高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

概率论与数理统计

南开大学数学科学学院　张建华　编

高等教育出版社

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

概率论与数理统计

南开大学数学科学学院
张建华　编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部普通高等学校经济管理类本科数学基础课程教学基本要求编写的。内容包括事件的概率、随机变量及其概率分布、多元随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样与抽样分布、参数估计、假设检验和回归分析等。本书可作为普通高等学校经济类专业和管理类专业以及相关专业本科生教材，也可作为上述专业硕士研究生数学课程入学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 张建华编. —北京：高等教育出版社,2008.5
ISBN 978-7-04-023910-2

Ⅰ. 概… Ⅱ. 张… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 042839 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 吴文信
版式设计 王艳红 **责任校对** 殷 然 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008 年 5 月第 1 版
印　　张	19.25	印　　次	2008 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	350 000	定　　价	22.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23910-00

前　言

本书是为一般高等学校经济管理类专业以及相关专业本科生编写的概率论与数理统计教材。

随着我国市场经济的深入发展和不断完善，对经济管理类专业本科生的数学基础、数学素养和运用数学理论及数学方法分析解决实际问题能力的要求也越来越高。同时，在经济管理类专业的本科生中，有相当多的学生希望在完成本科阶段的学习后，能攻读硕士学位，继续深造。为此，我们在总结多年概率论与数理统计课程教学经验的基础上，编写了本教材。

在编写过程中，我们注意把握以下几个基本点：第一，内容的深度与广度不低于经济管理类概率论与数理统计课程的教学基本要求；第二，基本理论与基本方法的阐述、例题与习题的选配，既能保证学生打好基础，也能满足学生将来报考硕士研究生的需要；第三，加强综合运用能力和解决实际问题能力的培养。

本书的内容包括事件的概率、随机变量及其概率分布、多元随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、抽样与抽样分布、参数估计、假设检验和回归分析等。

本书由张建华编写；邹华编写了书后的习题，并核对了所有习题答案；杨莉负责打印并校对部分书稿。

本书能够得以出版，首先要感谢高等教育出版社的支持与帮助，尤其是数学编辑对教材的定位、总体思路以及许多具体问题都给予了悉心指导和热情帮助。

本书的编写得到了南开大学教务处的立项支持，得到了南开大学数学科学学院的支持与帮助。数学科学学院高等数学教学部负责本书编写与出版的组织工作，高等数学教学办公室主任薛锋副研究员在协调、联络及后勤保障等工作中付出了辛勤劳动。对来自方方面面的关心、支持与帮助，我们在这里一并表示衷心的感谢。

由于我们的水平所限，加之时间仓促，本书的不足与缺点在所难免，请读者批评指正。

编　者

2007 年 12 月于南开园

目　　录

第一章　随机事件及其概率

概率论是研究随机现象规律性的数学学科，是统计学的重要基础，其主要研究对象是事件及其概率、随机变量及其概率分布和数字特征. 概率论在自然科学、社会科学等领域得到极其广泛的应用. 本章重点介绍概率论中的两个基本概念：随机事件及其概率，主要内容包括：随机事件及其关系和运算、随机事件概率的概念和性质、随机事件概率的计算. 本章是学习概率论和数理统计的基础.

§1.1　随机现象和随机事件

1.1.1　随机现象与随机试验

人类社会中现象各种各样，大体上可分为两类：确定性现象和随机现象. 确定性现象是指在一定条件下必然会发生的现象，例如，在标准大气压下，纯水加热到 100 ℃时必然会沸腾；向上抛掷一枚硬币必然会落地等现象都属于确定性现象. 我们以前学过的数学科学均以确定性现象作为研究对象. 随机现象是指在一定条件可能发生也可能不发生的现象，其出现的结果不确定. 例如，向上抛掷一枚硬币，其结果可能是出现正面，也可能是出现反面，而在每次抛掷以前无法确定会出现何种结果；对一个目标进行射击，其结果可能是命中目标，也可能是没有命中目标，而在每次射击以前无法确定会出现何种结果；在股票市场中，某只股票明天的价格可能是上涨，也可能是下跌或持平，而在明天股市收盘以前，无法确定会出现何种结果. 这些现象都属于随机现象.

虽然随机现象的结果事先无法预知，但是，人们从长期的观察和实践中发现，在大量重复试验中，这类现象的结果却呈现出某种规律性. 例如，大量重复抛掷一枚硬币，出现正面的次数和出现反面的次数大致都等于抛掷总数的一半；在含有不合格品的某种产品中，进行有放回的重复抽取，抽到合格品的次数与抽取总数之比却呈现出某种稳定性. 人们把随机现象在大量重复试验中表现出来的规律性称为统计规律性. 概率论研究的主要问题就是随机现象的规律性.

