ОРТОГОРАЛЬНЫЕ РЯДЫ

正交级数

ZHENGJIAO JISHU

Б.С.Кашин А.А.Саакян（俄）著

孙永生 王昆扬 译

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

正交级数

ZHENGJIAO JISHU

Б.С.Кашин　А.А.Саакян（俄）著
孙永生 王昆扬 译

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据
北京市版权局著作权合同登记图字：01－2006－6563
正交级数/孙永生，王昆扬译．－北京：
北京师范大学出版社，2007.5
ISBN 978-7-303-08454-8
Ⅰ．正…Ⅱ．①孙…②王…Ⅲ．正交级数 Ⅳ．0174.21
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 029732 号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：唐山市润丰印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm×230 mm
印　　张：31.5
字　　数：500 千字
印　　数：1～2 000 册
版　　次：2007 年 11 月第 1 版
印　　次：2007 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：55.00 元

责任编辑：岳昌庆　　装帧设计：李　强
责任校对：李　菡　　责任印制：董本刚

中译本序言

数十年前，我们就闻知国外有人做过抽样统计，发现一般大学数学类图书文献资料中出现次数最多的名字是 “Fourier (傅立叶)”. 这一现象无非说明了，Fourier 分析 (包括三角级数论与 Fourier 变换论) 是受到人们最频繁的关注、研究和应用的数学工具. 20 世纪初 Lebesgue 积分论的出现，成为经典 Fourier 分析发展的转折点. 于是伴随着泛函分析特别是 Hilbert 空间算子理论的成长壮大，三角级数论便很快发展成为正交级数论. 在这一发展过程中，欧美学者的工作，尤其是俄罗斯学派的工作成就，占了重要位置. 现今人们已普遍地认识到，正交级数是现代数学中极为重要的分析工具、计算工具和函数表现工具. 多年以来，我国已经有了日渐壮大的调和分析与函数构造论研究队伍，且已有不少佳著出版. 但有关正交级数的新颖专著尚付阙如. 现今北京师范大学的两位专家孙永生教授与王昆扬教授将 B. S. Kashin 与 A. A. Saakian 的近著新版翻译成中文出版，这无疑是对国内分析学界的一份极为珍贵的奉献. 事实上，Kashin-Saakian 的俄文原著《正交级数》，以其具有俄罗斯优秀的实分析传统特色而引人注目，故于 1984 年出版问世后数年，即被翻译成英文在美国出版. 现在的新版本 (第二版) 对上述两版本又有了重要补充，所以更具有明显的特色. 这可概述为如下四点：

一、正如初版序言所说，这本书是向读者介绍正交级数理论中使用的基本思想和方法，凡是超出大学课程范围的定理命题均给出证明. 故此书很适合用于研究生教材和作为研究工作者的引路书.

二、本书末的 “注解 ” 中给出了一系列关于原创性结果与证明的历史性信息，指出了它们之间的关系和来龙去脉. 这对研究工作者和大学师生都富有启发性和指导意义.

三、在这第二版 (1999 年写成) 的版本中，加入了取材精要的 “小波理论导引” 一章，反映了近年来极为活跃的新方向，还指出了有价值的参考书及参考文献. 这对才入门的研究工作者也有引路的作用.

四、第二版中增添了许多新结果，还增补了一些新的论文目录. 这充分反映了此一专著在学科领域的前沿性和现代性.

鉴于上述诸特色，故可以断言，此书中译本的出版，乃是对国内分析数学工作者与研究院的师生们提供了一本卓越的教学用书和工具书. 最后，我想提出的一点建议是，如果将此书用作高年级本科生或研究生的选修课教材，则最好还应补充一批 2000 年后国内外学者有关的研究成果文献，这些自然是俄罗斯作者写书时尚未能接触到的文献资料.

徐利治

2005 年 4 月写于北京寓所

原著第二版前言

《正交级数》一书的第一版问世至今已经 15 年了. 第二版的目的是向读者介绍本学科当前的状况. 经过对 1989 年以来正交级数理论的发展进行分析，我们得出这样的结论：没有必要改变本书的总体计划. 同时，和第一版以及 1989 年的美国 (翻译) 版本相比，本书的内容有重要补充，增加新的一章来介绍小波 (Wavelets), 这是正交级数在近年来蓬勃发展着的方向. 第六章的 §4,5 完全重写. 在其他章内包含了很多新结果.

