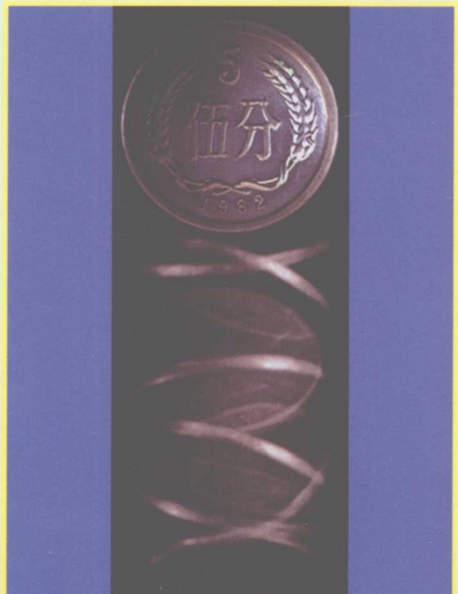
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

概率论

第二版

杨振明 编



科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
南开大学数学教学丛书

概　率　论

（第二版）

杨振明　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为南开大学数学教学丛书之一《概率论》的第二版. 内容包括: 事件与概率、随机变量、数字特征与特征函数、极限定理等. 本书是作者多年教学工作经验的总结,内容丰富,深入浅出,论述严谨,每一节后都有习题,书末附有部分习题答案,有助于读者理解书中内容,第二版对第一版中的文字叙述,公式编排等作了改进,内容也作了更新,并重新审定了习题,使本书更具适用性.

本书可供高等学校数学系学生作为教材,也可供数学教师、科技人员阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论/杨振明编. -2 版 —北京: 科学出版社, 2007
(普通高等教育“十一五”国家级规划教材·南开大学数学教学丛书)
ISBN 978-7-03-018385-9

Ⅰ.概… Ⅱ.杨… Ⅲ.概率论-高等学校-教材

Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 159674 号

责任编辑: 林 鹏 李鹏奇 王 静/责任校对: 包志虹
责任印制: 张克忠/封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1999 年 1 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)
2008 年 3 月第 二 版 印张: 13 3/4
2008 年 3 月第八次印刷 字数: 256 000
印数: 19 301—22 300

定价: 24.00 元

丛书第二版序

《南开大学数学教学丛书》自1998年面世以来，事情有了许多变化. 有两个大变化使我们决心要修改并再版这套丛书.

正如我们的初衷一样，这期间得到了许多老师、同学、同行的帮助，使这套丛书相继列入了“中国科学院规划教材”，“全国十一五规划教材”. 同时，我们的教学与当初也不尽相同. 为了继续得到大家的帮助，与大家继续交流，对这些书做一些修改是很有必要的.

2004年12月3日陈省身先生逝世. 1972年陈省身先生回国后提出了中国在21世纪将会成为“数学大国”，并为此团结广大的数学界的力量而努力奋斗，终于实现了这个目标. 2002年，第24届国际数学家大会于8月20日至28日在中国北京举行并取得圆满成功. 这是中国第一次主办国际数学家大会，也是发展中国家第一次主办这一大会. 在大会期间，陈省身先生曾说，中国已经成为“数学大国”. 陈省身先生还说:“21世纪的数学的发展是很难预测的，它一定会超越20世纪，开辟出一片崭新的天地，希望中国未来的数学家能够成为开辟这片新天地的先锋.”

这套丛书的产生是与陈省身先生倡导和推动南开大学数学试点班的建立和教学改革密不可分的. 陈省身先生的逝世既使我们无比悲痛和深切怀念，也激发我们这些绝大多数过花甲近古稀的编著者们为中国的数学，数学教育继续尽一些微薄之力. 修改这套丛书是表达我们这种愿望的方式.

在数学已成为高科技的基础和现代文明标志的今天，我们不能满足于“中国数学的平等和独立”，即数学大国的地位，而是要成为开辟数学新天地的先锋，即要争取“数学强国”的地位. 为使今天的“数学大国”成为明天、后天以至永远的“数学强国”，当然要从多方面努力. 数学教育是不可或缺的重要方面. 我们既需要高质量的、稳定的数学教育，又需要不断推陈出新、不断发展的数学教育. 这是一个艰巨的任务. 这个任务历史地落在一代又一代的年青人的肩上.

