函授本科、专科学生使用

高等数学自学指导

编著　刘国臣

中南林学院

高等数学自学指导

（本、专科函授生用）

刘国臣 编

中南林学院

说　明

本自学指导是为林学院有关专业的函授生学习高等数学而编写的，是与北京林业大学编的《高等数》一书配套使用的。

本书各章按内容提要、基本要求、例题分析及疑难解析，作业布置四部分写出。凡标有*号的部分可以不看。对专科函授生主要学习一元微积分和行列式及矩阵代数，即第一章至第六章，第十一章，第十二章，其它各章除偏导数外可视学时多少、学员实际情况选学或删除，所布置的习题，在学完每章后要及对完成。另外还附有三次测验作业题，这三次测验要求学员独立完成，并交学院函授部。

书中不妥之处，敬请指正。

编者　一九九一年七月

目　录

第一章 函 数

重点：函数定义及性质，函数定义域的确定，复合函授概念，基本初等函数及其图形.

难点：函数概念，复合函数概念.

一、内 容 提 要

1、常量与变量

2、函数

定义：设在某一过程中，有两个变量x和y，如果对于变化范围内的每一个x值，y按一定的规则总有一个或多个确定的值与之对应，则称y是x的函数。记作$y=f(x)$，并称x为自变量，y为因变量．自变量的取值范围叫函数y的定义域，因变量相应的取值范围叫函数y的值域.

由定义可知函数有三要素：（1）定义域；（2）对应规则；（3）值域．而前两要素是基本的，它们决定着第三要素.

3、函数性质

（1）奇偶性　设$y=f(x)$的定义域关于原点对称，

若$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；若$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数.

偶函数的图形对称于y轴，奇函数的图形对称于坐标原点.

（2）单调性

若函数$y=f(x)$在区间$(a、b)$内随x增加而增加，即设(a, b)内任意两点，$x_1<x_2$，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在(a, b)内单调增加.

若函数$y=f(x)$在$(a、b)$内随x增加而减小，即设$(a、b)$内任意两点，$x_1<x_2$，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在$(a、b)$内单调减小.

（3）有界性

设函数$y=f(x)$在D上有定义（D可以是$f(x)$的整个定义域也可以是定域的一部分），若存在一个正数M，使当x取D内任意一值对，对应的函数值$f(x)$都满足

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称$f(x)$在D内是有界的，若这样的M不存在就称$f(x)$在D内是无界的.

（4）周期性

若对函数$y=f(x)$存在一个正数l，使得

$$f(x+l)=f(x)$$

则称$f(x)$是以l（l是满足此关系的最小正数）为周期的周期函数.

4、反函数

设已给y是x的函数$y=f(x)$，若将y作为自变量，x当作函数所确定的函数$x=\varphi(y)$叫做

函数$f(x)$的反函数．而$f(x)$叫直接函数．

由于习惯上自变量用x表示，因变量用y表示，所以把$x=\psi(y)$记为$y=\varphi(x)$．

5、初等函数

(1)基本初等函数：常数函数$y=c$，幂函数$y=x^{\mu}$（μ为实数），指数函数$y=a^x$($a<0$且$\neq 1$)，对数函数$y=log_a x$($a>0$，$a\neq 1$)，三角函数，反三角函数．

(2)复合函数

设y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\psi(x)$．设D表示$\psi(x)$的定义域或其一部分，若对于x在D上取值时所对应的u值，函数$y=f(u)$是有定义的，则y成为x的函数，记为

