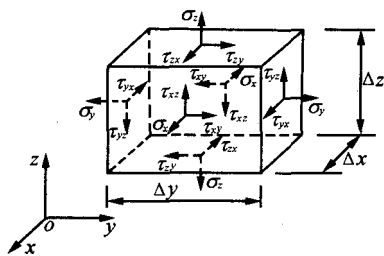


图 1-1-1

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (\text{式 1-1-2})$$

这就是剪应力互等定律,即微元六面体两相邻面上的剪应力两两相等。因而,式 1-1-1 的应力张量是一个对称的二阶张量。在张量运算中,常用同一个字母表示同一个物理量,而用不同下标表示该物理量的不同分量。因此,可用 σ 表示应力,而应力分量用 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{ij} (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$ 来表示。于是,应力张量也可表示成:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{式 1-1-3})$$

σ 是确定变形体应力状态的应力张量,称为柯西(Cauchy)应力张量。

由于应力张量是对称张量,只有 6 个分量是独立的,因而一点的应力状态又可用一个列矩阵来表示:

$$[\sigma] = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \quad (\text{式 1-1-4})$$

$$\text{或} \quad [\sigma] = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T \quad (\text{式 1-1-5})$$

在外法线为 n 的任意斜截面上(见图 1-1-2),令:

$$l_1 = \cos(n, x)$$

$$l_2 = \cos(n, y)$$

$$l_3 = \cos(n, z)$$

又设该斜截面的面积为 dA , 截面上的总应力为 σ_n , 总应力在 3 个坐标轴方向的应力分量为 $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$ 。则由平衡条件 $\sum x = 0$ 可得:

$$\sigma_{n1} \cdot dA = \sigma_{11} \cdot dA \cdot l_1 + \sigma_{12} \cdot dA \cdot l_2 + \sigma_{13} \cdot dA \cdot l_3$$

即:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{n1} &= \sigma_{11}l_1 + \sigma_{12}l_2 + \sigma_{13}l_3 \\ \sigma_{n2} &= \sigma_{21}l_1 + \sigma_{22}l_2 + \sigma_{23}l_3 \\ \sigma_{n3} &= \sigma_{31}l_1 + \sigma_{32}l_2 + \sigma_{33}l_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{式 1-1-6})$$

上式可写成:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{式 1-1-7})$$

即:

$$\sigma_{ni} = \sigma_{ij} \cdot l_j \quad (\text{式 1-1-8})$$

上式称为柯西公式。斜截面上的总应力 σ_n 等于 3 个应力分量之和, 即有:

$$\sigma_n^2 = \sigma_{n1}^2 + \sigma_{n2}^2 + \sigma_{n3}^2 \quad (\text{式 1-1-9})$$

斜截面上的总应力可分解为垂直于斜截面的正应力和平行于斜截面的剪应力。为此,可取该斜截面外法线为 x_1' 轴并同时在斜截面上取 2 个互相垂直的坐标轴 x_2' 和 x_3' , 此坐标系与原坐标系 x_1, x_2, x_3 中的方向余弦分别表示为 $l_{11}, l_{12}, l_{13}, \dots$ 则斜截面上正应力 σ_{11}' 和剪应力 $\sigma_{12}', \sigma_{13}'$ 为:

$$\sigma_{11}' = [l_{11} \quad l_{12} \quad l_{13}] \begin{Bmatrix} \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{Bmatrix} = [l_{11} \quad l_{12} \quad l_{13}] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \end{Bmatrix} = \sigma_{ij} l_{i1} l_{j1}$$

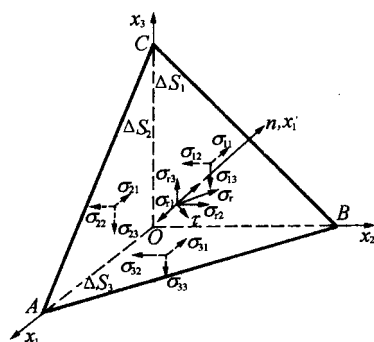


图 1-1-2

剪应力为：

$$\sigma_{12}' = [l_{21} \ l_{22} \ l_{23}] \begin{Bmatrix} \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{Bmatrix} = [l_{21} \ l_{22} \ l_{23}] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \end{Bmatrix} = \sigma_{ij} l_{j2} l_{j1}$$

$$\sigma_{13}' = [l_{31} \ l_{32} \ l_{33}] \begin{Bmatrix} \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{Bmatrix} = [l_{31} \ l_{32} \ l_{33}] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{11} \\ l_{12} \\ l_{13} \end{Bmatrix} = \sigma_{ij} l_{j3} l_{j1}$$

