

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

高等数学学习指导

蔺小林 白云霄 王晓琴 编
王 莉 谭宏武 王玉萍

陕西人民出版社

高等数学学习指导

蔺小林 白云霄 王晓琴 编
王 莉 谭宏武 王玉萍

陕西人民出版社

高等数学学习指导

编 者 蔺小林 白云霄 王晓琴 王 莉 谭宏武 王玉萍
出版发行 陕西人民出版社 (西安北大街 147 号 邮编 710003)

印 刷 陕西科技大学印刷厂
开 本 787mm×1092mm 16 开 18.25 印张
字 数 400 千字
版 次 2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 次印刷
印 数 1—1000
书 号 ISBN 978-7-224-06262-5
定 价 25.00 元

前 言

高等数学是高等院校理工科专业一门非常重要的基础课,也是硕士研究生入学考试全国统一命题的必考课程。学好高等数学对于学好其他专业基础课、专业课以及成功考取硕士研究生有非常重要的作用。因此基于高等数学课程在期末考试、其他课程学习以及考研的要求,我们组织多年从事高等数学教学、具有丰富教学经验的骨干教师编写了《高等数学学习指导》。本书旨在帮助学生理解高等数学的基本概念,掌握高等数学的解题方法,进而运用高等数学知识解决学生在学习其他课程所遇到的问题,激发学习兴趣,提高学习效果。

本书是集知识点小结、解题方法、题型归类、思维训练、章节练习和期末测试为一体的学习辅导书,主要内容有以下三个方面:

1. 基本知识小结 我们将高等数学每一章的基本内容进行小结,把基本概念、基本性质和基本解题方法归纳总结出来,突出考点的核心知识,提纲挈领地帮助学生条理化数学知识,加深理解,强化记忆。

2. 解题方法归类 根据每一章的基本内容和各章之间的相互联系,对基本的解题方法进行归类,阐明各解题方法之间的相互联系和区别,便于学生灵活掌握解题方法。

3. 典型例题分析 根据高等数学教学过程中的难点和重点,结合高等数学大纲要求和考研特点,对典型例题进行分析和解答,达到举一反三、融会贯通的目的,帮助学生掌握高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧。

本书有以下三方面特点:

1. 系统性 本书对高等数学所有章节内容进行了小结,对各章节的解题方法进行了归类,在知识关联方面,给出了各章之间相互联系的典型例题,前后浑然一体,系统性强。

2. 条理性 本书对知识点进行条理化总结,章节之间前后贯通,罗列出每一章主要内容,达到纲举目张目的,条理清楚,便于学生学习、记忆及理解。

3. 实用性 本书在基本知识小结基础上,主要对高等数学解题方法进行归类,通过典型例题渗透数学知识,体现解题方法,进而加强学生数学思维训练,拓宽知识视野。在题型选择上既有概念题、基本方法计算题,也有综合题,同时配套有练习题和期末测试题,便于学生检测自己对知识的掌握程度,实用性好。

本书第一、三、八章由白云霄编写,第二章由王莉编写,第四、七、十二章由王晓琴编写,第五、六章由谭宏武编写,第九、十章由蔺小林编写,第十一章由王玉萍编写,最后由蔺小林统改全稿。

本书在编写过程中得到许多教师和同仁的大力支持,陕西省工业与应用数学学会理事长、西安交通大学理学院数学学科主任、博士生导师蒋耀林教授,西北大学数学系主任、博士生导师屈长征教授,长安大学理学院院长、博士生导师封建湖教授等,在百忙中审阅

了本书的部分手稿,提出了许多有益的建议,陕西科技大学理学院数学系主任侯再恩教授,应用数学教研室主任王社宽副教授,基础数学教研室副主任任小红副教授,信息教研室主任刘海峰副教授等同仁给予很多帮助,陕西人民出版社给予我们大力支持,在此对以上各位致以衷心感谢。

由于编写时间仓促,水平有限,错误和不足之处在所难免,恳请广大读者和同仁赐教。

编 者

2007 年 8 月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
一、知识点小结	(1)
二、解题方法归类	(6)
三、典型例题	(8)
四、习题	(26)
第二章 导数与微分	(29)
一、知识点小结	(29)
二、解题方法归类	(30)
三、典型例题	(31)
四、习题	(44)
第三章 中值定理与导数的应用	(46)
一、知识点小结	(46)
二、解题方法归类	(49)
三、典型例题	(49)
四、习题	(68)
第四章 不定积分	(70)
一、知识点小结	(70)
二、解题方法归类	(71)
三、典型例题	(73)
四、习题	(81)
第五章 定积分	(83)
一、知识点小结	(83)
二、解题方法归类	(85)
三、典型例题	(86)
四、习题	(100)
第六章 定积分应用	(103)
一、知识点小结	(103)
二、解题方法归类	(104)
三、典型例题	(104)
四、习题	(110)