$$y=f[\psi(x)]$$

这个函数叫做由函数$y=f(u)$，$u=\psi(x)$复合而成的复合函数，其定义域为D．

例如$y=lnu$，$u=x^2$　则复合函数为$y=lnx^2$

(3)初等函数

初等函数是常数和基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合步骤构成的并由一个式子表示的函数．

此外，还有双曲函数，一般了解即可，它也是初等函数．

二、基　本　要　求

1、掌握函数的概念，理解函数三要素及函数符号的意义．

2、了解函数的单调性、奇偶性、有界性．

3、熟练地掌握基本初等函数及其图形．

4、搞清复合函数概念，能熟练地分析复合函数的复合过程．

5、了解反函数概念．

6、了解分段函数，会作分段函数的图形．

三、例题分析及疑难解析

1、两个函数$f(x)$与$g(x)$是否完全相同，取决于它们的定义域与对应法则是否完全相同．

例1、指出下列各对函数$f(x)$与$g(x)$是否恒等．

(1)　　$f(x)=\dfrac{2x}{x}$，$g(x)=2$

(2)　　$f(x)=lnx^2$，$g(x)=2lnx$

(3)　　$f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

解　(1)不相同，∵$f(x)$的定义域是$(-\infty,\ 0)$和$(0,\ +\infty)$，而$g(x)$的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$．

(2)不相同，∵$f(x)$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，而$g(x)$的定义域是$(0,\ +\infty)$，当$x>0$时，两个函数是相同的．

这里，我们问，不是有公式$lna^2=2lna$吗？现在为什么不能用了？要知道，公式$lna^2=$

$2\ln a$成立的条件是等式两边都有定义．当$a<0$时，右边就没有定义因此不能用了．

（3）相同，∵$f(x)$与$g(x)$的定义域和对应法则完全相同（从而值域也相同），∴$|x|=\sqrt{x^2}$．

2、函数符号$y=f(x)$可作如下的理解，$f(\quad)$表示了函数关系中的对应规则，而$f(x)$就是指这个规则作用在x上．如$f(x)=x^2+3x+4$，则$f(\quad)$是指$f(\quad)=(\quad)^2+3(\quad)+4$，而$f(x)$就是将$x$放到括号（　）之中．$x$是什么，括号中就放什么．如$f(0)$，就是括号中放0，即$f(0)=(0)^3+3(0)+4=4$，又如$f(a+1)$，就是在括号中放$a+1$，即

$$f(a+1)=(a+1)^2+3(a+1)+4$$

例2　　$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求$f(x+1)$，$f[f(x)]$

解：

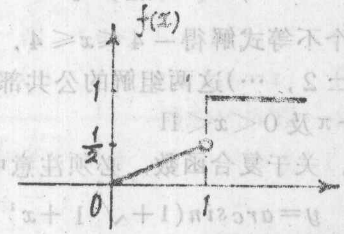
$$f(x+1)=\frac{1}{1-(x+1)}=\frac{1}{-x}$$

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-[f(x)]}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$$

3、关于分段函数，分段函数是由几个式子表示的一个函授，不是几个函数，它不是初等函数．对于分段函数，要搞清楚每一个式子所对应的自变量的取值范围．在图形上要用"空圈"和"实点"来区别分界点．"空圈"表示曲线不包括此点，而"实点"表示曲线包括这一点．

例3、画出

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$



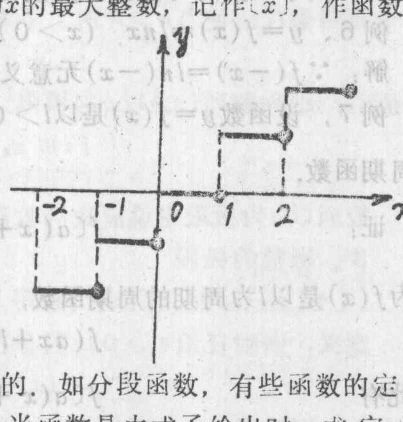
的图形，并求$f(\frac{1}{2})$，$f(3)$．

解：$f(x)$的图形如右：

例4、设x为任一实数，不超过x的最大整数简称为x的最大整数，记作$[x]$，作函数$y=[x]$的图象．

解

$$y=\begin{cases}\cdots & \cdots\\ -2 & -2\leqslant x<-1\\ -1 & -1\leqslant x<0\\ 0 & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & 2\leqslant x<3\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$