这里要指出，在 20 世纪 80~90 年代借助凸体几何的现代技术所得到的关于有限正交系的性质的一些重要结果在本书内没有得到反映. 我们觉得这些结果最好单独地叙述，预先给出一个介绍有限维赋范空间几何学的详细的引论.

文献目录和附录部分增加了在第二版内引用的论文目录. 在文献目录中还包括了最近几年出版的关于在正交级数论的不同方向的专著.

在最后向 K.I.Oskolkov,G.G.Gevorkian 和本书编辑 A.D.Issak 致谢. 他们提出了许多好的建议并给予许多帮助.

B.S.Kashin, A.A.Saakian

1999 年 10 月

原著第一版前言

我们奉献给读者的这部书是介绍正交级数一般理论的. 该理论在本世纪 (20 世纪 - 译者注) 之初就产生了 (在 Lebesgue 积分的基础上, 作为三角级数论的自然的扩充), 然而在最近 25 年内得到特别积极的开拓. 到目前, 特别是下述情况已经很清晰:

1) 关于三角函数系的性质的许多论断具有一般性, 它们对正交规范系的广泛类仍然成立;

2) 对于比正交规范系更广泛的函数系的研究常常可归结为对前者的研究;

3) 在许多问题中, 非古典的正交规范系其 "表现" 要比古典的 "好些";

4) 正交级数的一般理论的结果和方法在该理论的范畴以外找到了各式各样的应用.

上述情况说明对各种不同的正交规范系的性质进行系统的研究是适当的, 它在一定程度上决定了本书的内容. 这里要指出的是, 本书不能追求叙述对象的完整, 所要讨论的理论涉及面很广, 有些重要课题我们没有接触到. 我们也不企图介绍结果的最一般形式. 我们的主要目的是向读者介绍在正交级数理论中应用的基本思想和方法. 毫无疑问, 本书内容的选择受到了由 D.E.Menshov 和 P.L.Ulyanov 领导的实变函数讨论班选题的影响, 这个讨论班作为 20 世纪 20 年代由 N.N.Lusin 领导的讨论班的延续, 多年来一直在莫斯科大学工作着. 同时也考虑到本书的第一位作者在莫斯科大学的在 1979 年至 1981 年间讲过的正交级数论讲义. 本书证明的定理中有很大一部分首次写入专著, 我们希望, 即使专家也能在这里找到新东西. 然而无论如何本书的着眼点在很大程度上是放在刚刚起步的数学工作者身上的, 所以我们恪守一条规则: 凡是超出大学课程范围的结果一律给以证明. 预计读者熟悉由 A.N.Kolmogorov 和 S.V.Fomin 所著《函数论和泛函分析基础》一书的内容, 以及复变函数基础 (比如, 书 [91] 的内容). 关于函数论和泛函分析的必要的补充知识收集在两个附录中, 放在本书正文的后面. 关于本书中所介绍的结果的首位作者的资料放在《注解》栏中. 在那里也给出了对所引用的证明的评论以及一些补充信息.

最后, 向我们的同事 K.I.Oskolkov, A.A.Talalyan, K.Tandori, Z.Ciesielski, P.Oswald 表示衷心感谢, 他们给予作者许多宝贵的建议和帮助.

B.S.Kashin, A.A.Saakian

1984 年 4 月

关于记号的注

我们应用一些通用的（特别是在本书 [77] 内应用的）记号 (例如， $\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n$, $L^p(0,1)$, l^p, $C(0,1)$), 就不加解释了. 此外我们约定:

$L^0(0,1)$，$L^0(\mathbb{R}^1)$ 各表示定义在区间 $[0,1]$ 和直线 $\mathbb{R}^1$ 上的一切几乎处处有限的可测函数构成的空间;

$C(-\pi,\pi)$，$L^p(-\pi,\pi)$ 各表示定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的以 2π 为周期的，在 $[-\pi,\pi]$ 上连续的，以及在 $[-\pi,\pi]$ 上 p 次可积函数构成的空间;

$\mathscr{D}_N, N=1,2,\cdots$ 表示定义在 $[0,1]$ 上的分段常数函数空间:

$$\mathscr{D}_N=\left\{\begin{array}{ll} f(x):\ f(x)=\mathrm{const}=C_i, & \text{当}x\in(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}), i=1,2,\cdots,N\ ; \\ f(\frac{i}{N})=\frac{1}{2}(C_i+C_{i+1}), & 1\leqslant i\leqslant N-1,\ f(0)=C_1, f(1)=C_N \end{array}\right\}.$$