第七章 空间解析几何与向量代数	(112)
一、知识点小结	(112)
二、解题方法归类	(114)
三、典型例题	(115)
四、习题	(124)
第八章 多元微分学	(125)
一、知识点小结	(125)
二、解题方法归类	(130)
三、典型例题	(132)
四、习题	(153)
第九章 重积分	(155)
一、知识点小结	(155)
二、解题方法归类	(158)
三、典型例题	(159)
四、习题	(177)
第十章 曲线积分与曲面积分	(179)
一、知识点小结	(179)
二、解题方法归类	(185)
三、典型例题	(186)
四、习题	(209)
第十一章 无穷级数	(214)
一、知识点小结	(214)
二、解题方法归类	(219)
三、典型例题	(221)
四、习题	(239)
第十二章 常微分方程	(242)
一、知识点小结	(242)
二、解题方法归类	(244)
三、典型例题	(244)
四、习题	(253)
测试题	(255)
习题参考答案	(270)
测试题参考答案	(281)

第一章 函数与极限

一、知识点小结

(一) 函数

1. 函数的定义 设有两个变量 x 及 y , 变量 x 的变域为 D , 如果对于 D 中的每一个 x 值, 按照一定的法则, 变量 y 有一个确定的值与之对应, 则称变量 y 为变量 x 的函数, 记作:

$$y = f(x)$$

x 为自变量, y 为因变量, D 为定义域, 记为 D_f , 变量 y 的取值的集合称为函数的值域, 记作 Z_f .

函数概念的两要素为定义域和对应法则.

注 当且仅当给定的两个函数其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数.

2. 分段函数 如果一个函数在定义域内, 对应于不同的区间段有着不同的表达式, 则该函数称为分段函数, 常见的分段函数有:

$$(1) \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0; \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 取整函数 } y = [x];$$

$$(3) \text{ 狄利克莱(Dirichlet) 函数 } y = f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

3. 复合函数 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$ 时, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数, x 为自变量, u 为中间变量, y 为因变量. 复合函数可由多个复合而成, 要认清中间变量, 要会复合并会分解复合函数.

4. 函数的几种特性

1° 有界性 设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界. 若不存在这样的 $M > 0$, 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界, 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言的, 函数有界的充要条件是函数既有上界又有下界.

常见的有界函数:

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi, |\arctan x| < \frac{\pi}{2},$$

$$|\operatorname{arccot} x| < \pi, \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1, \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1.$$

这些有界量对求极限都是很有用的.

2° 奇偶性 设函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 若 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数; $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数. 偶函数的图象关于 y 轴对称, 奇函数的图象关

于坐标原点对称. 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数; 偶数个奇(或偶) 函数之积为偶函数; 奇数个奇函数之积为奇函数; 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|, \cos x, x^{2n} (n \text{ 为正整数}), f(x) + f(-x), \dots$.

常见的奇函数: $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \dots$.

3° 单调性 设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2) \text{)}$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少).

注 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知可导, 则其单调性的判别用定义; 若 $f(x)$ 在区间 X 上可导, 则利用导数判别简便.

4° 周期性 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于 $\forall x \in X$, 有 $f(x+T) = f(x)$ 则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 均以 T 为周期, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2 (T_1 \neq T_2)$ 为周期, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见的周期函数: $\sin x, \cos x$, 周期为 2π . $\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|, \sin^2 x$, 周期为 π .

