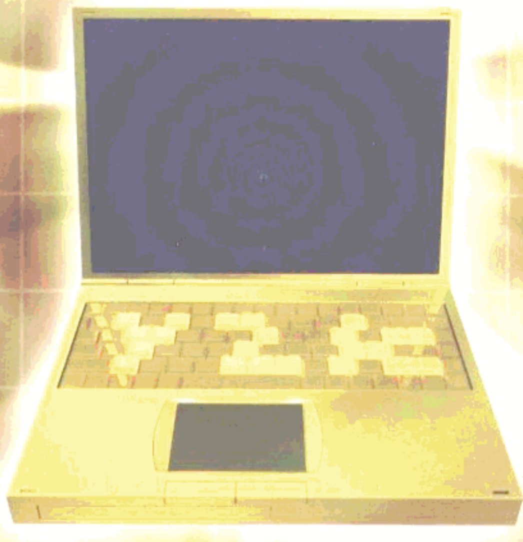
义务教育课程标准实验教科书辅导用书

数学指导

教材解读 同步练习

北师大版

九年级（上册）



SHUXUEZHIDAO

主编 刘德华
凌英渡

安徽大学出版社

编者寄语

《数学指导》以北京师范大学出版社义务教育课程标准实验教科书《数学》为蓝本进行编写。本书以教材内容为主线，以章节为单元，全面系统地复习课本基础知识、基本技能和基本方法，设置学习目标，编织知识网络，梳理知识要点，通过亲身体验旨在提高学生学习自然科学知识的能力。

《数学指导》设置了：目标导航、知识梳理、案例剖析、亲身体验、知识拓展等五个栏目。

《数学指导》的特点：

1. 按章节课题同步展开，围绕学习中易出现、难以理解的问题进行讲解分析，指导学生如何进行学习。

2. 通过有关栏目的设置，使学生打开本书就立即了解本章节课题的学习要求，通过知识梳理、知识网络的学习形成系统的知识体系。

3. 讲演合一，演练互动，与社会生活密切联系，全面地指导学生学习数学基础知识。

4. 注重学习方法和学习能力的培养。

由于时间仓促，水平有限，在编写《数学指导》过程中难免会出现一些问题，望读者提出宝贵意见，谢谢！

编者

2007 年 8 月

目　　录

第一章　证明(二)

第1节　你能证明它们吗

目标导航

1. 了解作为证明基础的几条公理的内容,掌握证明的基本步骤和书写格式.

2. 了解反证法的推理方法,体会反证法的含义.

3. 经历"探索——发现——猜想——证明"的过程,能够用综合法证明等腰三角形的有关性质定理和判定定理.

知识梳理

1. 三角形全等的判定方法:SSS,SAS,ASA,AAS.

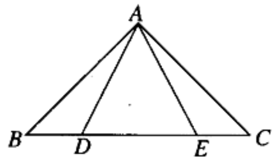
- 等腰三角形
  - 性质
    - 等边对等角
    - 顶角平分线、底边上中线和高线三线合一
  - 判定
    - 定义
    - 等角对等边

- 等边三角形
  - 性质
    - 每个内角都相等,且每个角都等于60°
    - 每个角的平分线,对边上的中线和高线三线合一
  - 判定
    - 定义
    - 三个角都相等的三角形
    - 有一个角等于60°的等腰三角形

2. 等腰三角形性质定理与判定定理不能混淆不清.由边相等推出角相等是性质,即等边对等角,由角相等推出边相等是判定,即等角对等边.

案例剖析

例 1. 如图,已知:点 D, E 在$\triangle ABC$ 的边 BC 上, $AB=AC$, $AD=AE$,求证:$BD=CE$.



【解析】 线段 BD、CE 分别是$\triangle ABD$ 与$\triangle AEC$ 的边,如果能证$\triangle ABD\cong\triangle ACE$,则由全等三角形对应边相等即得,而由题目条件可证它们全等.