为了获得随机现象的统计规律性，人们往往需要对随机现象进行观察，我们把对随机现象的观察称为随机试验，简称为试验，用字母 E 来表示. 一般地，一个随机试验要满足下列条件：

(1) 可重复性：试验在相同的条件下可以重复进行；

(2) 可观测性：每次试验的可能结果不止一个，而且事先能明确试验的所有可能结果；

(3) 随机性：在每次试验之前不能准确预知将会出现的结果.

下面是一些随机试验的例子：

E_1：向上抛掷一枚骰子，观察其出现的点数；

E_2：对一个目标接连进行 n 次射击，观察击中目标的次数；

E_3：将一枚均匀的硬币抛掷两次，观察两次出现正面和反面的情况；

E_4：将一枚均匀的硬币抛掷两次，观察出现正面的次数；

E_5：观察某高速公路收费站口上午 7:00 至 8:00 的汽车流量(单位：辆)；

E_6：在一批灯泡中任意抽取一只，观察其使用寿命(单位：h)；

E_7：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

通过上述例子我们可以知道，随机试验是产生随机现象的过程，二者是并存的，我们就是通过随机试验来研究随机现象的.

1.1.2 样本空间

虽然在一个随机试验之前不能确定将要出现的结果，但是在随机试验之前却能明确试验所有的可能结果. 我们把随机试验 E 所有的可能结果组成的集合称为随机试验 E 的样本空间，用 Ω 来表示. 样本空间中的元素，也就是随机试验 E 的每一个可能的结果，称为样本点，一般用 ω 来表示. 对于前面给出的随机试验 $E_1,E_2,\cdots,E_7$，其所对应的样本空间如下：

$\Omega_1=\{1,2,\cdots,6\}$；

$\Omega_2=\{0,1,\cdots,n\}$；

$\Omega_3=\{(正,正),(反,反),(正,反),(反,正)\}$；

$\Omega_4=\{0,1,2\}$；

$\Omega_5=\{0,1,2,\cdots\}$；

$\Omega_6=(0,\infty)$；

$\Omega_7=\{(x,y):T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不会低于 T_0，也不会高于 T_1.

注 样本空间中的元素即样本点是由随机试验的目的所确定，不同的试验目的，其样本空间也不一样. 对于随机试验 E_3 和 E_4 来讲，都将一枚均匀的硬币抛掷两次，但由于试验的目的不同，其样本空间也不一样. E_3 的样本空间有 4 个

元素，而 E_4 的样本空间却只有 3 个元素.

此外，从上面样本空间的例子中我们可以看到，样本空间可以是数集，也可以不是数集；样本空间可以是有限集，也可以是无限集.

1.1.3 随机事件

在随机试验中，我们除了关心试验的所有可能的结果之外，往往还关心具有某种特征的试验结果. 我们将随机试验的每一种可观测的结果称为事件. 在每次试验中都肯定出现的结果称为必然事件，记作 Ω；在每次试验中都不出现的结果称为不可能事件，记作 $\varnothing$；在每次试验中既可能出现，也可能不出现的结果称为随机事件，简称为事件，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 等表示. 例如，在抛掷一枚骰子的试验中，"出现奇数点"，"出现偶数点"都是随机事件，而"出现小于 7 的点"是必然事件，"出现大于 7 的点"则是不可能事件.

概率论研究的是随机事件，本质上，必然事件和不可能事件已无随机性可言，但为了数学处理上的方便，仍把必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$ 当做两个特殊的随机事件.

由随机事件的定义可知随机事件是样本空间的一个子集，我们把仅含一个样本点的随机事件也称为基本事件. 基本事件是相对于其他事件而言的，它们是最基本的，其他事件均由它们复合而成，而它们自身又不能分解成其他事件的组合.

例 1.1 设袋中有两个白球(编号为 1,2)和三个黑球(编号为 3,4,5)，现从中不放回地连续任取两个球，试用集合的形式写出下列随机事件：

(1) 第一次取出的是黑球；

(2) 第二次取出的是黑球；

(3) 两次取出的都是黑球.