5. 初等函数 由常数 C 及基本初等函数通过有限次的四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

(二) 极限

1. 数列极限

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$ 一个正整数 N , 当 $n > N$ 时, 恒有:

$$|x_n - A| < \epsilon$$

2. 函数极限

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$ 一个 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有:

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$ 一个 $X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有:

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x > X$ 时, 恒有:

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $x < -X$ 时, 恒有:

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

3. 左右极限

左极限: $f_-(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

右极限: $f_+(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

4. 无穷小 以 0 为极限的量称为无穷小量.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有:

$$|f(x)| < \varepsilon$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有:

$$|f(x)| < \varepsilon$$

5. 无穷大 (实际上是极限不存在的一种形式)

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有:

$$|f(x)| > M$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时, 恒有:

$$|f(x)| > M$$

注 无穷大量一定是无界量, 但无界量不一定是无穷大量, 例如: 数列 $x_n: 1, 0, 2, 0, \dots, n, 0, \dots$, 函数 $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时, 都是无界的但不是无穷大.

6. 无穷小的比较

设 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \beta(x) = 0$

(1) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

(2) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, 称 $\alpha(x)$ 是与 $\beta(x)$ 同阶的无穷小.

(4) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小.

(5) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = C \neq 0, k > 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

常用的等价无穷小:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^a - 1 \sim ax$.

(三) 函数的连续

1. 连续的定义

定义1 设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 给 x 在 x_0 处以增量 Δx , 相应地得到函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$. 若极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

定义2 设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

一般地, 证明函数连续性的命题用第一个定义方便; 判断函数在某点是否连续, 尤其是判断分段函数在分界点的连续性用定义2方便.

2. 间断点

定义 若 $f(x)$ 在 x_0 处出现如下三种情况之一:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点;

间断点 x_0 的类型

第一类间断点: 左、右极限都存在 $\begin{cases} \text{左极限} = \text{右极限} & \text{可去间断点} \\ \text{左极限} \neq \text{右极限} & \text{跳跃间断点} \end{cases}$

第二类间断点: 左、右极限至少有一个不存在. 若 $f_-(x_0), f_+(x_0)$ 之中有一个为 ∞ , 则 $x = x_0$ 为无穷间断点.

$x = 0$ 为 $\sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

(四) 重要定理与公式

1. 重要定理

定理1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$.

定理2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

定理3 (保号性定理), 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A > 0$ (或 $A < 0$) 则存在一个 $\delta > 0$, 当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

定理4 单调有界数列必有极限.

定理5 (夹逼定理) 设在 x_0 的邻域内, 恒有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

定理6 无穷小运算性质

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小;

(2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小;

(3) 无穷小乘以有界量仍为无穷小.

定理7 在同一变化趋势下无穷大的倒数为无穷小,非“0”的无穷小量之倒数为无穷大.

定理8 初等函数在其定义域的区间内连续.

定理9 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 即 $\exists M > 0, \forall x \in [a, b]$, 恒有: $|f(x)| \leq M$.

定理10 (最值定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上, $f(x)$ 至少取得最大值与最小值各一次, 即 $\exists \xi, \eta$ 使得:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} & \xi &\in [a, b], \\ f(\eta) &= \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\} & \eta &\in [a, b]. \end{aligned}$$

定理11 (介值定理) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ (或最大值 M 与最小值 m) 之间的任一实数, 则在 $[a, b]$ 上至少 $\exists \xi$, 使得:

$$f(\xi) = \mu \quad (a \leq \xi \leq b).$$

定理12 (零值定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则在 (a, b) 内至少 $\exists \xi$, 使:

$$f(\xi) = 0 \quad (a < \xi < b).$$

2. 重要公式

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{该极限的特点} \begin{cases} \text{① } \frac{0}{0} \text{ 型未定式} \\ \text{② } \sin \square \text{ 与分数线另一侧的变量 } \square \text{ 形式一致.} \end{cases}$$

注意 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \neq 1, \text{ 为非 } \frac{0}{0} \text{ 型} \right).$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

该极限的特点: $\begin{cases} \text{① } 1^\infty \text{ 型未定式} \\ \text{② 括号中 1 后面的变量 (包括符号) 与幂互为倒数.} \end{cases}$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, n = m \\ 0, n < m \\ \infty, n > m \end{cases}$$

求 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 通常用“抓大头”的方法处理, 所谓“抓大头”就是抓住关于 x 的最高次方的项, 而把其余的项略掉, 例如:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$$

(4) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 以下各函数趋于 $+\infty$ 的速度,

$$\frac{\ln x, x^a (a > 0), a^x (a > 1), x^x}{\text{由慢变快}}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\ln n, n^a (a > 0), a^n (a > 1), n!, n^n}{\text{由慢变快}}$$

知道函数趋于 $(+\infty)$ 的速度, 用“抓大头”求极限很方便, 例如:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + n^3}{3^n - n^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3. \text{ (读者想一想, 为什么?)}$$

(5) 几个常用的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} (a > 0) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$$

这些极限对同学们以后求极限, 研究连续性, 间断点都很重要.