在中国的数学教育上，也就是争取成为“数学强国”的过程中，我们如果能够“润物”，虽然“无声”也将心满意足. 因此我们既高兴看到《南开大学数学教学丛书》今天能够生存和发展，又更高兴地期待明天它被更新、更好的教材取而代之.

中国科学出版社以前支持我们出版了这套丛书，现在继续支持丛书的第二版，做了更多的工作. 我们致以深切的感谢，并希望以后合作得更好，更愉快. 当然，我们仍然殷切期望老师们，同学们及同行们的继续帮助.

全体编著者
2007年1月

丛书第一版序

海内外炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国，也就是“实现中国数学的平等和独立”[1]．平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的，要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生．这批人不在多，而在精，要层次高．也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强．

20世纪80年代中期，国家采纳了陈省身先生的几个建议．建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生，需要建立数学专业的试点班．经过胡国定先生等的努力，1986年南开大学建立了数学专业的试点班．这些做法取得了成功，并在基础学科的教学中推广．1990年全国建立“国家理科基础学科研究和教学人才培养基地”，其后南开大学数学专业成为基地之一．从1986年到现在的10余年中南开数学专业是有成绩的，例如他们4次参加全国大学生数学竞赛获三次团体第一，一次团体第三．在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖．毕业生的百分之八十继续攻读研究生，其中许多人取得了很好的成绩．

当然，取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开的，是与国内外同行们的支持与帮助分不开的．如杨忠道、王叔平、许以超、虞言林、李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订，或到南开任教等等．有了他们的指导、帮助与支持，南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验，并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新．

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材，诸位编者们长期在南开数学专业任教，不断地把自己的心得体会融合到基础知识和基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材．可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来、“改”出来的，凝聚了我们的一片心血．这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点是：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学，同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力．

我们要感谢科学出版社主动提出将这套教材出版．这对编者是件大好事．编者

1) 陈省身：在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上的讲话．

虽然尽了很大努力，但一则由于编者的水平所限，二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中，因此这套教材中缺欠和不足肯定存在．我们诚挚希望各位同行不吝指正，从而使编者更明确了解教材及教学中的短长，进而扬长避短，改进我们的教学．同时通过这套教材也可向同行们介绍南开的教学经验以供他们参考，或许有益于他们的工作．

我们再次感谢帮助过南开的前辈、同行们，同时也希望能继续得到他们和各位同行的帮助．办好南开的数学专业，办好所有学校的数学专业，把中国数学搞上去，使中国成为数学大国是我们的共同愿望！这个愿望一定能实现！

全体编著者

1998 年6 月于南开大学

第 二 版 前 言

本教材第一版已经出版 5 年多了．由于当时编写过程比较仓促，因此出现了不少疏误．这次再版，首先是尽量地改正这些疏误，并且努力在文字叙述、公式编排和插图绘制等方面做出比较全面的改进．

与典型的概率论教材一样，本书包含事件与概率、随机变量、数字特征与特征函数、极限定理共 4章．重点在介绍概率论的直观背景和解决初等概率问题的基本方法，为学习专业课程打下基础．本教材不假定学生已学过实分析或其他测度论课程．但是众所周知，没有这些基本知识，要阐明概率的数学理论是不大可能的，所以本书也试图简明通俗地介绍这方面的一些必备知识，除有关测度扩张的定理之外，基本做到"自圆其说"．书中这些内容的节题上均已用星号 ★ 标出(但是它们并不难)．有些读者可以先记住其中的一些结论，而略去其证明，在以后的应用中逐步加深理解．

几年来教学实践中对讲授内容的更新，在第二版中也有所体现．例如，第一章增添了单调类定理一节，扼要地叙述集合形式的单调类定理，并且在第二章，运用这个定理给出随机变量独立性等价条件的一个简洁又严格的证明．虽然这些内容篇幅不大，但是它体现了作者在强调理论上严格完整、追求基础课教材要“基本作到自圆其说”的方向上又前进了一步．在第二章，作为求随机变量函数分布的例题，推导出数理统计中的三种重要分布．在第三章介绍多元正态的线性变换以后，增加了证明正态总体样本均值与样本方差的独立性一节．这些新增内容为学习随机过程和数理统计打下坚实的基础．