【解答】 $\because AB=AC$

$\therefore \angle B=\angle C$　(等边对等角)

$\because AD=AE$

$\therefore \angle ADE=\angle AED$ (等边对等角)

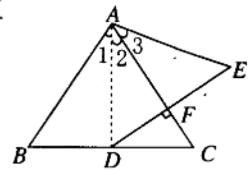
$\therefore \angle ADB=\angle AEC$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$ (AAS)

$\therefore BD=CE$

【温馨提示】 证明线段相等通过三角形全等是常用的方法. 本题也可作辅助线证明,如作 $AM\perp BC$ 于 M,利用等腰三角形性质解决.

例 2. 已知:如图,$\triangle ABC$ 是等边三角形,D 是 BC 的中点,$DF\perp AC$ 于 F,延长 DF 到 E,使 $EF=DF$,连结 AE,求:$\angle E$ 的度数.



【解析】 由 D 是 BC 的中点,$\triangle ABC$ 是等边三角形,应该想到"三线合一",所以连接 AD,这时显然利用三角形全等就可求$\angle E$.

【解答】 连结 AD

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,D 是 BC 的中点

$\therefore \angle 1=\angle 2=30^\circ$

又$\because DF\perp AC$ 于 F, $DF=EF$

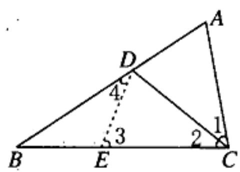
$\therefore \angle AFD=\angle AFE$, $AF=AF$

$\therefore \triangle AFD\cong\triangle AFE$ (SAS)

$\therefore \angle 2=\angle 3=30^\circ$, $AD=AE$

$\therefore \angle E=60^\circ$

例 3. 已知:如图$\triangle ABC$ 中$\angle A=2\angle B$,CD 平分$\angle ACB$. 求证:$BC=AC+AD$



【解析】 等量关系通常在三角形中寻找,因此经常需要构造三角形. 对于线段和或差的问题通常通过截长或补短转化为线段间的等量关系.

【解答】 在 BC 上截取 $CE=CA$,连结 DE.

$\because CD$ 平分$\angle ACB$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

在$\triangle ACD$ 和$\triangle ECD$ 中

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle ECD(SAS)$　$\therefore \angle A=\angle 3, AD=DE$

$\because \angle A=2\angle B \quad \therefore \angle 3=2\angle B$

$\because \angle 3=\angle B+\angle 4 \quad \therefore \angle B=\angle 4$

$\therefore BE=DE \quad \therefore AD=BE$

$\therefore BC=BE+EC \quad \therefore BC=AC+AD$

【温馨提示】 对于线段之间倍半关系，常采用“截长补短”等辅助线的添加方法，或构造“倍”，或构造“半”，从而转化为线段间的等量关系.

亲身体验

一、选择题

1. 已知 $a^2-2ab+b^2=0$，且 a，b 分别是三角形的两条边长，则这个三角形一定是(　　).

   A. 等边三角形　　B. 等腰三角形　　C. 直角三角形　　D. 等腰直角三角形

2. 下列命题，正确的有(　　).

   ①三角形的一条中线必平分该三角形的面积；②直角三角形中 30°角所对的边等于另一边的一半；③有一边相等的两个等边三角形全等；④等腰三角形底边上的高把原三角形分成两个全等的三角形

   A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3. 在△ABC 中 $\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，$CD\perp AB$ 于 D 点，$AB=a$，则 BD 的长为(　　).

   A. $\frac{a}{2}$　　B. $\frac{a}{3}$　　C. $\frac{a}{4}$　　D. 以上都不对

二、填空题

4. △ABC 中，$AB=AC$，CD 是△ABC 的角平分线，延长 BA 到 E 使 $DE=DC$，连结 EC，若 $\angle E=51°$，则$\angle B$ 等于____.

5. 角平分线平分对边的三角形是________.

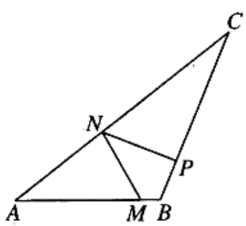
6. 如果三角形的一个外角等于不相邻的内角的 2 倍，则这个三角形是________三角形.

7. 若等腰三角形的一个内角等于 40°，则它的另外两个内角的度数是________.

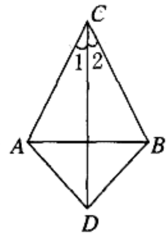
8. 等腰三角形一腰上中线把它的周长分为 15cm 和 6cm 两部分，则这个三角形的三边长为________.