同样，对任意区间 $[a,b]$

$$\mathscr{D}_N[a,b]=\{f(x),x\in[a,b]:\ g(t)=f(a+t(b-a))\in\mathscr{D}_N\}\ ;$$

矩阵 $H=\{h_{ij}\}, i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$ 的范数指的是量

$$\|H\|=\sup_{\{x_i\},\{y_j\}:\ \sum_{i=1}^m x_i^2=\sum_{j=1}^n y_j^2=1}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n h_{ij}x_iy_j\ .$$

$m(E)$(当 $E=(a,b)$ 是区间时，亦用 $|E|$) 表示集 E 的 Lebesgue 测度;

$\chi_E(x)$ 表示集合 E 的特征函数，即

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E\ .\end{cases}$$

card (E) 或 $\#E$ 表示有限集合 E 的元素个数.

若 x 是 Banach 空间 X 的元素， y 是 X 上的线性有界泛函，那么 $<x,y>$ 或 $<y,x>$ 表示泛函 y 在元素 x 处的值.

若 $f(x)$ 是实值或复值函数，那么

$$\mathrm{supp}\ f(x)=\{x:\ f(x)\neq 0\}\ .$$

若 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 及 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ 是二个正实数序列，则记号

$$a_n\asymp b_n$$

的含义是，存在着常数 $C_1, C_2 > 0$, 对其有

$$C_1 \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant C_2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

我们应用简化的记号:

O.N.S. 表示正交规范系 ；提醒一下，函数系 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2(a,b)$ 叫做正交规范的，如果

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 1, & n = m\text{时}, \\ 0, & n \neq m\text{时}, \end{cases} \quad n, m = 1, 2, \cdots$$

C.O.N.S. 表示完全正交规范系 .

a.e. 表示几乎处处.

为了指明某一等式是包含在等式内的某些量中间的一个量的定义，我们代替符号 “=” 而采用符号 “:=”, “ =: ” 或 “ ≡ ”.

说法 “见定理 5.1 ” 或 “见 §3.2 ” 指的是引用第 5 章的定理 1, 以及相应地引用第 3 章的 §2. 当引用同一章的内容时，本章号码就省略了.

目 录

第一章　预备概念和某些一般结果

本章引入一些其应用将贯穿全书始终的概念. 在这里也将引进一系列一般性的结论，其中某一些结论的证明在附录一中给出.

§1.1　收敛的形式

本书内证明的定理大部分是关于某些级数的收敛性或发散性的论断，所以我们的叙述从以后要讨论的收敛的形式开始.

I.　级数的依范数收敛

特别地，函数项级数在空间 $L^p(0,1), 1 \leqslant p \leqslant \infty$ 及 $C(0,1)$ 内的收敛.

II.　测度收敛

倘若在空间 $L^0(0,1)$ 内引入距离

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}dx, \tag{1}$$

则 $L^0(0,1)$ 成为一个完备线性距离空间. 序列 $f_n(x), n=1,2,\cdots$, $(f_n \in L^0(0,1))$ 依测度收敛 到函数 $f(x)$ 等同于依尺度 (1) 的收敛. 亦即

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0.$$

III.　几乎处处 (a.e.) 收敛

定义 1　若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in (0,1) \tag{2}$$

几乎处处收敛于某一几乎处处有限函数，则称几乎处处有限的可测函数

$$S^*(x) = \sup_{1\leqslant N<\infty} \Big|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\Big| \tag{3}$$

为该级数的 **部分和的优控**.

定义 2　O.N.S.$\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in (0,1)$ 称为收敛系，倘若每一形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \tag{4}$$

的级数在 $(0,1)$ 上几乎处处收敛.

每一收敛系自然产生一个部分和的优控制算子 S^*_Φ, 其作用是由 l^2 到空间 $L^0(0,1)$ 内.