这次再版，我把教材中的习题又重新审定一遍，删改了较多的题目．但是习题数量仍然较大，这一方面是本课程特点所决定，也体现出我们对于习题的重视，希望为学生提供更多的练习机会．恳请老师们务必把练习机会留给学生，千万不要编印习题解答之类的材料．这种时下流行的“速食品”或许可以为某些人解决一时的燃眉之急，而对于培养学生的学习与解决问题的能力是十分不利的．

本书出版以来的 5 年中，使用本教材的老师和同学们提出了许多宝贵意见．特别是我校数学科学学院王公恕教授，他的热情真挚的指正，使本书的第二版增色许多，在此表示深深的谢意．作者还要衷心地感谢我院的年轻教授孙文昌博士，几年来，他热心地指导我学习使用 MikTex 软件，耗费了不少时间与精力，使本书的排印

质量有了较大的提高．最后，非常感谢科学出版社对我们这套教材的大力支持，感谢诸位编辑为本书的出版与再版所付出的辛勤劳动．

希望这本教材能够继续得到大家的支持和指正．

杨振明

2004 年 6 月于南开大学

目　　录

第一章 事件与概率

1.1 基本概念

1.1.1 随机现象

客观世界中存在着两类现象，一类是在一定条件下必然出现的现象，称之为*必然现象*；另一类是在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称作*随机现象*.

必然现象的例子非常多．例如，在标准大气压下，100° C 的纯水必然沸腾；带异性电荷的小球必然相互吸引；在恒力作用下的物体必然作匀加速运动等．以往的各种数学学科的主要内容就是研究必然现象中的数量规律．例如，在重力作用下，物体的位移随时间变化的函数 $x(t)$，就由二阶微分方程 $x''(t) = g$ 来描述，其中 g 为重力加速度.

随机现象也是广泛存在的．我国宋代大文学家苏轼有著名的诗句："*人有悲欢离合，月有阴晴圆缺，此事古难全．*"这说明人类早就对随机现象的存在有着切身的体验，也记录了人们面对随机现象曾经表现出来的无能为力.

抛一枚硬币，它可能是正面朝上也可能背面朝上，就是说，"正面朝上"这个结果可能出现也可能不出现；记录一段时间内某电话机的呼唤次数可能较多也可能较少；下一个交易日股市的指数可能上升也可能下跌，而且升跌幅度的大小也不能事先确定．这些都是随机现象的例子．许多影响事物发展的偶然因素的存在，是产生随机现象中不确定性的原因．例如，股市指数的变化取决于金融政策的变化、上市企业的经营状况、股民的炒作行为及其他国家的股市沉浮等诸多不确定因素．这些因素发展变化的偶然性，决定了股市升跌的随机性.

尽管随机现象中出现什么结果不能完全预言，但可以假定全部可能结果是已知的．在上述例子中，抛一枚硬币只会有"正面"与"背面"两个可能结果，电话呼唤次数必定是某个非负整数，而股指的升跌幅度充其量假定它可能是任意的实数．可见"全部可能结果的集合是已知的"是一合理的假定，并且会带来许多方便.

进行一次试验，如果其所得结果不能完全预言，但其全体可能结果是已知的，则称此试验为*随机试验*．这里及今后所使用的"试验"这一术语，其含义是广泛的．它既可以是通常意义下的物理或化学的实验，也可以是对自然或社会现象的观

测与记录.

表 1.1.1　抛硬币试验资料

试验者	抛硬币次数	出现正面次数	出现正面频率
Buffon	4040	2048	0.5069
De Morgan	4092	2048	0.5005
Feller	10000	4979	0.4979
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005
Romanovski	80640	39699	0.4923

虽然一次随机试验的结果不能完全预言，但是，在相同条件下大量重复此试验时，试验的结果则会呈现出一定的数量规律性. 这一点被历史上许多人的试验结果所证明. 表 1.1.1 列出了 Buffon 等人连续抛掷均匀硬币所得的结果. 从表中的数据可以看到，当抛掷次数很大时，正面出现的频率非常接近 0.5 . 就是说，出现正面与出现背面的机会差不多各占一半.