三、解答题

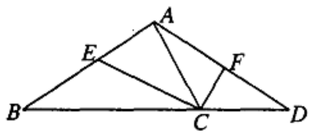
9. 如图，在△ABC 中，$\angle B=100°$，$AM=AN$，$CP=CN$. 求：$\angle MNP$ 的度数.



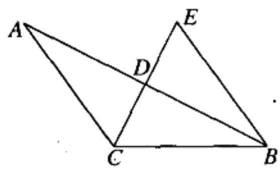
10. 已知:如图:$CA=CB$, $DA=DB$.求证:(1)$\angle 1=\angle 2$.
(2)$CD\perp AB$.



11. 已知:如图延长$\triangle ABC$的BC边到D,使$CD=AC$, CF是$\triangle ACD$的中线,CE是$\triangle ABC$的角平分线.求证:$CE\perp CF$.



12. 已知:如图在$\triangle ABC$中,$AC=BC$,$\angle ACB=120°$,$CE\perp AB$于D且$DE=DC$.求证:$\triangle CEB$为等边三角形.



知识拓展

不同部落间的通婚

故事讲的是许多年前欠完美岛上的一件婚事.一个普卡部落人(总讲真话的)同一个沃汰沃巴部落人(从不讲真话的)结婚.婚后,他们生了一个儿子.这个孩子长大后当然具有西利撤拉部落的性格(真话、假话或假话、真话交替着讲).

这个婚姻是那么美满,以致夫妻双方在许多年中都受到了对方性格的影响.讲这个故事的时候,普卡部落的人已习惯于每讲三句真话就讲一句假话,而沃汰沃巴部落的人,则已习惯于每讲三句假话就要讲一句真话.

这一对家长同他们的儿子每人都有个部落号,号码各不相同.他们的名字分别叫塞西

尔、伊夫琳、西德尼(这些名字在这个岛上男女通用).

三个人各说了四句话,但这是不记名的谈话,还有待我们来推断各组话是由谁讲的(我们想,前普卡当然是讲一句假话、三句真话,而前沃汰沃巴则是讲一句真话、三句假话).

他们讲的话如下:

A:(1)塞西尔的号码是三人中最大的.(2)我过去是个普卡.(3)B 是我的妻子.(4)我的号码比 B 的大 22.

B:(1)A 是我的儿子.(2)我的名字是塞西尔.(3)C 的号码是 54 或 78 或 81.(4)C 过去是个沃汰沃巴.

C:(1)伊夫琳的号码比西德尼的大 10.(2)A 是我的父亲.(3)A 的号码是 66 或 68 或 103.(4)B 过去是个普卡.

找出 A、B、C 三个人中谁是父亲、谁是母亲、谁是儿子,他们各自的名字以及他们的部落号.

第 2 节　直角三角形

目标导航

1. 进一步掌握推理证明的方法,发展演绎推理能力.

2. 了解勾股定理及其逆定理的证明方法,能够证明直角三角形全等的“HL”判定定理.

3. 结合具体例子了解逆命题的概念,会识别两个互逆命题,知道原命题成立其逆命题不一定成立.

知识梳理

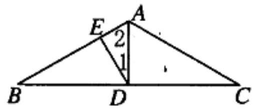
1. 命题、逆命题及其真假

- 直角三角形
  - 性质
    - 两个锐角互余
    - 30°锐角所对直角边等于斜边一半
    - 勾股定理
  - 判定
    - 定义
    - 勾股逆定理
  - 证明两直角三角形全等
    - SSS、SAS、ASA、AAS
    - HL

案例剖析

例 1. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，D是BC中点，$DE\perp AB$于E，求证：$EB=3EA$.

【解析】 要证$EB=3EA$，注意到$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，得$\angle B=30°$，再证$AD\perp BC$，得$AD=\frac{1}{2}AB$，若能证得$AE=\frac{1}{2}AD$就得到$AB=4AE$，从而可证得$EB=3EA$. 因此证出$Rt\triangle AED$中，$\angle 1=30°$即可.