同理，可取 x_2' 、 x_3' 为斜截面的法线。在每个斜面上均可用类似于上述公式算出一个正应力和两个剪应力。于是，可得到新坐标系 x_1' 、 x_2' 、 x_3' 中同一点的另外 9 个应力分量，即：

$$\sigma_{mn}' = \sigma_{ij} \cdot l_{im} l_{jn}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}' & \sigma_{12}' & \sigma_{13}' \\ \sigma_{21}' & \sigma_{22}' & \sigma_{23}' \\ \sigma_{31}' & \sigma_{32}' & \sigma_{33}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{式 1-1-10})$$

由式 1-1-10 可知，由已知一点的 9 个应力分量可求出任意斜截面上的 9 个应力分量。式 1-1-10 称为应力分量的坐标变换公式。

二、主应力和应力张量的不变量

由式 1-1-10 可知，同一点的不同斜截面方向的应力是随该斜截面法线的方向余弦变化的，当斜截面处于某一方向时，其外法线的方向余弦 l_1 、 l_2 、 l_3 恰好使斜截面上的剪应力分量全部为 0，则该斜截面上的正应力即为主应力。这个方向也称为应力张量的主方向。

由于主应力所在斜面上的剪应力为 0，则该斜截面上的总正应力 σ_n 即为主应力， $\sigma = \sigma_n$ 。总应力 σ_n 在三个坐标轴方向上的分量可表示为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{式 1-1-11})$$

当取主应力方向（即应力张量的主方向）为主轴，则由柯西公式，有

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{n1} \\ \sigma_{n2} \\ \sigma_{n3} \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{式 1-1-12})$$

或

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{11} - \sigma) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & (\sigma_{22} - \sigma) & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & (\sigma_{33} - \sigma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{式 1-1-13})$$

方向余弦 l_1 、 l_2 、 l_3 有如下性质：

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \quad (\text{式 1-1-14})$$

则 l_1 、 l_2 、 l_3 不全为 0，方程 1-1-13 有非零解的必要条件是：

$$|\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0 \quad (\text{式 1-1-15})$$

上式中 $\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，式 1-1-15 展开得：

$$\sigma^3 - I_1\sigma + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (\text{式 1-1-16})$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}\sigma_{21} - \sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{31}\sigma_{13} \\ &= \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) \\ &= \frac{1}{2}[(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 - (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \\ &\quad 2(\sigma_{12}\sigma_{21} + \sigma_{23}\sigma_{32} + \sigma_{31}\sigma_{13})] \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{ii}^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \det[\sigma_{ij}] = |\sigma_{ij}| \\ &= \frac{1}{6}(\sigma_{ii}\sigma_{jj}\sigma_{kk} - 3\sigma_{ii}\sigma_{jk}\sigma_{kj} + 2\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}) \end{aligned} \right\} (\text{式 1-1-17})$$

可以证明,式 1-1-16 有三个实根 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 即三个主应力值, 则 I_1, I_2, I_3 可用主应力表示:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} (\text{式 1-1-18})$$

因为主应力是表征材料的应力状态的, 它是客观的, 其大小不因所选择的坐标系的不同而改变。因此, 从式 1-1-18 可知, I_1, I_2, I_3 也应不随坐标的选取而变化。它们的不变性也可通过它们的标量本质得以保证, 因为式 1-1-17 各式都是被缩并为零阶的张量。 I_1, I_2, I_3 分别称为应力张量 σ_{ij} 的一次、二次和三次不变量, 也称为应力张量 σ_{ij} 的第一、第二和第三不变量。

三个主应力之和的平均值通常称为平均应力 σ_m :