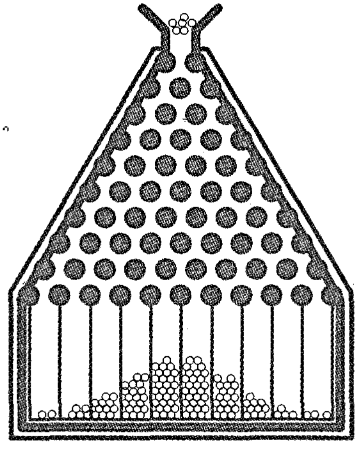


图 1.1.1　Galton 板

另一个著名的例子是 Galton 钉板试验(参见图 1.1.1). 在一块竖起的木板上钉上一排排间隔相等的铁钉. 每一排各个钉子正好对准上面一排两个相邻铁钉的中央. 这样，当小球从两钉之间的间隙下落时，由于下一排铁钉的碰撞，它将以相等的可能性向左或向右落下. 小球再走过两钉间隙时又遇到下一排铁钉的碰撞. 如此下去，当小球走过最后一排铁钉的间隙后，便落入下方的被分割成条状的容器中. 让许许多多小球自上而下地重复这一下落过程. 尽管每次指定小球下落的位置无法预言，但许多小球堆积的边缘轮廓线总是两头矮中间高且左右近乎对称的钟形曲线. 就是说，落入各条状容器内小球数所占的比例基本保持不变.

上面列举的两个试验的结果表明，在相同条件下大量地重复某一随机试验时，各可能结果出现的频率稳定在某个确定的数值附近，称这种性质为**频率的稳定性**. 频率稳定性的存在，标志着随机现象也有它的数量规律性. 概率论就是研究随机现象中数量规律的数学学科.

历史上概率论起源于赌博. 300 多年以前，现代化生产与技术尚处于萌芽状态，对自然界中随机现象规律性的研讨还没有提到议事日程. 但是在这个时期，具有悠久历史的游戏与赌博却发达得多. 人们借助于骰子，纸牌以及形形色色的工具进行赌博，遇到了许多无法解释的问题. 由于输赢是无法预言的，而且涉及到金钱的得失，所以了解其中的数量规律就变得越来越迫切了. 17 世纪中叶，赌徒中一些有身份的人开始向他们的数学家朋友请教. 当时在欧洲颇具声望的数学家 Fermat 、 Pascal 、 Huygens 等人都参加了有关的讨论. 于是产生了概率论的基本概念，并给出了计算“等可能型”概率的一套方法.

19 世纪末至 20 世纪初，在现代工业技术蓬勃发展的大潮中，概率论也取得了飞速的发展. 特别是 Kolmogorov 等人建立了概率论的公理化体系，奠定了概率论的严格的数学基础，也沟通了概率论与现代数学中其他分支之间的联系. 近年来，概率论已被广泛应用于自然科学、工程技术、经济理论、经营管理等许多方面. 特别是对金融领域中随机现象的研究与应用有了长足的发展，形成了“金融数学”的重要组成部分. 概率论这个有特色的数学分支呈现出蓬勃发展的局面. 当前，我国高等学校的许多专业都开设不同类型的概率论课程，单从这一点就可看到概率论作为一门基础学科在社会发展中所起的巨大作用.

最后我们指出，在今天的概率论教材中，仍广泛采用“抛硬币”、“掷骰子”等与赌博有关的例子. 除了一些典型例题有很重要的历史地位外，主要是由于这些例子所涉及的概念简单，规则明了，易于阐明概率论的基本概念与方法.

1.1.2 样本空间

随机试验的每个可能结果称为一个样本点，全体样本点所组成的集合称为样本空间. 习惯上分别用小写的 ω 与大写的 Ω 表示样本点与样本空间. 如前所述，我们总假设样本空间 Ω 是已知的.