4、关于函数的定义域，有些函数的定义域是自明的．如分段函数，有些函数的定义域是由实际情况确定的，如自变量x表示重量时则$x\geqslant 0$．当函数是由式子给出时，求定义域要注意某些运算对函数的限制：（a）　$y=\dfrac{1}{f(x)}$，则$f(x)\neq 0$　（b）　$y=\sqrt[n]{f(x)}$，

n为函数，则$f(x)\geqslant 0$；(c) $y=\log_a f(x)(a>0,\ a\neq 1)$则$f(x)>0$，$(d)$ 函数为三角函数或反三角函数时，则需要由这些函数的特定的定义域来确定，如$y=\arcsin f(x)$，则$|f(x)|\leqslant 1$，(e)当函数比较复杂时，需将它分解成若干个简单函数，分别求出它们的定义域，然后再解相应的联立不等式组.

例5，求下列函数的定义域

1° $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$；　2° $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；

3° $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$.

解：1° $\left|\dfrac{x-2}{3}\right|\leqslant 1$，　$|x-2|\leqslant 3$

$-3<x-2<3$，　即 $-1\leqslant x\leqslant 5$

2°，当$\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$时，函数有定义，而这就要求$\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，即

$(x-1)(x-4)\leqslant 0$

解得：　$1\leqslant x\leqslant 4$

3° 当$\sqrt{16-x^2}$与$\lg\sin x$同时有定义时，函数才有定义，这就要求满足：

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}$$

由第一个不等式解得$-4\leqslant x\leqslant 4$，由第二个不等式解得 $2n\Pi<x<(2n+1)\Pi$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$这两组解的公共部分就是上述不等式的解，因此，函数的定义域为 $-4\leqslant x<-\pi$及$0<x<\Pi$

5、关于复合函数，必须注意中间变量的值域必须属于外层函数的定义域.

如 $y=\arcsin(1+\sqrt{1+x^2})$就没有意义。因为不论$x$取什么实数，$1+\sqrt{1+x^2}$都不能在反正弦的定义域〔$-1$，$1$〕之内

6、关于函数的奇偶性，周期性，我们给出两个例子.

例6、$y=f(x)=\ln x$　$(x>0)$，试判断其奇偶性.

解：$\because f(-x)=\ln(-x)$无意义，$\therefore y=\ln x$，$(x>0)$是非奇非偶函数.

例7，设函数$y=f(x)$是以$l>0$为周期的周期函数，则$f(ax)(a>0)$是以$\dfrac{l}{a}$为周期的周期函数.

证：　$$f\left[a\left(x+\frac{l}{a}\right)\right]=f(ax+l)$$

因为$f(x)$是以l为周期的周期函数，所以

$$f(ax+l)=f(ax)$$

因此有　$$f\left[a\left(x+\frac{l}{a}\right)\right]=f(ax)$$

故 $f(ax)$是以$\dfrac{l}{a}$为周期的周期函数.

思考，$y=\cos 2x$的周期.

7 基本初等函数的定义、性质、图象要熟练掌握，它是微积分的基础. 书上列出一节，以供同学复习使用.

四、习 题 布 置

习题一：2，（2）（6）（8）（10） 3，（3） 9 15（2）（6） 17（2）（4）（6） 18（4）（5） 23（2）

本科选作题：5，20，21（1）（3）

第二章 极限与连续

重点：极限与无穷小概念；连续性概念；求极限方法.

难点：极限概念.

一、内 容 提 要

1、绝对值定义，性质

$$|x|=\begin{cases}x, & 当x\geqslant 0时\\ -x, & 当x<0时\end{cases}$$

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

$$|xy|=|x||y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$$

若 $|x|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 则 $-\varepsilon<x<\varepsilon$，反之也对.

若 $|x-x_0|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 则 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$，反之也对

2、数列的极限

(1)数列的定义，按一定顺序排列的无穷多个实数

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n,\ \cdots$$

叫做数列，记作$\{x_n\}$

(2)数列极限的定义：$\{x_n\}$是一个数列，a是一个实数，若对于任给的正数ε，总存在一个正整数N，使当$n>N$时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

恒成立，则称数列$\{x_n\}$以a为极限．记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a(当n\to\infty时)$$

数列以a为极限也说成数列收敛于a，数列没有极限也说成数列是发散的.