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}I_1 \quad (\text{式 1-1-19})$$

三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 在主轴方向的 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 有如下关系:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \text{ 或 } \gamma_i \cdot \gamma_i = 1 \quad (\text{式 1-1-20})$$

如果三个主应力值各不相同, 可以证明, 它们的方向是互相垂直的。

§ 1-2 应力偏量和应力偏量不变量

一、应力球张量和应力偏张量

一点的应力张量可作如下分解:

$$[\sigma_{ij}] = [\sigma_m] + [S_{ij}] \quad (\text{式 1-2-1})$$

式中

$$[\sigma_m] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 \\ & \sigma_m \\ 0 & & \sigma_m \end{bmatrix}$$

称为应力球张量。

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

称为应力偏张量或应力偏量。

S_{11}, S_{22}, S_{33} 表示应力偏量 $[S_{ij}]$ 的法向分量, 即 $\sigma_{11} - \sigma_m, \sigma_{22} - \sigma_m, \sigma_{33} - \sigma_m$ 。可见, 应力偏量 $[S_{ij}]$ 与应力张量 $[\sigma_{ij}]$ 的主方向相重合。而主应力值 S_i 与 σ_i 只相差一个平均应力值 σ_m , 即

$$S_i = \sigma_i - \sigma_m \quad (i=1, 2, 3) \quad (\text{式 1-2-2})$$

二、应力偏量的不变量

由式 1-2-2 可知, 主应力可由应力偏量的主值和平均应力求得。与求 σ_i 的方程 1-1-15 相似, 可得方程:

$$|S_{ij} - S \cdot \delta_{ij}| = 0 \quad (\text{式 1-2-3})$$

展开得:

$$S^3 - J_1 S^2 - J_2 S - J_3 = 0 \quad (\text{式 1-2-4})$$

式中

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0 \\ J_2 &= -(S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11}) + (S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2) \\ J_3 &= \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{式 1-2-5})$$

分别称为应力偏量的第一、第二和第三不变量。

由式 1-2-1 知, 主应力

$$\sigma_i = S_i - \sigma_m = S_i + \frac{1}{3} I_1 \quad (\text{式 1-2-6})$$

将式 1-2-5 代入式 1-2-6 并化简得:

$$S^3 - \left(\frac{I_1^2}{3} - I_2 \right) S - \left(\frac{2I_1^2}{27} - \frac{I_1 I_2}{3} + I_3 \right) = 0 \quad (\text{式 1-2-7})$$

比较式 1-2-6 与式 1-2-3 知:

$$\left. \begin{aligned} J_2 &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 \\ J_3 &= \frac{2I_1^2}{27} - \frac{I_1 I_2}{3} + I_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{式 1-2-8})$$

上式就是应力偏量不变量与应力张量不变量的关系。

应力偏量不变量 J_2, J_3 还可表示成不同的形式。为了便于应用, 现在推导如下:

J_2 : 由于 $J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$, 则

$$(J_1)^2 = (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2)^2 = S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2(S_{11}S_{22} + S_{11}S_{33} + S_{22}S_{33}) = 0$$

故 $-(S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11}) = \frac{1}{2}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2)$

将上式代入式 1-2-5 第二式, 得:

$$J_2 = \frac{1}{2}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) + S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 \quad (\text{式 1-2-9})$$

而

$$\begin{aligned} S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 &= \frac{2}{3}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) + \frac{1}{3}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) \\ &= \frac{2}{3}(S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) - \frac{2}{3}(S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{33}S_{11}) \\ &= \frac{1}{3}[(S_{11} - S_{22})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + (S_{33} - S_{11})^2] \end{aligned}$$

则得：

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6}[(S_{11} - S_{22})^2 + (S_{22} - S_{33})^2 + (S_{33} - S_{11})^2] + S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{31}^2 \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \end{aligned}$$

在主应力状态时, $S_{12} = S_{23} = S_{31} = 0$, 则由式 1-2-9 得：

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \end{aligned} \quad (\text{式 1-2-10})$$