例 1.1.1 抛两枚硬币观察其正面与反面出现的情况. 其样本空间由 4 个样本点组成，即 $\Omega=\{$(正，正),(正，反),(反，正),(反，反)$\}$. 这里，比如样本点 $\omega=$(正，反) 表示第一枚硬币抛出正面而第二枚抛得反面.

例 1.1.2 记录某电话机在一小时内呼唤次数，其样本点是非负整数. 当然，我们可以根据实际情况为电话呼唤次数确定一个上界 N. 但是今后会看到，人们宁愿不确定这个 N，而假设呼唤次数可以是任何非负整数，即认为样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

例 1.1.3 接连射击直到命中为止. 为了简洁地写出其样本空间，我们约定以“0”表示一次射击未中，而以“1”表示命中. 则样本空间 $\Omega=\{1, 01, 001, \cdots\}$.

它是一个可列的无穷集合.

例 1.1.4　接连不断地射击下去．沿用上例的记号．由于这个试验是无休止地反复射击，故其样本点是由 0 与 1 组成的无穷序列．为确定起见，我们在每个序列之前加上小数点．于是其样本空间是整数部分为 0 的二进小数全体，即 $\Omega = \{0.a_1a_2\cdots:\ a_i = 0 \text{ 或 } 1\} = [0,1]$．这是一个不可列的无穷集合.

例 1.1.5　记录某地的最低气温与最高气温．我们以 x,y 分别表示最低与最高气温，则样本点是数偶 (x,y)．虽然一次试验的结果不能完全预言，但人们总可以确定此时此地气温的下界 a 与上界 b．于是其样本空间 $\Omega = \{(x,y): a \leq x \leq y \leq b\}$．这是坐标平面中一个三角形，包含不可列无穷多个样本点.

不难看出，样本空间 Ω 可以是数集，也可以是任何抽象的集合；可以是有限集，可列集，也可以是不可列的无穷集合；可以是一维的也可以是多维集合．我们指出，样本空间是研究随机现象的数学模型．正确地确定不同随机试验的样本点与样本空间是极为重要的．比如，例 1.1.1 已给出抛两枚硬币观察其正反面出现情况的样本空间，它包含 4 个样本点．如果我们只关心抛两枚硬币正面出现的个数，则样本空间应改为 $\Omega' = \{0, 1, 2\}$，含 3 个样本点.

1.1.3　事件及其运算

我们时常会关心试验的某一部分可能结果是否出现．如在例 1.1.2 中，若以每小时是否达到 5 次电话呼唤来区分这台电话机是否太繁忙，那么“不太繁忙”即不足 5 次的呼唤，它由样本空间中前 5 个样本点 $0,1,2,3,4$ 组成．由于它是由 Ω 中的一部分样本点组成的子集合，故在未来的一次试验中可能发生也可能不发生．称这种由部分样本点组成的试验结果为*随机事件*，简称作*事件*．通常用大写的字母 $A, B, \cdots$ 表示事件．例如在前述例子中，“不太繁忙”可表为事件 $A = \{$至多 4 次呼唤$\} = \{0,1,2,3,4\}$．还可以有事件 $B = \{$至少 2 次呼唤$\} = \{2,3,4,\cdots\}$ 等等．于是，如果试验的结果是记录到 1 次电话呼唤，即样本点 $\omega = 1$ 出现，此时事件 A 的要求满足，$\omega \in A$，即事件 A 已发生；事件 B 的要求没满足，$\omega \notin B$，从而事件 B 没发生.

我们指出，当样本空间为有穷或至多可列无穷的集合时，可取其任何子集为事件．而当样本空间为不可列无穷时，比如对例 1.1.4 中的 $\Omega = [0,1]$，则只能取 Ω 的一部分性质较好的(称作可测的)子集作为随机事件．这一点将在后面的 1.4.2 节作进一步讨论.

由于样本空间 Ω 包含了试验的全部可能结果，因此在每次试验中 Ω 都会发生，故称 Ω 为*必然事件*．相反，空集 $\varnothing$ 不含任何样本点，每次试验必定不发生，故称 $\varnothing$

为不可能事件. 除此之外，每一随机试验都含有许多随机事件. 由于它们共处于同一试验之中，因而是相互联系着的. 我们有必要弄清它们之间的关系，并引进事件间的运算，以便化复杂事件为简单事件，更好地解决相应的概率问题.