【解答】 $\because AB=AC$，$\angle BAC=120°$(已知)

$\therefore \angle B=\angle C=30°$ (等边对等角)

又$\because DE\perp AB$，$\therefore \angle 1=30°$

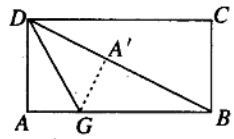
在$Rt\triangle ABD$中，$\angle B=30°$，$\therefore AD=\frac{1}{2}AB$

在$Rt\triangle AED$中，$\angle 1=30°$，$\therefore AE=\frac{1}{2}AD$

$\therefore AE=\frac{1}{4}AB$，$\therefore BE=\frac{3}{4}AB$，$\therefore EB=3EA$

例 2. 如图，折叠矩形纸片$ABCD$，先折出折痕(对角线)BD，再折叠使AD也与对角线BD重合，得折痕DG，若$AB=2$，$BC=1$，求AG的长.

【解析】 AG虽在$Rt\triangle ADG$中，但因只有AD已知，而DG不可求，考虑A在DB上折叠的重合点设为A'，则$\triangle AGD\cong\triangle A'GD$，找到$AG$的等量$A'G$. 在$Rt\triangle A'BG$中，$A'B$可求，$BG$可用含$AG$的代数式表示，应用勾股定理可求出$A'G$即$AG$的长.



【解答】 过G作$GA'\perp DB$. 垂足为A'，则$\triangle DAG\cong\triangle DA'G$，$AG=A'G$，$DA'=DA=BC=1$.

设$AG=x$，则$GA'=x$，$DB=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$A'B=DB-DA'=\sqrt{5}-1$，$BG=AB-AG=2-x$

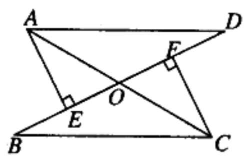
在$Rt\triangle A'BG$中，$x^2+(\sqrt{5}-1)^2=(2-x)^2$

解得$A'G=x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\therefore AG=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

【温馨提示】 利用图形的性质，借助于勾股定理作为等量关系列出方程是解此题的关键. 用代数方法解几何题是常用的方法之一.

例 3. 已知：如图，AE，FC都垂直于BD，垂足为E，F，$AD=BC$，$BE=DF$. 求证：$OA=OC$.

【解析】 要证$OA=OC$，只要证$\triangle AEO\cong\triangle CFO$即可. 而在这两个三角形中，已有两组角对应相等，只要再有一条边对应相等就行了. 而由已知条件，$\triangle AED$与$\triangle CFB$都是$Rt\triangle$，并且$AD=BC$，再由$BE=DF$，可得$BF=DE$，则由"HL"证$Rt\triangle AED\cong Rt\triangle CFB$，可得$AE=CF$.



【解答】 $\because BE=DF$，$\therefore BF=DE$

$\because AD=BC$，$AE\perp BD$，$CF\perp BD$

$\therefore Rt\triangle AED\cong Rt\triangle CFB(HL)$.

$\therefore AE=CF$. $\because \angle AEO=\angle CFO=90^\circ$

$\angle AOE=\angle COF$

$\therefore \triangle AEO\cong\triangle CFO(AAS)$

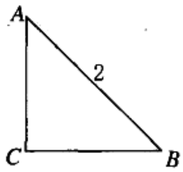
$\therefore OA=OC$

亲身体验

一、选择题

1. 如图，等腰直角$\triangle ABC$，$AB=2$，则 $S_{\triangle ABC}$ 等于(　　).

   A. 2　　B. 1　　C. 4　　D. $\sqrt{2}$



第 1 题图

2. 若三角形的三边分别为 a,b,c，则下面四种情况中，构成直角三角形的是(　　).

   A. $a=2,b=3,c=4$　　B. $a=12,b=5,c=13$

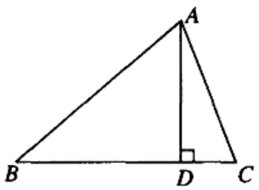
   C. $a=4,b=5,c=6$　　D. $a=7,b=18,c=17$

3. 如图，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于D，$BD=\sqrt{5}$，$DC=1$，$AC=\sqrt{5}$，那么 AB 的长度是(　　).