J_3 ：在主应力状态时, 因 $S_{12} = S_{23} = S_{31} = 0$, 则由式 1-2-5 第三式得：

$$J_3 = S_1 S_2 S_3$$

由于

$$S_i = \sigma_i - \sigma_m = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (i=1, 2, 3)$$

则

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

及

$$(S_1 + S_2 + S_3)^3 = 0$$

而

$$\begin{aligned} (S_1 + S_2 + S_3)^3 &= S_1^3 + S_2^3 + S_3^3 + 3S_1^2 S_2 + 3S_1^2 S_3 + 3S_2^2 S_1 + 3S_2^2 S_3 + 3S_3^2 S_1 + 3S_3^2 S_2 + 6S_1 S_2 S_3 \\ &= S_1^3 + S_2^3 + S_3^3 - 3S_1 S_2 S_3 + 3S_1 S_2 (S_1 + S_2 + S_3) + 3S_2 S_3 (S_1 + S_2 + S_3) + \\ &\quad 3S_3 S_1 (S_1 + S_2 + S_3) \\ &= S_1^3 + S_2^3 + S_3^3 - 3S_1 S_2 S_3 = 0 \end{aligned}$$

故可得：

$$S_1 S_2 S_3 = \frac{1}{3}(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3)$$

因而

$$J_3 = S_1 S_2 S_3 = \frac{1}{3}(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3) \quad (\text{式 1-2-11})$$

三、有效应力与有效剪应力

用应力偏量的第二不变量 J_2 来表示有效应力 $\bar{\sigma}$ ：

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (\text{式 1-2-12})$$

在简单拉伸时, 由于 $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, 则有效应力 $\bar{\sigma}$ 还原为简单拉应力：

$$\bar{\sigma} = \sigma$$

有效应力 $\bar{\sigma}$ 常用来标志材料在复杂应力下的屈服条件, 故 $\bar{\sigma}$ 也叫应力强度。

有效剪应力(或剪应力强度) T 也可用 J_2 来表示:

$$T = \sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (\text{式 1-2-13})$$

在纯剪时, $\sigma_1 = \tau > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau$, 则 T 还原为简单剪应力:

$$T = \tau$$

§ 1-3 八面体上的应力

假设选取坐标轴 x, y, z 与主应力方向一致, 外法线的方向余弦为 $|l_1| = |l_2| = |l_3| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 的平面(它要满足 $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$) 共有八个, 称为八面体, 如图 1-3-1 所示。沿八面体法线方向的正应力应为:

$$\begin{aligned} \sigma_8 &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2 \\ &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1 = \sigma_m \end{aligned}$$

可见, 八面体的正应力就是该点的平均正应力。

设八面体上的应力向量为 F_8 , 则

$$|F_8|^2 = (\sigma_1 l_1)^2 + (\sigma_2 l_2)^2 + (\sigma_3 l_3)^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

故得八面体面上的剪应力为:

$$\begin{aligned} \tau_8 &= \sqrt{|F_8|^2 - \sigma_8^2} = \left[\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{9}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}J_2} \end{aligned} \quad (\text{式 1-3-1})$$

§ 1-4 应力空间 π 平面

一、应力空间

现设法用几何方法来表示一点的应力状态。由前面已经知道, 一点的应力状态要用六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ 来表示。如果以这六个分量为坐标轴, 则可在这样一个空间中用一个点来表示一点的应力状态。一点的应力状态的变化, 可用这个应力空间中的曲线来表示。但六维空间无法直观表示, 当主应力已知, 则可选取主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为坐标轴, 形成主应力空间,

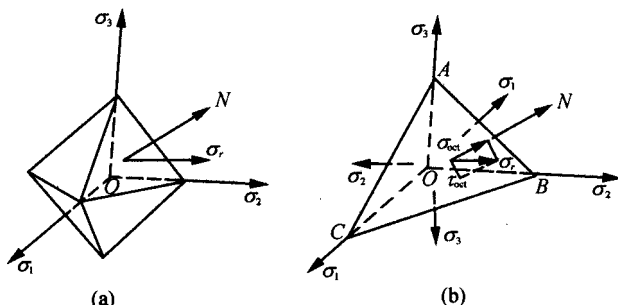


图 1-3-1

将一点的应力状态用此空间中的点来表示。

在主应力空间中,如图 1-4-1 所示,一点的应力状态可用向量 $\vec{OP}$ 来描述。设 i, j, k 表示主应力空间中三个坐标轴方向的单位向量,则

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \sigma_1 i + \sigma_2 j + \sigma_3 k \\ &= (S_1 i + S_2 j + S_3 k) + (\sigma i + \sigma j + \sigma k) \\ &= \vec{OQ} + \vec{ON}\end{aligned}$$