二. 解题方法归类

1. 求极限的方法

1° 利用极限的四则运算与幂指数运算法则求极限.

(1) 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ 则

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B, \lim [f(x)g(x)] = A \cdot B,$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0), \lim f(x)^{g(x)} = A^B (A > 0).$$

(2) $\lim f(x) = \infty, \lim g(x) = \infty$ 或 $\lim g(x) = A \neq 0$, 则 $\lim [f(x)g(x)] = \infty$.

(3) $\lim f(x) = \infty, g(x)$ 有界, 则 $\lim [f(x) \pm g(x)] = \infty$.

(4) 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = +\infty$, 则

$$\lim f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < A < 1 \\ +\infty, & A > 1 \end{cases}, \quad \lim g(x)^{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & A > 0 \\ 0, & A < 0 \end{cases}.$$

注: ① $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x); \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$, 要求: $\lim f(x), \lim g(x)$ 都必须存在.

② 若 $\lim f(x) = A, \lim g(x)$ 不存在也不为 ∞ , 则 $\lim [f(x) \pm g(x)]$ 不存在也不为 ∞ , 但当 $\lim f(x), \lim g(x)$ 都不存在时 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ 均不能确定有没有极限要作具体分析.

2° 利用函数的连续性求极限.

(1) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, 若补充定义 $g(a) = A$, 则 $g(x)$ 在 $x = a$ 连续. 若又有 $y = f(u)$ 在 $u = A$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(A)$.

3° 利用重要极限求极限.

基本形式:

基本形式: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 一般形式: $\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1$

基本形式: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

一般形式: $\lim_{\square \rightarrow 0} (1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e$

4° 利用等价无穷小因子替换求极限.

5° 利用无穷小与有界量之积为无穷小求极限.

6° 分别求左、右极限求得函数的极限.

主要用于分段函数的分界点求极限,或函数表达式中含有左、右极限不相等的项.

($x \rightarrow 0$ 时, $e^{\frac{1}{x}}$, $\arctan \frac{1}{x}$, $[x]$) 求极限.

7° 利用夹逼准则求极限.

经常用于求数列的极限.

8° 利用定积分的定义求极限.

主要用于求某些和式的极限.

9° 利用函数极限求数列的极限

设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则 $\forall x_n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

例如: 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}$, 可先求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ (用洛必达法则即可求出).

10° 利用洛必达法则求极限(第三章中详细介绍)是求未定式极限最常用的方法.

11° 利用泰勒公式求极限(见第三章).

12° 利用导数的定义求极限(见第二章).

13° 利用级数收敛的必要条件求极限(见第十一章).

2. 判断极限存在与不存在的方法

1° 夹逼定理

既可以判断数列的极限存在,也可以判断函数的极限存在.

2° 单调有界定理

主要用于判断数列的极限存在.

3° 单侧极限与双侧极限的关系

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0+0) = f(x_0-0) = A$

主要用于分段函数分界点的极限的判断.

4° 数列及其子列的关系

找出两个子列极限不同即可说明该数列极限不存在,也可以用于函数极限不存在的判断.

例如: 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

取 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 均有 $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{y_n} = 0$, 因

此 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

3. 确定无穷小阶的方法

1° 利用等价无穷小来确定.

2° 利用洛必达法则.

确定 k 使 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^k} = A \neq 0$, 则 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小.

3° 用泰勒公式(见第三章).

三. 典型例题

【题型 1 求函数定义域】

应记住下列简单函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x} \quad D_f: x \neq 0, (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$y = \sqrt[n]{x} \quad D_f: x \geq 0, [0, +\infty)$$

$$y = \log_a x \quad D_f: x > 0, (0, +\infty)$$

$$y = \tan x \quad D_f: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \cot x \quad D_f: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = \arcsin x \quad D_f: |x| \leq 1, [-1, 1]$$

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \log_{(x-1)}^{(16-x^2)}; \quad (2) f(x) = \int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt.$$

$$\text{解} \quad (1) \begin{cases} 16 - x^2 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < 4 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 4.$$

即 $(1, 2) \cup (2, 4)$.