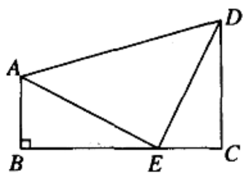
   A. $\sqrt{27}$　　B. 27　　C. 3　　D. 25

4. 如图，$AB\perp BC$，$DC\perp BC$，E 是 BC 上一点，$\angle BAE=\angle DEC=60^\circ$，$AB=3$，$CE=4$，则 AD 等于(　　).

   A. 48　　B. 24　　C. 10　　D. 12



第 3 题图



第 4 题图

二、填空题

5. $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，若 $a=5$，$c=13$，则 $b=$________.

6. 直角三角形两直角边长分别为 6 和 8，则斜边上的高为________.

7. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$b=10$，则 $c=$________.

8. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，则 $a:b:c=$________.

9. 一个三角形三个内角之比为 1∶1∶2，则这个三角形的三边比为________.

10. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，若 $a:b=1:2$，且 $c=5$，则 $ab=$________.

11. $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$，垂足为 D，若$\angle A=60°$，$AB=4\text{cm}$，则 $CD=$_____.

12. 若$\triangle ABC$ 中，$a=b=5$，$c=5\sqrt{2}$，则$\triangle ABC$ 为________三角形.

三、解答题

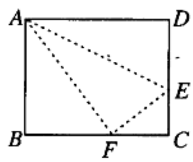
13. 说出下列命题的逆命题，并判断每对命题的真假：

(1)如果 $x^2>0$，那么 $x>0$；(2)矩形是正方形；

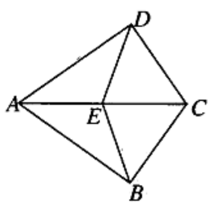
(3)内错角相等，两直线平行；(4)对顶角相等.

14. $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 的长依次是 3,4,5，那么$\triangle ABC$ 是直角三角形吗？若三边长依次为 5n,12n,13n 呢？

15. 如图所示，沿 AE 折叠长方形，使点 D 落在 BC 边的点 F 处. 已知 $AB=8\text{cm}$，$BC=10\text{cm}$，求 FC 的长.



16. 如图，已知$\angle ABC=\angle ADC=90°$，$E$ 是 AC 上一点，$AB=AD$，求证：$EB=ED$.



17. 求证：一直角边和斜边上的高对应相等的两个直角三角形全等.

知识拓展

第十三号大街

史密斯住在第十三号大街,这条大街上的房子的编号是从 13 号到 1300 号. 琼斯想知道史密斯所住的房子的号码.

琼斯问道:它小于 500 吗? 史密斯作了答复,但他讲了谎话.

琼斯问道:它是个平方数吗? 史密斯作了答复,但没有说真话.

琼斯问道:它是个立方数吗? 史密斯回答了并讲了真话.

琼斯说道:如果我知道第二位数是否是 1,我就能告诉你那所房子的号码.

史密斯告诉了他第二位数是否是 1,琼斯也讲了他所认为的号码.

但是,琼斯说错了.

史密斯住的房子是几号?

第 3 节　线段的垂直平分线

目标导航

1. 经历探索、猜测、证明的过程,进一步发展推理证明的意识和能力.

2. 能够证明线段垂直平分线的性质定理、判定定理及其相关结论.

3. 能够利用尺规作已知线段的垂直平分线;已知底边及底边上的高,能利用尺规作出等腰三角形.

知识梳理

1. 关于线段垂直平分线的三条定理、一种尺规作图.

2. 在运用线段垂直平分线的判定定理时,如果有一点到这条线段的两个端点距离相等,但经过这一点的直线不一定就是这条线段的垂直平分线. 如图 1,若 $AC=BC$,但直线 CD 不是线段 AB 的垂直平分线;如图 2,若 $AC=BC$,$AD=BD$,则直线 CD 是 AB 的垂直平分线.

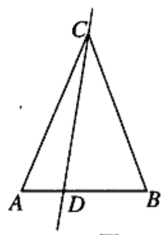


图1

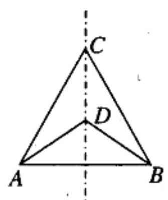
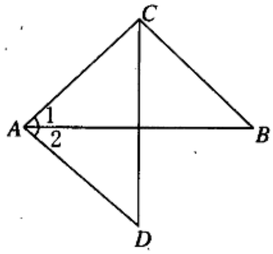


图2

案例剖析

例 1. 如图,线段 CD 垂直平分 AB,AB 平分 $\angle CAD$. 求证:$AD // BC$.