(式 1-4-1)

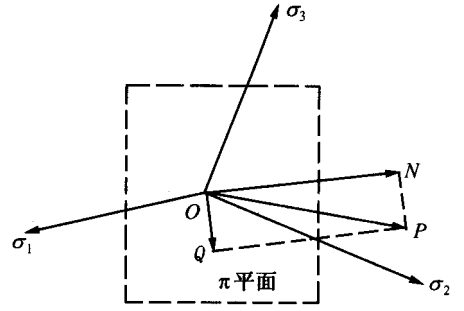


图 1-4-1

二、 π 平面

从图 1-4-1 可以看出, $\vec{OQ}$ 向量就是主应力偏向量, $\vec{ON}$ 向量与 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 轴的夹角相等, 常称为等倾轴或等应力轴、或静水压力轴。因此, $\vec{ON}$ 必正交于下列过原点的平面:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

这是一个平均应力等于 0 的平面, 称为 π 平面。 π 平面就是一个过原点正交于静水压力线的平面。由于 $\vec{OQ}$ 的三个分量 S_1, S_2, S_3 满足下列关系:

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

所以, 应力偏向量 $\vec{OQ}$ 总是在 π 平面内。因而只要两个参数即可确定它。

现在建立主应力空间中一点与 π 平面上一点的定量关系。为此, 先求出单位矢量 i, j, k 在 π 平面的投影长度。

设向量 i 的端点是 σ_1 轴上的点 1, 它在 π 平面上的投影为 $1'$ 。类似地, 向量 j 在 σ_2 轴上和 π 平面上的点为 2 和 $2'$, 向量 $\vec{12}$ 的长度是:

$$|\vec{12}| = \sqrt{|i|^2 + |j|^2} = \sqrt{2}$$

由于 $\vec{12}$ 与 π 平面平行, 故其投影值 $|1'2'|$ 亦为 $\sqrt{2}$ 。

π 平面上的向量 $\vec{01'}$ 的长度与 $\vec{1'2'}$ 的长度之间的关系是:

$$|\vec{01'}| = \frac{|\vec{1'2'}|}{2} \cdot \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\vec{01}|$$

因此点 $1'$ 在 π 平面上的坐标将为:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$

点 $(\sigma_1, 0, 0)$ 在 π 平面上投影的坐标是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_1, \frac{-\sigma_1}{\sqrt{6}} \right]$, 类似地, 点 $(0, \sigma_2, 0)$ 对应的坐标是 $\left[0, \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_2 \right]$, 点 $(0, 0, \sigma_3)$ 对应的坐标是 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_3, \frac{-1}{\sqrt{6}} \sigma_3 \right]$ 。

于是, 向量 $\vec{OP}$ 在 x, y 平面上投影的坐标, 即 Q 点的坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_1 - S_3) \\ y &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{6}} = \frac{2S_2 - S_1 - S_3}{\sqrt{6}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{式 1-4-2})$$

由此得

$$\begin{aligned} |\vec{OQ}| &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{6}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)^2} \\ &= \sqrt{2J_2} = \sqrt{2}T = \sqrt{3}\tau_8 \end{aligned} \quad (\text{式 1-4-3})$$

$\vec{OQ}$ 与 π 平面的夹角 θ_σ 为:

$$\tan\theta_\sigma = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_\sigma \quad (\text{式 1-4-4})$$