解 用 (i,j) 表示第一次取出 i 号球，第二次取出 j 号球 $(i,j=1,2,3,4,5)$，所以样本空间为

$$\Omega = \{(i,j): i,j = 1,2,3,4,5; i \neq j\}.$$

这里共有 20 个样本点，它们分别是

$$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),$$
$$(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),$$
$$(3,4),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),$$
$$(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4).$$

设 $A=\{$第一次取出的是黑球$\}$，$B=\{$第二次取出的是黑球$\}$，$C=\{$两次取出

的都是黑球}，则事件 A,B,C 都可以用样本点的集合表示：

$$A=\{(i,j):i=3,4,5,j=1,2,3,4,5;i\neq j\},$$

$$B=\{(i,j):i=1,2,3,4,5,j=3,4,5;i\neq j\},$$

$$C=\{(i,j):i,j=3,4,5;i\neq j\}.$$

显然，这些事件都是样本空间 Ω 的子集.

§1.2 事件的关系和运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件，我们可以通过对简单事件的了解来掌握较为复杂的事件，因此，需要研究事件之间的关系和运算.

1.2.1 事件的关系和运算

由于随机事件实际上是样本空间中的某一个子集，因此，事件之间的关系和运算同集合论中集合之间的关系和运算是完全类似的. 事件之间的相互关系主要有：包含、相等、对立、相容和不相容等，主要运算有：交、并、差与逆.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

2. 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

3. 事件的和(并)

"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"的事件，称为事件 A 与事件 B 的和(或并)，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. 事件 $A+B$ 发生意味着：或 A 发生，或 B 发生，或 A 与 B 都发生.

一般地，事件的和可以推广到多个事件的情形. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，则"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这一事件，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

4. 事件的积(交)

"事件 A 与事件 B 同时发生"的事件，称为事件 A 与事件 B 的积(或交)，记作 $A\cap B$ 或 AB.

一般地，事件的积可以推广到多个事件的情形. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，则"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记

为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.

5. 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件,称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A-B$.

6. 互不相容(或互斥)事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是互不相容(或互斥)事件.

7. 对立事件(逆事件)

对于事件 A,"事件 A 不发生"这一事件,称为 A 的对立事件(或逆事件),记作$\overline{A}$. 易见,$\overline{A}=\Omega-A$,$\overline{\overline{A}}=A$. 显然,事件 A 与$\overline{A}$满足下列关系:

$$A+\overline{A}=\Omega, \quad A\overline{A}=\varnothing \tag{1.1}$$

由于 A 也是$\overline{A}$的对立事件,因此,称 A 与$\overline{A}$互为对立事件. 同时,由定义可知,两个对立事件一定是互不相容事件,但两个互不相容事件却不一定是对立事件.

8. 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j)$,且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,也称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分.

显然,一个随机试验的所有基本事件构成了一个完备事件组;同样,对于任何一个随机事件 A,A 与$\overline{A}$也构成一个完备事件组.

上述事件的各种关系和运算可直观地用图 1.1 来表示.

由于事件的关系与运算和集合的关系与运算完全一致,现将集合论的有关结论与事件的关系和运算的对应情况列于下表:

表 1.1　集合论中的有关结论与事件的关系和运算的对应

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间;必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	元素	样本点(基本事件)
A	子集 A	事件 A
$A\subset B$	A 是 B 的子集	事件 A 发生必导致事件 B 发生
$A=B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A+B$	集合 A 与 B 并集	事件 A 与 B 中至少有一个发生
AB	集合 A 与 B 交集	事件 A 与 B 同时发生
$A-B$	集合 A 与 B 差集	事件 A 发生但 B 不发生
$\overline{A}$	集合 A 的补集	事件 A 的对立事件
$AB=\varnothing$	集合 A 与 B 不相交	事件 A 与 B 互不相容(互斥)