3、函数的极限

(1) $x\to\infty$时，$f(x)$的极限

定义：若对任给$\varepsilon>0$，若存在$M>0$，使当$|x|>M$时，不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称当$x\to\infty$时$f(x)$以A为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

（2）当$x\to x_0$时，$f(x)$的极限

定义，若对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

恒成立，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$以A为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 f(x)\to A(当 x\to x_0 时)$$

（3）函数的左、右极限

4、无穷小量、无穷大量

（1）定义

（i）若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(或x\to\infty)}} f(x)=0$，则称$f(x)$为当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小量．简称无穷小．

（以上定义也可用ε—δ或ε—N语言叙述）．

（ii）若对任给$M>0$，存在$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，不等式

$$|f(x)|>M$$

恒成立，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$是无穷大量．记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$$

同样可定义当$x\to\infty$时，$f(x)$为无穷大量．

（2）相互关系

无穷大的倒数是无穷小，无穷小（不恒为0）的倒数是无穷大．

（3）几种定义的对照表

记　号	任给	存在某个正数	当自变量变化到	恒有不等式成立	结　论
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$	$\varepsilon>0$	N（正整数）	$n>N$	$\|x_n-a\|<\varepsilon$	当$n\to\infty$时 $\{x_n\}$的极限为a
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	M	$\|x\|>M$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	当$x\to\infty$时 $f(x)$以A为极限
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\varepsilon>0$	δ	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\varepsilon$	当$x\to x_0$时 $f(x)$以A为极限
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$	$\varepsilon>0$	N	$\|x\|>N$	$\|f(x)\|<\varepsilon$	当$x\to\infty$时 $f(x)$为无穷小
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$	$\varepsilon<0$	δ	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)\|<\varepsilon$	当$x\to x_0$时 $f(x)$为无穷小
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	$M>0$	N	$\|x\|>N$	$\|f(x)\|>M$	当$x\to\infty$时 $f(x)$为无穷大
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	$M>0$	δ	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)\|>M$	当$x\to x_0$时 $f(x)$为无穷大

(4)极限与无穷小

设$\alpha(x)$表示给定趋向下的无穷小，

若 $\lim f(x)=A$ 　　则 $f(x)=A+\alpha(x)$

若 $f(x)=A+\alpha(x)$， 　　则 $\lim f(x)=A$

(5)无穷小运算、设$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0$，$\lim f(x)=A$

$$\lim[\alpha(x)\pm\beta(x)]=0$$

$$\lim[\alpha(x)\beta(x)]=0$$

$$\lim\frac{\alpha(x)}{f(x)}=0$$

(6)无穷小比较

(i)高阶、同阶、等价无穷小定义

(ii)定　理

设$\alpha(x)\sim\alpha'(x)$，$\beta(x)\sim\beta'(x)$且$\lim\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$存在

则
$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}$$

5、极限运算及存在准则

(1)极限四则运算定理（自写）

(2)极限存在准则

准则Ⅰ，若在点x_0的某个邻域内(除去点x_0)

有 $$f(x)\leqslant\psi(x)\leqslant g(x)$$

而且 $$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=A$$

则 $$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A$$

准则Ⅱ，单调有界函数有极限

(3)两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

6、函数的连续性

(1)定义，设函数$y=f(x)$在x_0点某个邻域有定义，当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限存在，且等于$x=x_0$处的函数值$f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称$f(x)$在点x_0处是连续的，否则称$f(x)$在x_0处间断或不连续.

(以上定义也可改用增量形式叙述)

(2)函数连续的条件：函数在x_0的某邻域有定义；函数$f(x)$在x_0处的极限存在；$f(x)$在x_0处的极限值$\lim f(x)$等于该处的函数值$f(x_0)$，三条中有一条不满足，$f(x)$就在x_0处间断.

(3)左连续、右连续

若$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$点右连续；若$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处左连续.