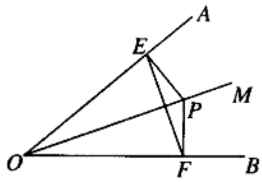


【解析】 这是线段垂直平分线的性质定理的基本应用,由已知条件可得 $AC=BC$,这样 $\angle 1=\angle B$,再由 $\angle 1=\angle 2$ 即可得证.

【解答】 $\because CD$ 垂直平分 AB,$\therefore CA=CB$,$\angle 1=\angle B$.

$\because \angle 1=\angle 2$,$\therefore \angle 2=\angle B$. $\therefore AD // BC$.

例 2. 如图,P 是 $\angle AOB$ 的平分线 OM 上任意一点,$PE \perp OA$ 于 E,$PF \perp OB$ 于 F,连结 EF. 求证:OP 垂直平分 EF.



【解析】 要证 OP 垂直平分 EF,只须证 $PE=PF$,$EO=FO$,而要得到这个条件只须 $\triangle PEO \cong \triangle PFO$,由已知条件可证它们全等.

【解答】 $\because PE \perp OA$ 于 E,$PF \perp OB$ 于 F

$\therefore \angle PEO=90°=\angle PFO$

$\therefore$ 在 $\triangle PEO$ 和 $\triangle PFO$ 中,

$$\begin{cases} \angle PEO=\angle PFO \\ \angle EOP=\angle FOP \\ OP=OP \end{cases}$$

$\therefore \triangle PEO \cong \triangle PFO$,$\therefore PE=PF$,$EO=FO$

$\therefore O$、P 在 EF 的中垂线上,

$\therefore OP$ 垂直平分 EF.

亲身体验

一、选择题

1. 等腰三角形一底角为 30°,底边上的高为 9cm,则腰长为(　　)cm.

A. 3　　B. 18　　C. 9　　D. $\sqrt{3}$

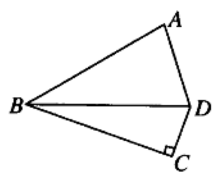
2. 若三角形三个角的度数之比为 1∶2∶3,它的最大边长等于 8,则最小边长是(　　).

A. 2　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 4　　D. 6

3. 若顶角为 150°的等腰三角形腰上的高为 6cm,则腰长为(　　)cm.

A. 8　　B. 12　　C. 15　　D. 6

4. 已知:如图,$\angle ABC=70°$,$\angle A=70°$,$\angle C=90°$,$AB=BD=10$,则 CD 等于(　　).



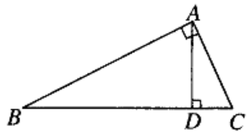
A. $5\sqrt{3}$　　B. 5

C. 10　　D. 15

5. 若等腰三角形的底边上的高等于腰长的一半,它的顶角是(　　).

A. $60°$　　B. $90°$　　C. $120°$　　D. $150°$

6. 已知:如图,$\angle BAC=90°$, $AD\perp BC$, $\angle C=60°$. $BC=4\text{cm}$, 则 AC 和 CD 的长为(　　).

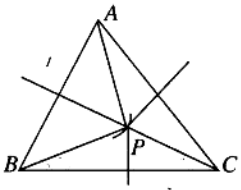


A. 2cm, $\sqrt{3}\text{cm}$　　B. $\sqrt{3}\text{cm}$, 1cm

C. 2cm, 1cm　　D. 2cm, $\sqrt{3}\text{cm}$

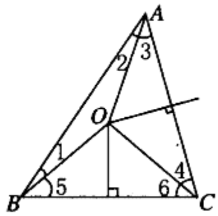
二、填空题

7. 如图,点 P 为$\triangle ABC$三边中垂线交点,则 PA ________ PB ________ PC.