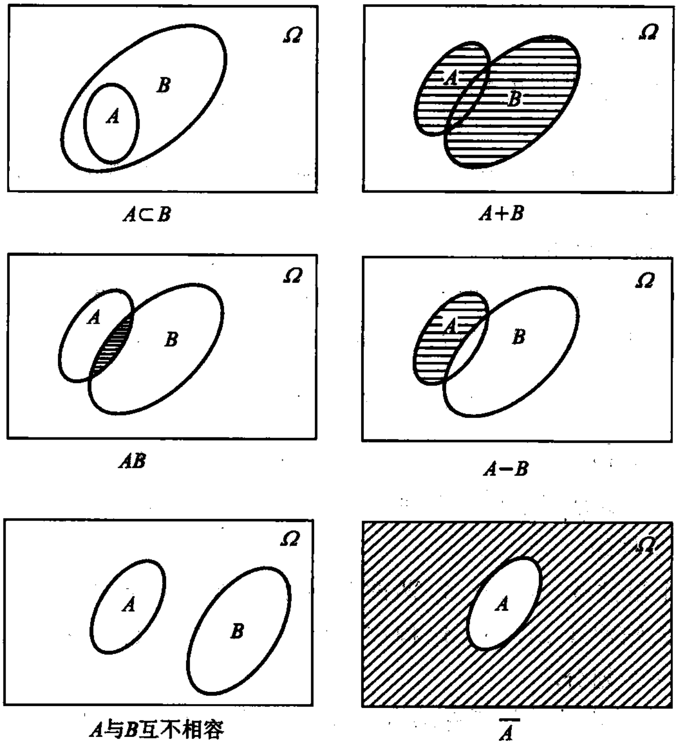

图 1.1　文氏图

1.2.2　事件的运算律

与集合论中集合的运算律一样,事件之间的运算也有相应的运算律. 对于任意事件 A,B,C,它们的运算满足如下性质:

(1) 交换律

$$A+B=B+A,\quad AB=BA; \tag{1.2}$$

(2) 结合律

$$(A+B)+C=A+(B+C),\quad (AB)C=A(BC); \tag{1.3}$$

(3) 分配律

$$(A+B)C=(AC)+(BC),\quad (A-B)C=(AC)-(BC); \tag{1.4}$$

(4) 德摩根(De Morgan)法则

$$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}. \tag{1.5}$$

这些规律都可以推广到任意多个事件的情形.事件运算的性质都不难证明,借助文氏图有助于直观上理解.

例 1.2 对一个目标连续进行三次射击,设 $A_i=\{$第 i 次射击击中目标$\}$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$,$B_j=\{$三次射击中恰好有 j 次击中目标$\}$,$C_k=\{$三次射击中至少有 k 次击中目标$\}$ $(0\leqslant j,k\leqslant 3)$,试用事件 $A_i(1\leqslant i\leqslant 3)$ 表示事件 B_j 和 $C_k(0\leqslant j,k\leqslant 3)$.

解 事件 $\overline{A}_i=\{$第 i 次射击没有击中目标$\}$,因此

$$B_0=\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3,\quad B_1=A_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\,\overline{A}_3+\overline{A}_1\,\overline{A}_2A_3,$$

$$B_2=A_1A_2\,\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1\,\overline{A}_2A_3,\quad B_3=A_1A_2A_3,$$

$$C_0=B_0+B_1+B_2+B_3=\Omega,\quad C_1=B_1+B_2+B_3=A_1+A_2+A_3,$$

$$C_2=B_2+B_3=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3,\quad C_3=B_3=A_1A_2A_3.$$

例 1.3 设 A,B,C 为三个事件,试用语言描述下列事件:

(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) $\overline{A+B}$;

(3) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$;

(4) $A(B+C)$.

解 (1) A 发生而 B 和 C 都不发生;

(2) A 和 B 都不发生;

(3) A,B,C 至多有两个发生;

(4) A 发生且 B 和 C 至少有一个发生.

例 1.4 已知事件 A 和 B,满足条件:

$$(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{(A+X)(\overline{A}+X)}=B,$$

求事件 X.

解 根据事件的运算及其性质,可知

$$\begin{aligned}
&(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{(A+X)(\overline{A}+X)}\\
&=(A+\overline{X})(\overline{A}+\overline{X})+\overline{(A+X)}+\overline{\overline{A}+X}\\
&=A\overline{A}+A\overline{X}+\overline{X}\,\overline{A}+\overline{X}\,\overline{X}+\overline{A}\,\overline{X}+A\overline{X}\\
&=(A+\overline{A})\overline{X}+\overline{X}+(\overline{A}+A)\overline{X}\\
&=\overline{X}+\overline{X}+\overline{X}=\overline{X}=B.
\end{aligned}$$

因此,$X=\overline{B}$.

§1.3 随机事件的概率

对于一个事件来说,我们知道在一次试验中它可能发生,也可能不发生,因此我们希望知道该事件在一次试验中发生的可能性有多大. 我们希望用一个合适的数值来表示上述事件发生的可能性大小,这个数值就称为事件发生的概率. 简言之,事件的概率就是事件发生的可能性大小的数值度量,其意义与长度、面积、体积和质量等一样. 如何度量一个事件发生的概率,我们首先引入事件的频率的概念.