(4)初等函数的连续性

(i)连续函数的四则运算

(ii)复合函数的连续性

(iii)反函数的连续性

(iv)初等函数在其定义域内是连续的

(5)闭区间上连续函数的性质

(i)最大值与最小值定理：若函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，则它在$[a, b]$上必定取得最小值及最大值至少各一次.

(ii)介值定值：设$f(x)$在$[a, b]$上连续，M与m分别为$f(x)$在$[a, b]$上的最大值最小值，若C是满足$m\leqslant C\leqslant M$的一个数，则在$[a, b]$上至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)=C$$

特别是$f(a)$，$f(b)$异号，则在$[a, b]$内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)=0$

(6)连续性与极限

(i)若$f(x)$在x_0点连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$可见在$f(x)$的连续点处，运算符号与极限符号可交换位置.

(ii)初等函数在其定义域内任意一点的极限值，等于该点的函数值.

二、基 本 要 求

1、掌握绝对值定义、性质

2、理解数列极限、函数极限的定义，一般了解极限的"ε—N""ε—δ"的定义. 对于专科生可以不看"ε—N""ε—δ"这种定义.

3、掌握无穷小的概念、性质，了解无穷大与无穷小的关系及无穷小阶的概念.

4、能正确运用极限的四则运算法则

5、会用两个重要极限求有关极限

6、知道极限存在准则

7、了解函数在一点连续和间断的概念，对于某些具体函数能判明它的连续区间，找出间断点.

8、会利用函数的连续性求函数的极限

9、一般了解闭区间上连续函数性质，

三、例题分析及疑难解析

1、关于绝对值

例1，将不等式$-1<x<5$化为带有绝对值的不等式.

分析：先找出区间$(-1,\ 5)$的中点，再求出区间长度的一半，即可化为带有绝对值的不等式.

解：设区间中点为x_0，则

$$x_0=\frac{5+(-1)}{2}=2$$

区间长度的一半设为l，则

$$l=\frac{5-(-1)}{2}=3$$

所以带绝对值不等式为

$$|x-2|<3$$

它也叫点2的3邻域.

依 $|x|<a$与$-a<x<a$等价关系容易将$|x-2|<3$化为不带绝对值的不等式.

2、数列$\{x_n\}$以a为极限的$\varepsilon-N$定义较难理解．要理解$\varepsilon-N$需明确下列几点

(i) ε用来刻划列数$\{x_n\}$与它的极限a的接近程度的，N用来刻划$\{x_n\}$的变化过程，N是由ε的给定而取定的，一般说，当ε减小时，N相应增大.

(ii)所说“当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$”系指下列无穷多个不等式同时成立：

$$|x_{N+1}-a|<\varepsilon,\ |x_{N+2}-v|<\varepsilon,\ \cdots,\ |x_{N+P}-a|<\varepsilon,\ \cdots\ (P\text{为自然数})$$

数列$\{x_n\}$从第$N+1$项开始的一切点都落入区间$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$内，而在$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$以外的点只有有限个.

(iii)对于一个数列$\{x_n\}$的极限，重要的是后面无穷多项，对于前面有限项去掉或作一些改变，都不影响$\{x_n\}$的极限．$\{x_n\}$如有极限，只能是唯一的.

3、函数$f(x)$以A为极限的$\varepsilon-\delta$定义较难理解，要理解$\varepsilon-\delta$定义需明确下列几点：

(i) ε用来刻划$f(x)$与它的极限A的接近程度，δ用来刻划x和x_0之间的接近程度，ε是任意给定的，δ是随之而确定的.

定义中的不等式$0<|x-x_0|<\delta$即表示x与x_0的距离小于δ，且又表示$x\neq x_0$，所以在求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时，$f(x)$在$x_0$点可以没有定义．这里研究的是$f(x)$在$x_0$点附近的变化趋势.

(ii)函数的极限值取决于自变量的变化趋势，在不同的变化趋势下函数有不同的极限.

(iii)当自变量在变化过程中，$f(x)$极限不存在，包括以下三种情况

(a) $$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$$

(b) $$\lim_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+}f(x)$$

(c)无限振荡，如$\lim\limits_{x\to 0}sim\dfrac{1}{x}$，函数值在$-1$与$1$之间振荡，

注意，$f(x)$在x_0处极限存在的充要条件是$f(x)$在该点的左、右极限存在且相等.