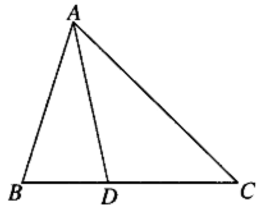


8. 如图,在锐角三角形 ABC 中,$\angle A=50°$,AC、BC 的垂直平分线交于点 O,则$\angle 1$ ________ $\angle 2$,$\angle 3$ ________ $\angle 4$,$\angle 5$ ________ $\angle 6$,$\angle 2+\angle 3=$ ________ 度,$\angle 1+\angle 4=$ ________ 度,$\angle 5+\angle 6=$ ________ 度,$\angle BOC=$ ________ 度.

9. 如图,D 为 BC 边上一点,且 $BC=BD+AD$,则 AD ________ DC,点 D 在 ________ 的垂直平分线上.



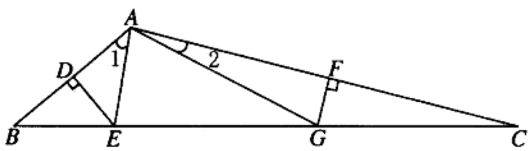
第 8 题图



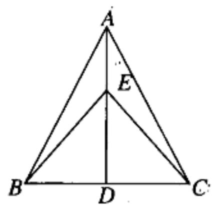
第 9 题图

10. 如图,在$\triangle ABC$中,DE、FG 分别是边 AB、AC 的垂直平分线,则$\angle B$ ________ $\angle 1$,$\angle C$ ________ $\angle 2$;若$\angle BAC=126°$,则$\angle EAG=$ ________ 度.

11. 如图,AD 是$\triangle ABC$中 BC 边上的高,E 是 AD 上异于 A,D 的点,若 $BE=CE$,则$\triangle$ ________ $\cong\triangle$ ________ (HL);从而 $BD=DC$,则$\triangle$ ________ $\cong\triangle$ ________ (SAS);$\triangle ABC$ 是 ________ 三角形.

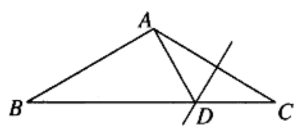


第 10 题图



第 11 题图

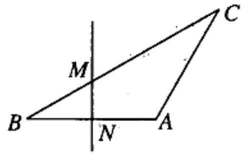
12. 如图,$\angle BAC=120°$,$AB=AC$,AC 的垂直平分线交 BC 于 D,则$\angle ADB=$ ________ 度.



三、解答题

13. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle A=120^\circ$，AB的垂直平分线MN分别交BC、AB于点M、N.

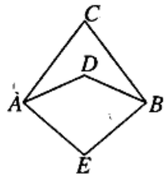
求证：$CM=2BM$.



14. 如图所示，$CA=CB$，$DA=DB$，$EA=EB$.

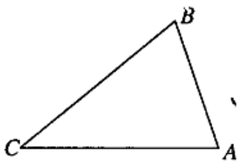
(1)C，D，E三点在一条直线上吗？为什么？

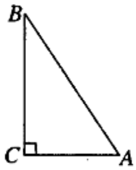
(2)如果$AB=24$，$AD=13$，$AC=20$，那么CD的长是多少？

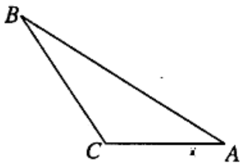


四、作图题

(1)分别在下图中作出点P，使得$PA=PB=PC$.







(2)观察各图中的点P与$\triangle ABC$的位置关系，并总结规律：

当$\triangle ABC$为锐角三角形时，点P在$\triangle ABC$的______；

当$\triangle ABC$为直角三角形时，点P在$\triangle ABC$的______；

当$\triangle ABC$为钝角三角形时，点P在$\triangle ABC$的______；

反之也成立，且在平面内到三角形各顶点距离相等的点只有一个.

知识拓展

既然任意一个三角形的三边的垂直平分线交于一点，那三角形的三边上的中线是否也交于一点；三个角的平分线是否也交于一点；试通过折纸或用直尺、圆规画图验证这种猜想.

第 4 节　角平分线

目标导航

1. 进一步发展推理证明的意识和能力.

2. 能够证明角平分线的性质定理、判定定理及相关结论.

3. 能够利用尺规作已知角的平分线.