注意我们已经开始把概率论的基本概念纳入测度论轨道：样本空间就是集论中的空间(即全集)；样本点是空间的元素；随机事件就是可测子集；出现的样本点 ω 是集合 A 的元素则意味着事件 A 发生. 循此可沿用测度论的语言完整地叙述概率论的基本概念，从而建立起概率论的公理化系统，我们将在后面详述. 这里先将其基本概念间的对照简要地列在表 1.1.2 中，请读者结合具体例子进一步理解与熟练运用这些记号与概念.

表 1.1.2 测度论与概率论概念的对照

记 号	测度论含义	概率论含义
Ω	空间或全集	样本空间或必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	元素	样本点
A	可测子集	随机事件
$\omega\in A$	ω 是 A 的元	事件 A 发生
$A\subset B$	A 包含在 B 中	A 发生则 B 必发生
$A=B$	A 与 B 相等	A 与 B 同时发生或同不发生
$A\cap B$ 或 AB	交集	A 与 B 都发生
$A\cap B=\varnothing$	不相交	A 与 B 不相容(互斥)
$A\cup B$ 或 $A+B$	并集	A 与 B 至少一个发生
$\overline{A}$	余集	A 不发生(逆事件)
$A-B$	差集	A 发生但 B 不发生
$\overline{\lim_n} A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n$	上限集	$\{A_n\}$ 中有无限多个发生
$\underline{\lim_n} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n$	下限集	$\{A_n\}$ 中至多有限个不发生
$P(A)$	集 A 的测度	事件 A 的概率
$\xi(\omega)$	可测函数	随机变量
$E(\xi)=\int_\Omega \xi\,dP$	积分	数学期望

与集合运算类似，事件的并与交运算也可推广到任意多个事件的情形. 例如 $\bigcap_{n=1}^{m}A_n$ 表示事件列 $\{A_1,\cdots,A_m\}$ 中每一个均发生，而 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 则表示事件列 $\{A_1,A_2,\cdots\}$ 中至少某一个 A_n 发生.

可以用图示的方法表示事件之间的关系与运算. 设想向正方形 Ω 内任投一点 ω，则 Ω 与 ω 分别是此试验的样本空间与样本点，而正方形 Ω 内的子集 A 代表随机事件. 所投的点 ω 落入 A 中，则事件 A 发生. 于是事件间的几种关系与运算可表

示如图 1.1.2. 这种表示方法称为 Veen 图.

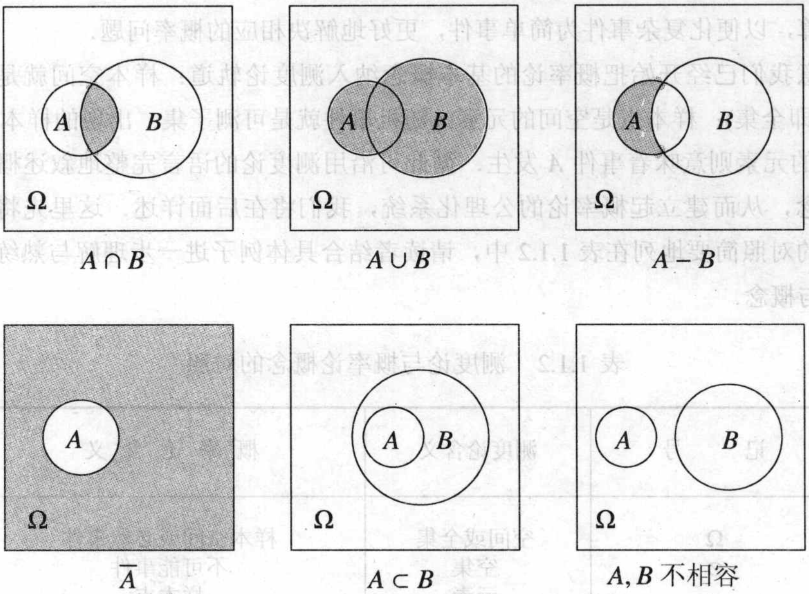


图 1.1.2　事件运算的 Veen 图

事件运算有与代数运算类似的交换律、结合律与分配律，也有作为集合运算的特殊的运算律. 例如有以下对偶律:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{1.1.1}$$