(2) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 此题读者应在学完定积分后理解. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 所以 $x = 0$ 是被积函数的第一类间断点, 因此 $f(x) = \int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$ 在包含 $x = 0$ 的区间内有意义.

例 2 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求 $g(x) = f(x-3) + f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 故 $f(x-3)$ 的定义域为 $0 \leq x-3 \leq 2$, 即 $x \in [3, 5]$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的定义域为 $0 \leq \frac{x}{2} \leq 2$, 即 $x \in [0, 4]$, 于是 $g(x) = f(x-3) + f\left(\frac{x}{2}\right)$ 的定义域为 $[3, 4]$.

【题型2 求函数表达式】

例3 已知 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ($x \neq -1$), 求 $f\left(\frac{1}{x}\right), f[f(x)], f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

解 $f(x)$ 的对应法则是: $f(\square) = \frac{\square}{1+\square}$, 从而

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+x}; \quad f[f(x)] = \frac{f(x)}{1+f(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x};$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{x}, \quad f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{\frac{1+x}{x}}{1+\frac{1+x}{x}} = \frac{1+x}{1+2x}.$$

例4 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\underbrace{f_n(x) = f(f \cdots f(x) \cdots)}_{n \text{ 次复合}}$, 求 $f_n(x)$.

$$\text{解 } f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x) = f(f_2(x)) = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

$$\text{由归纳法可知: } f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

以上两题已知解析式求复合函数, 只须将中间量代入即可.

例5 设 $f(\sin^2 x) = \cos^2 x + \tan^2 x$, $0 < x < 1$, 求 $f(x)$.

解 $f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$ 令 $\sin^2 x = t$, $0 < t < \sin^2 1$

$$f(t) = 1 - 2t + \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t} - 2t$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{1-x} - 2x, \quad 0 < x < \sin^2 1.$$

例6 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.

解 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 即: $f(x) = x^2 - 2$ ($|x| \geq 2$).

例7 设 $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x$, 求 $f(x)$.

解 令 $t = \frac{x}{x+1}$, $x = \frac{t}{1-t}$

$$\text{则 } f(t) = \frac{t}{1-t}$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{x}{1-x} \quad (x \neq 1).$$

注 以上三题都是利用函数的复合关系求解析式,例5,例6用的是“凑”的方法,例7用的是代换的方法,一般地中间量若有单值的反函数(或单调)用作代换的方法,若非单调用“凑”的方法.

例8 设 $f(\frac{x+1}{2x-1}) = 2f(x) + x$, 求 $f(x)$.

解 令 $t = \frac{x+1}{2x-1}$, 即 $x = \frac{t+1}{2t-1}$

$$f(t) = 2f(\frac{t+1}{2t-1}) + \frac{t+1}{2t-1} \quad \text{即: } f(x) = 2f(\frac{x+1}{2x-1}) + \frac{x+1}{2x-1}$$

将原式代入,得

$$f(x) = 2(2f(x) + x) + \frac{x+1}{2x-1}$$

$$\text{解得: } f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{3(1-2x)}.$$

注 设 $f(\frac{a_1x+\beta_1}{a_2x+\beta_2}) = af(x) + \varphi(x)$, 其中 $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, a$ 为已知常数, $\varphi(x)$ 为已知函数, 只要 $\beta_2 = -a_1, a \neq 1$ 就可用例8的方法求出 $f(x)$.

例9 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| = 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases}$, $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

$$\text{解 } f(g(x)) = \begin{cases} 1 & |g(x)| < 1 \\ 0 & |g(x)| = 1 \\ -1 & |g(x)| > 1 \end{cases} \quad \text{即: } f[g(x)] = \begin{cases} 1 & e^x < 1 \\ 0 & e^x = 1 \\ -1 & e^x > 1 \end{cases}$$

$$\text{于是 } f[g(x)] = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e & |x| < 1 \\ 1 & |x| = 1 \\ e^{-1} & |x| > 1 \end{cases}$$

例10 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ 2+x & x > 0 \end{cases}$ 求 $g[f(x)], f[g(x)]$.

$$\text{解 } g(f(x)) = \begin{cases} 2-f(x) & f(x) \leq 0 \\ 2+f(x) & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x & x \geq 0 \\ 2+x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) & g(x) < 0 \\ -g(x) & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

因为 $g(x) > 0$, 所以

$$f(g(x)) = -g(x) = \begin{cases} x-2 & x \leq 0 \\ -x-2 & x > 0 \end{cases}$$