知识梳理

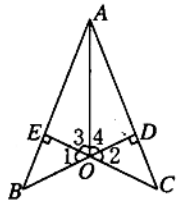
1. 关于角平分线的三条定理、一种尺规作图.

2. 平分线的性质定理、判定定理中的“距离”指的是点到直线的距离，即垂线段；三角形三条边垂直平分线交点与三条角平分线交点不能混淆，但对于等边三角形这两个交点重合.

案例剖析

例 1. 已知：如图，$CE\perp AB$ 于点 E，$BD\perp AC$ 于点 D，BD、CE 交于点 O，且 AO 平分$\angle BAC$.

求证：$OB=OC$.



【解析】 证明 $OB=OC$，可用全等三角形来证明，如$\triangle ABO\cong\triangle ACO$或$\triangle BEO\cong\triangle CDO$.

【解答】 证法一：$\because AO$ 平分$\angle BAC$，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，

$\therefore OE=OD$(角平分线上的点到角两边的距离相等).

在 $Rt\triangle BEO$ 和 $Rt\triangle COD$ 中，

$\because \angle 1=\angle 2$，$OD=OE$.

$\therefore Rt\triangle BEO\cong Rt\triangle CDO$(ASA).

$\therefore OB=OC$(全等三角形的对应边相等)

证法二：$\because AO$ 平分$\angle BAC$

$\therefore \angle BAO=\angle CAO$.

在 $Rt\triangle AEO$ 和 $Rt\triangle ADO$ 中，$\angle 3=\angle 4$(等角的余角相等).

又$\because \angle 1=\angle 2$，

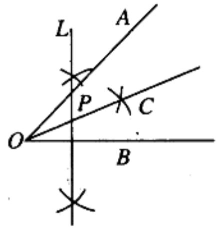
$\therefore \angle AOB=\angle AOC$.

又$\because AO=AO$，$\angle BAO=\angle CAO$

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle AOC$(ASA)

∴$OB=OC$(全等三角形的对应边相等)

例 2. 如图,已知$\angle AOB$,B为OB边上一点,求作一点P,使P到OA、OB的距离相等,并且$OP=PB$.



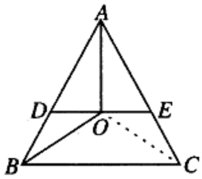
【解析】 由于$OP=PB$,根据"到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上",可知点P在线段OB的垂直平分线上,而点P又到OA、OB的距离相等,根据"到角两边距离相等的点在这个角的平分线上",可知点P在$\angle AOB$的平分线上,即P为OB的垂直平分线与$\angle AOB$的角平分线的交点.

【解答】 (1)作线段OB的垂直平分线L.

(2)作$\angle AOB$的角平分线OC交L于点P.

则点P为所求点.

例 3. 如图,$\triangle ABC$中,点O是$\angle BAC$与$\angle ABC$的平分线的交点,过O作与BC平行的直线分别交AB、AC于D、E. 已知$\triangle ABC$的周长为2004,BC长为704,求$\triangle ADE$的周长.



【解析】 求$\triangle ADE$的周长,即需求出$AD+DE+AE$的和,根据题意,要整体转化方可求出. 首先O是$\triangle ABC$中$\angle BAC$和$\angle ABC$的角平分线的交点,则O必在$\angle ACB$的角平分线上,即OC平分$\angle ACB$. 而$DE/\!/BC$,恰好能构造出等腰三角形ODB和等腰三角形OEC,则$DB=OD$,$EC=OE$,则$AD+DE+AE=(AD+DB)+(CE+AE)=AB+AC$. 此题便可获解.

【解答】 连结OC.

∵O是$\angle ABC$和$\angle BAC$角平分线的交点

∴OC平分$\angle ACB$(三角形三条角平分线交于一点)

∴$\angle OCE=\angle OCB$

又∵$DE/\!/BC$

∴$\angle EOC=\angle OCB$(两直线平行,内错角相等)

∴$\angle OCE=\angle EOC$

∴$OE=EC$(等角对等边)

同理可证$OD=DB$.

∴$\triangle ADE$的周长为

$AD+DO+OE+AE$

$=AD+DB+EC+AE$

$=AB+AC$

$=2004-704$

$=1300$