我们用概率论语言证明 (1.1.1) 式中第一个等式. 为此需证明"若事件 $\overline{A \cup B}$ 发生，则 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 发生；反之，若 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 发生，则 $\overline{A \cup B}$ 也发生". 事实上若事件 $\overline{A \cup B}$ 发生，则事件" A 与 B 至少一个发生"不发生，则 A 与 B 全不发生，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 全发生，此即事件 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 发生. 类似可证"若 $\overline{A} \cap \overline{B}$ 发生，则 $\overline{A \cup B}$ 也发生". 至此 (1.1.1) 式中第一个等式得证. 对偶律对于多个事件的交、并运算仍然成立.

1.1.4　频率与概率

本节将通过频率引进事件发生的概率，即介绍概率的"统计定义". 在一定条件下，将一随机试验重复 n 次，如果其中事件 A 共发生 m 次，则称

$$F(A) = \frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的频率.

这里试验次数 n 是自然数，A 发生的次数 m 是非负整数．因而任何事件 A 的频率 $F(A)$ 总是非负的．其次，由于必然事件 Ω 在每次试验中均发生，故其频率 $F(\Omega)=\frac{n}{n}=1$．最后，当事件 A 与 B 互不相容，即 A 与 B 不可能同时发生时，事件 $A\cup B$ 发生的次数等于 A 发生的次数与 B 发生的次数之和．于是频率有可加性，即事件 A 与 B 不相容时，$A\cup B$ 发生的频率等于 A,B 各自发生频率之和．总之，频率 $F(A)$ 有如下基本性质：

1° 非负性：$F(A)\geq 0$;

2° 规范性：$F(\Omega)=1$;

3° 可加性：若 A 与 B 不相容，则 $F(A\cup B)=F(A)+F(B)$.

前面已经指出，事件发生的频率有稳定性，即当重复试验的次数 n 很大时，每个事件 A 发生的频率 $F(A)$ 有一个稳定值．例如，Buffon 等人的试验结果表明，大量重复地抛一枚均匀硬币时，正面出现的频率稳定在 0.5 附近(参见表 1.1.1)．这是因为硬币的质地与形状都是均匀的，正面与反面出现的可能性相等．于是频率的稳定值 0.5 恰好代表了正面出现可能性的大小．又如，统计了大量各类型英文文献的字母使用情况，发现字母 E 使用的频率稳定在 0.105 附近，而字母 J 使用的频率则小得多，大约为 0.001．显然，这种字母使用频率的大小取决于英语本身，由它的特定的构词方法与语法所决定．频率的稳定值反映了各个字母在英语中出现的可能性的大小．

这种表征在一定条件下事件 A 发生可能性大小的频率稳定值就称作事件 A 的概率，记为 $P(A)$．作为频率的稳定值，概率 $P(A)$ 也应具备相应的三条性质：

1° 非负性：$P(A)\geq 0$;

2° 规范性：$P(\Omega)=1$;

3° 可加性：若 A 与 B 不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

我们指出，在一定条件下进行一随机试验，各确定事件发生的概率是这个试验固有的性质，它是由试验的条件与各事件确定的内含所决定的．可以通过大量地重复此试验，借助频率的稳定值去认识它，也可以通过其他途径，比如根据对试验机制的具体分析来确定．严格地说，有些随机事件的概率是无法通过重复试验来确定的，概率论也不应只研究可在相同条件下重复进行的随机试验．

总之，我们借助大量重复试验中频率值呈现的稳定性，来说明表征事件发生可能性大小的概率是客观存在的．这里所使用的“大量试验中频率的稳定值”是一种极不规范的说法．实际上，概率 $P(A)$ 就是当试验次数 $n\to\infty$ 时频率 $F(A)$ 的一种极限．只不过其中 A 发生的频数 m 是不能完全预言的数量，从而 $F(A)=\frac{m}{n}$ 也不是通常的数列而已．这种极限的确切含义将在第四章详加叙述．