1.3.1 事件的频率

定义 1.1 设在 n 次重复试验中事件 A 出现了 n_A 次,则称比值$\frac{n_A}{n}$为事件 A 发生的频率,记作$f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}. \tag{1.6}$$

显然,频率$f_n(A)$的大小表示了在 n 次试验中事件 A 发生的频繁程度. 频率大,事件 A 发生就频繁,因此在一次试验中 A 发生的可能性就大,也就是事件 A 发生的概率大,反之亦然.

由频率的定义,不难证明频率具有下列性质:

(1) 非负性: 对任何事件 A,$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性:$f_n(\Omega)=1$;

(3) 有限可加性: 若事件 A 与事件 B 互不相容,则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$.

人们在实践中发现: 在相同条件下重复进行同一试验,当试验次数 n 较大时,事件 A 发生的频率$f_n(A)$具有一定的"稳定性",也就是说频率$f_n(A)$在某个确定的数值上下摆动. 一般说来,试验次数 n 越大,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$就越接近某确定的数值,频率的这种"稳定性"就是我们前面所讲的统计规律性. 因此,事件 A 发生的可能性大小就可以用上述频率的稳定值来描述. 我们定义概率为频率的稳定值,并称这一定义为概率的统计定义.

例 1.5 为验证频率的稳定性,历史上许多科学家进行了掷硬币的试验,表 1.2 记录了几个掷硬币的结果:

表 1.2　掷硬币试验

试验者	投掷次数	正面出现的次数	正面出现的频率
德摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(K. Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(K. Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

从表 1.2 的结果可以看出,多次重复掷硬币,正面出现的频率都十分接近 0.5,这也同样证明了频率的稳定性.

概率的统计定义虽然直观,但不便于实际使用,因为我们不可能对每一个事件都做大量的重复试验,从中得到频率的稳定值. 特别是对某些具有破坏性的试验(如测试灯泡的使用寿命等),从经济意义考虑就更不可能进行大量重复试验,这就限制了它的应用. 此外,从数学上看,概率的统计定义也不够严密,不便于在理论研究上使用.

1.3.2　概率的公理

虽然人们很早就进行了概率的计算,但在很长的时间内概率论还不是一门成熟的数学学科,包括概率在内的一些基本概念还没有明确的数学定义. 直到 1933 年,俄罗斯数学家柯尔莫戈洛夫(Kolmogorov)在综合前人成果的基础上,提出了概率的公理化体系,从此,概率论才成为一个严谨的数学学科. 所谓概率的公理是指经实验证实而无须逻辑证明的概率最基本的性质.

定义 1.2(概率的公理)　设 E 是随机试验,Ω 是其样本空间,对 E 的每一个事件 A,都赋予一个实数 $\mathrm{P}(A)$,若 $\mathrm{P}(A)$ 满足下列三条公理,则称 $\mathrm{P}(A)$ 为事件 A 的概率:

(1) 非负性: 对任意一个事件 A, $\mathrm{P}(A) \geqslant 0$;

(2) 规范性: 对于必然事件 Ω, $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性: 对于任意可列个两两不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,有

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) \\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(A_n) + \cdots. \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.3.3　概率的性质

由概率的公理,可推导出概率的一些重要性质.

性质 1 不可能事件的概率为零,即 $P(\varnothing)=0$.

证明 因为 $\Omega=\Omega+\varnothing+\varnothing+\cdots$,显然这是可列个两两不相容事件,由公理 3,有

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

由于 $P(\varnothing)$非负,因此必有 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1.8}$$

证明 $A_1+A_2+\cdots+A_n=A_1+A_2+\cdots+A_n+\varnothing+\varnothing+\cdots$,由于 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\varnothing,\varnothing,\cdots$,是可列个两两不相容事件,由公理 3 和性质 1,知

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=&P(A_1)+P(A_2)+\cdots+\\&P(A_n)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,\end{aligned}$$

因此

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3 对于任意事件 A,有

$$P(A)=1-P(\overline{A}). \tag{1.9}$$

证明 因为 $\Omega=A+\overline{A}$,且 $A\overline{A}=\varnothing$,所以由公理 2,有

$$1=P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A}),$$

由此推得

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

性质 4 对于任意事件 A 和 B,有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB). \tag{1.10}$$

特别地,若 $A\supset B$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B). \tag{1.11}$$

证明 易见 $A=(A-B)+AB$,因为$(A-B)$与 AB 不相容,故由性质 2,有

$$P(A)=P(A-B)+P(AB),$$

即 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地,若 $A\supset B$,则 $B=AB$,所以