式中

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2} \quad (\text{式 1-4-5})$$

μ_σ 称为洛德参数。它代表应力状态的中间主应力与其他两个主应力的相对比值。当各应力分量按比例增加时, μ_σ 值不变。比较式 1-4-4 与式 1-4-5 得

$$\mu_\sigma = \sqrt{3} \tan\theta_\sigma \quad (\text{式 1-4-6})$$

当 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 时, $-1 \leq \mu_\sigma \leq 1$, $-30^\circ \leq \theta_\sigma \leq 30^\circ$ 。

$$\left. \begin{aligned} \text{在纯剪时, } \sigma_2 &= 0, \sigma_1 = \tau, \sigma_3 = -\tau; \mu_\sigma = 0, \theta_\sigma = 0 \\ \text{在纯拉时, } \sigma_1 &= \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \mu_\sigma = -1, \theta_\sigma = -30^\circ \\ \text{在纯压时, } \sigma_1 &= -\sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \mu_\sigma = 1, \theta_\sigma = 30^\circ \end{aligned} \right\} \quad (\text{式 1-4-7})$$

也可以用 μ_σ 和 θ_σ 的值来表示 S_1, S_2, S_3 , 设以 α 表示 $\vec{OQ}$ 方向的单位向量, 以 β 表示沿 π 平面 y 轴方向的单位向量。由式 1-4-2 可看出, 单位向量 i, j, k 在 π 平面的 y 值分别为 $\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}$, 因而这也是 β 向量在 i, j, k 坐标轴的方向余弦。设 α 的分量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 则

$$\alpha = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}(-i + 2j - k)$$

$$\vec{OQ} = S_1 i + S_2 j + S_3 k = |\vec{OQ}| \alpha = |\vec{OQ}| (\alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 应满足下列关系:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad (\text{a})$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{|\vec{OQ}|} (S_1 + S_2 + S_3) = 0 \quad (\text{b})$$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3) = \sin\theta_\sigma \quad (\text{c})$$

由式(b)得 $-\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2$, 代入式(c)得

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\theta_\sigma \quad (\text{d})$$

将 $\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ 代入式(a)得

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \frac{1}{2} = 0$$

解得

$$\alpha_1 = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{2-3\alpha_2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta_\sigma + \frac{2\pi}{3}) \text{ (取正号)}$$

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta_\sigma - \frac{2\pi}{3})$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta_\sigma + \frac{2\pi}{3}) |\vec{OQ}| \\ S_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sin\theta_\sigma |\vec{OQ}| \\ S_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\theta_\sigma - \frac{2\pi}{3}) |\vec{OQ}| \end{aligned} \right\} \quad (\text{式 1-4-8})$$

§ 1—5 不同参考构形定义的应力张量

变形体在受力时,其形状从一种图形变为另一种图形。体内各点的位置同时发生变化。为描述变形体的变形、运动状态和应力状态,可采用不同的参考图形即构形作为基准。在应力理论中,不同的参考构形所定义的应力张量是不同的。这一节我们简要介绍几类不同的应力张量。为便于叙述,我们先介绍变形体变形几何的有关概念。

一、变形体的基准描述和空间描述

用任意选择的参考构形中的点的位置向量 X 和时间 t 作为独立变量来描述变形体的变形状态,称为基准描述。当将时间 $t=0$ 的初始构形作为参考构形时,称为 Lagrange 描述。若把位置向量 X 看成是质点 X 的标号,则基准描述就是物质描述。这时,表示位置向量 X 的坐标 (X_1, X_2, X_3) 称为物质坐标。

当用质点在任一时间 t 的现时构形所占空间位置坐标 x 和时间 t 作为参考的独立变量来描述变形体的变形状态,称为空间描述,也称为 Euler 描述。表示位置向量 x 的坐标 (x_1, x_2, x_3) 称为空间坐标。

在连续变形的条件下,初始构形与现时构形中点的位置坐标一般是彼此一一对应的。Lagrange 坐标与 Euler 坐标也存在对应关系:

$$x = x(X, t) \quad (\text{式 1-5-1})$$

$$X = X(x, t) \quad (\text{式 1-5-2})$$

由式 1-5-1 得雅可比(Jacobi)行列式 J 为:

$$|J| = |\partial x_i / \partial X_j| \neq 0 \quad (\text{式 1-5-3})$$