这就是说，对于 $\{a_n\}\in l^2$

$$S^*_\Phi(\{a_n\})=\sup_{1\leqslant N<\infty}\Big|\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi_n(x)\Big|. \tag{5}$$

大部分关于正交级数几乎处处收敛的问题都归结到研究算子 S^*_Φ 的性质 (对任一系 Φ, 该算子定义在 l^2 内一个稠子集上，该稠子集的元是只有有限项为零的属于 l^2 的序列 $\{a_n\}$). 此处我们给出以下

命题 1 为使 O.N.S.$\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x\in(0,1)$ 是收敛系:

a) 必须且只需，对每一序列 $\{a_n\}\in l^2$, 函数

$$\sup_{1\leqslant N<\infty}\Big|\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi_n(x)\Big|$$

在 $(0,1)$ 上几乎处处有限;

b) 只需存在某个 $p>0$ 及 $C_0<\infty$, 使得对每一有限序列 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$, 有不等式成立:

$$\int_0^1\Big[S^*_\Phi(\{a_n\})\Big]^p dx\leqslant C_0\Big(\sum_{n=1}^{M}a_n^2\Big)^{\frac{p}{2}}, \tag{6}$$

函数 $S^*_\Phi(\{a_n\})$ 由 (5) 定义 [a].

证 a) 只需证充分性. 假定充分性不成立，那么存在一个形如 (4) 的级数在一个正测度集上发散. 这说明，对某个 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$, 找得到正整数序列 M_k 和可测的取整数值的函数序列 $N_k(x)$, 它们满足 $M_k<N_k(x)<M_{k+1}$, 使得对 $k=1,2,\cdots$, 对于集

$$G_k:=\Big\{x\in(0,1):\quad\Big|\sum_{n=M_k}^{N_k(x)}a_n\varphi_n(x)\Big|>\varepsilon\Big\}$$

有 $m(G_k)>\delta$ 成立.

定义一个序列 $\lambda_n, n=1,2,\cdots$, 令 λ_n =const=C_k, 当 $M_k\leqslant n<M_{k+1}$ 时. 这里 $C_k\nearrow\infty$ 要选择上升足够缓慢的，以便能使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2\lambda_n^2$ 收敛.

---

[a] 此处和往后，我们一直假定所讨论的函数项级数以及序列的项均是几乎处处有限的可测函数.

这样一来，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_n\varphi_n(x)$, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2\lambda_n^2 < \infty$, 而同时对 $x \in G := \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} G_k (m(G) \geqslant \delta)$, 有

$$\sup_{1\leqslant N<\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\lambda_n\varphi_n(x)\right| \geqslant \frac{1}{2}\sup_{1\leqslant k<\infty}\left|\sum_{n=M_k}^{N_k(x)} a_n\lambda_n\varphi_n(x)\right| \geqslant \varepsilon\cdot\lim_{k\to\infty} C_k = \infty,$$

这与形如 (5) 的每一函数的几乎处处有限的假定相矛盾.

b) 假定不然，那么 (6) 成立，可是对某个数列 $\{a_n\}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1$, 有

$$\sup_{1\leqslant N<\infty}\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(x)\right| = \infty, \quad x \in G, m(G) > 0.$$

此时显然，对于某个常数 K, 可以找到函数 $N(x)$, 使得 $\sup\limits_{x\in(0,1)} N(x) = M < \infty$, 且

$$m\left\{x \in (0,1): \quad \left|\sum_{n=1}^{N(x)} a_n\varphi_n(x)\right| > K\right\} > \frac{m(G)}{2},$$

可是这样一来，对于数组 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$ 就有

$$\int_0^1 \left[S_\Phi^*(\{a_n\})\right]^p dx \geqslant \frac{1}{2}K^p m(G) > C_0,$$

只要 K 充分大的话. 最后的不等式与 (6) 矛盾.

IV. 线性距离空间（特别是 Banach 空间）中的无条件收敛

定义 3 由线性距离空间 X 的元素为其项的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{7}$$

称为 **无条件收敛**，倘若对自然数序列的每一重排 $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} \tag{7'}$$

在 X 内收敛.

容易看出，每一无条件收敛的级数的和不依赖于 σ.

定理 1 为使完备线性距离空间 X 内的级数 (7) 无条件收敛，必须且只需对每一数组 $\{\varepsilon_n\},\varepsilon_n=\pm1,n=1,2,\cdots$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x_n \tag{8}$$

在 X 内收敛.