4、分段函数在分界点的极限，必须要分别求出它的左极限和右极限，然后再确定它的极限.

例2、设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x, & 0<x\leqslant 1\\ 1, & 1<x<4\end{cases}$$

讨论$f(x)$在$x\to 0$和$x\to 1$时的极限.

解：$x\to 0$时，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$

∵ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

∴ $x\to 0$时，$f(x)$的极限不存在.

$x\to 1$时，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1$

∵ $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

∴ $x\to 1$时，$f(x)$的极限为1.

5、说一个函数$f(x)$是无穷小或无穷大，一定要指出自变量的趋向. 如对$f(x)=\dfrac{1}{x}$不能笼统地谈$\dfrac{1}{x}$是无穷小或无穷大. 当$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷大. $x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷小.

注意，很大很大的数不是无穷大，很小很小的数(非0)不是无穷小.

6、极限求法

(1)利用极限四则运算法则

(2)利用夹逼定理求

(3)利用两个重要极限求

(4)利用无穷小性质定理

(5)利用连续性

(6)利用洛必达法则(导数应用这一章讲)

例3、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$

解：

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^2})}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

本题$x\to\infty$时原式的分子与分母的极限均为无穷大（不存在），因此第一步不能用除法法则．必须分子、分母同除以x^2，而第二个极限的分子、分母的极限均存在，且分母的极限不为零，则可用四则运算法则计算．

例4、求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

解、∵分母的极限为零，∴不能用商的极限运算法则．将分子有理化．

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}$$

本题用分子有理化方法将函数表达式变形．有时需要分母有理化，有时需要分子、分母同乘一个或几个共轭因式．将函数表达式变形．表达式变形的方法很多，除有理化外．还有：因式分解、约分，变量替换，三多恒等变换等．

例5、利用夹逼定理求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

解：把分母中的1，2，…，n都改为1，与都改为n后，显然有

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

所以 $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

例6，求$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}$

解：若$x=0$，则　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin 0=0$

若$x\neq 0$，则　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x=1\cdot x=x$

（当$n\to\infty$时，$\frac{x}{2^n}\to 0$）

例7、$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{kx}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x]^k=e^k$

再看一例，$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1+\frac{1}{x})^{kx} = \ln\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{kx}\right] = \ln e^k = k$

注意：对于两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$（或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$），不但要注意到它们的函数形式，自变量的变化趋向，而且要注意到它们的特点，才能正确运用它们计算有关函数的极限．

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 的特点是"$\frac{0}{0}$"型．

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 的特点：它是一个幂指函数，其底为 1 加一个无穷小量，指数为无穷大，且无穷大与无穷小互为倒数．

例 8、求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5\cos 4x}{x}$

解：当 $x\to\infty$ 时，$\cos 4x$ 的极限不存在，但

$$|\cos 4x| \leqslant 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\frac{5\cos 4x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}\cdot\cos 4x = 0$$

其理由是无穷小与有界量积的极限为零．

例 9、利用函数的连续性求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x^2 + x\ln(\pi+x)}{\sin x}$

解：由函数连续性定义知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$．对于本题 $f(x)$ 在 $x_0 = \frac{\pi}{4}$ 处连续，故有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{x^2 + x\ln(\pi+x)}{\sin x} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\ln\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} + \ln\frac{5\pi}{4}\right)$$

8、间断点的分类

第一类间断点

(i)　$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$，但 $A \neq f(x_0)$

例 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$　　$x_0 = 1$ 处为间断点

(ii)　$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$，但 $f(x)$ 在 x_0 处无定义．例 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$，$x_0 = -3$ 为间断点．

(iii)　$f(x_0 - 0) = A$，$f(x_0 + 0) = B$，但 $A \neq B$．

例　$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-2}, & x < 1 \\ 4x & x \geqslant 1 \end{cases}$　　$x_0 = 1$ 处为间断点