证 显然，形如 (8) 的级数的全体的收敛性等价于以下形式级数全体的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n' x_n,\quad \varepsilon_n'=0,1,\quad n=1,2,\cdots \tag{8$'$}$$

假定级数 (7) 在经过项的某一重排之后发散，记重排为 $\sigma=\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$. 这说明，存在 $\delta>0$ 以及自然数的两个子序列 $\{N_k\leqslant M_k<N_{k+1}\}$, 能使有

a) $\rho(\sum\limits_{n=N_k}^{M_k}x_{\sigma(n)},0)\geqslant\delta,\quad k=1,2,\cdots$ 其中$\rho(x,0)$ 是 x 到 0 的距离.

b) 倘若 $A_k=\max\{\sigma(n):N_k\leqslant n\leqslant M_k\},\quad B_k=\min\{\sigma(n):N_k\leqslant n\leqslant M_k\}$, 则 $B_k<A_k<B_{k+1},k=1,2,\cdots$

置 $\varepsilon_n'=1$, 当 $n\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{\sigma(m):N_k\leqslant m\leqslant M_k\}$； $\varepsilon_n'=0$, 对其他 n. 那么由关系式 a),b) 推出，当 $k=1,2,\cdots$ 时，有

$$\rho\Big(\sum_{n=B_k}^{A_k}\varepsilon_n'x_n,0\Big)=\rho\Big(\sum_{n=N_k}^{M_k}x_{\sigma(n)},0\Big)\geqslant\delta,$$

这就是说，存在形如 (8$'$) 的级数在 X 内发散.

今设级数 (7) 无条件收敛，我们来证明一切形如 (8$'$) 的级数都收敛，从而一切形如 (8) 的级数亦然. 事实上，如果某个形如 (8$'$) 的级数发散，那么我们可以找到数列 $\{N_k\}_{k=1}^{\infty},\{M_k\}_{k=1}^{\infty},N_k\leqslant M_k<N_{k+1}$, 使有

$$\rho\Big(\sum_{n=N_k}^{M_k}\varepsilon_n'x_n,0\Big)\geqslant\delta>0,\quad k=1,2,\cdots$$

然后选择一个这样的重排 $\sigma=\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$, 使得对于 $k=1,2,\cdots$ 当 $N_k\leqslant n<M_k$ 时，$\varepsilon_n'=1$ 相应的那些项 x_n 在级数 (7$'$) 内依次出现，那么我们就得到级数 (7) 的一个发散重排了，这和无条件收敛矛盾. 定理 1 证毕.

V. 函数项级数的几乎处处无条件收敛

定义 4　级数 (2) 称为几乎处处无条件收敛, 倘若对自然数列每一重排 $\sigma=\{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x) \tag{9}$$

都几乎处处收敛 (当然, 级数 (9) 的发散点集 (零测度集) 可能与重排 σ 有关).

定义 3 和 4 虽然完全相似, 然而级数的几乎处处无条件收敛的证法和依范或依距离收敛的情形完全不同. 问题在于, 对于级数 (2) 的几乎处处无条件收敛, 一般地说, 仅有形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x), \quad \varepsilon_n=\pm 1, n=1,2,\cdots \tag{10}$$

的一切级数的几乎处处收敛是不够的. 相应的例子将在第 3 章内给出 (见推论 3.7). 这里要指出, 由级数 (2) 的几乎处处无条件收敛可直接推出一些形如 (10) 的级数几乎处处收敛, 然而由一切形如 (10) 的级数的几乎处处收敛推出的是 (见定理 2.14) 每一形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n(x), \quad \{\lambda_n\}\in l^{\infty}$$

的级数的几乎处处收敛.

定义 5　O.N.S.$\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x\in(0,1)$ 称为 **无条件收敛系**, 倘若每一形如 (4) 的级数在 $(0,1)$ 上几乎处处无条件收敛.

§1.2　完备性, 整体性, 双正交性

设 X 是 Banach 空间, X^* 是其对偶空间.

定义 6　元素系 $\{x_\alpha\}\subset X$ 称为在 X 内 **完备**, 倘若 $\{x_\alpha\}$ 的线性包的闭包是 X.

在 $L^2(0,1)$ 内的完备 O.N.S.$\Phi=\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 称为 **完备正交规范系**, 记作 C.O.N.S.

定义 7　称元素系 $\{x_\alpha^*\}\subset X^*$ 是 **整体的**, 倘若在 X 内不存在非零元 x 能使 $<x_\alpha^*, x>=0$ 对一切指标 α 成立.

下面的命题是空间 $L^p(0,1)$ 和 $L^q(0,1)$, 当 $1<p<\infty, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时的对偶性质的直接推论.