文都教育

2007 考研数学全真模拟试卷及精析

主编：蔡子华

数学四

按照2007年新大纲内容要求

涵盖历年真题所有知识考点

考题模式完全依据真题模式

体现考研命制试题指导思想

精编试题与真题难度最逼近

随堂演习名师精解各个击破

中国国际广播音像出版社

2007

考研数学

全真模拟试卷及精析

主编：

2007

考研数学

全真模拟试卷及精析

主编：蔡子华

数学四

按照2007年新大纲内容要求

涵盖历年真题所有知识考点

考题模式完全依据真题模式

体现考研命制试题指导思想

精编试题与真题难度最逼近

随堂演习名师精解各个击破

中国国际广播音像出版社

2007考研数学全真模拟试卷及精析(数学四)/蔡子华主编. —北京:中国国际广播音像出版社,2006.8
ISBN 7-89995-427-4
Ⅰ.2… Ⅱ.蔡… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—习题
Ⅳ.013—44

2007考研数学全真模拟试卷及精析(数学四)
编　　者:蔡子华
责任编辑:王兴旺　肖幸娟
出版发行:中国国际广播音像出版社
地　　址:北京市复兴门外大街2号
邮政编码:100866
文都网址:http://www.wendu.com
销售服务热线:010-88820136转833、830(传真)
经　　销:新华书店经销
印　　刷:北京龙兴印刷厂
开　　本:787×1092毫米 1/16
印　　张:9.75
版　　本:2006年8月第2版　　2006年8月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-89995-427-4
定　　价:12.00元

编 写 说 明

2007年的考研复习即将进入冲刺阶段。对于广大考生来说，最大的愿望是能找到一种既能尽快提高自己熟悉考试题型及掌握特定解法的能力，又有实战感受的方法。

《2007年考研数学全真模拟试卷及精析》即为此而编写。

本全真模拟试卷严格按照《2007年全国硕士研究生入学考试数学考试大纲》的考试要求编写，考点覆盖全面，题型和题量与2007年考研试题完全一致，难度与真题相当。试卷后附有分析及详细解答。

本全真模拟试卷的编者长期从事高校数学教学工作，参加过多种层次的考试命题，并连续多年参与研究生入学数学考试的辅导及阅卷工作；熟悉考试的重难点及考生的知识薄弱点，对命题规律等亦颇有研究。

相信本全真模拟试卷能在有效提高应试技巧和实战能力诸方面给考生以较大的帮助。顺祝广大考生取得理想的考研成绩。

编　者

2006年8月

考研数学试题(2001年——2003年)知识点分布表
数学四

所属单元＼考试内容＼年份	2001	2002	2003
函数、极限、连续性	①重要极限	①重要极限 ②可导与连续的关系 ③洛必达法则 ④介值定理,最大、最小定理	①洛必达法则,重要极限 ②左连续的定义 ③等价无穷小替换
导数与微分	①弹性	①弹性及其经济意义	①导数的定义
中值定理及导数的应用	①极值、拐点 ②拉格朗日中值定理 ③求最大利润 ④罗尔定理		①渐近线 ②函数的最值
不定积分		①原函数的定义 ②分部积分法	
定积分及应用	①分段函数的原函数的性质 ②变上限的定积分求导(2次) ③积分中值定理	①积分上限的函数的奇偶性 ②变上限积分函数的导数	①奇偶函数的定积分 ②分部积分法 ③函数的平均值
多元函数微积分	①求偏导数 ②方程组所确定的隐函数的导数 ③二重积分的计算(直角坐标下及对称性)	①复合函数,隐函数的求导法,全微分 ②二重积分	①二重积分的运算性质及几何意义 ②极值的必要条件 ③二元抽象复合函数的二阶偏导数 ④二重积分的计算(极坐标)
微分方程			①一阶线性方程
线性代数	①余子式,三阶行列式的计算 ②矩阵的初等变换与初等矩阵 ③非齐次方程组有无穷多解的条件 ④用正交变换将矩阵对角化 ⑤向量组的线性相关性的判定	①矩阵的乘法,求逆矩阵 ②向量组的线性相关性 ③伴随矩阵 ④齐次方程组的基础解系 ⑤矩阵对角化 ⑥矩阵的行列式	①解矩阵方程 ②逆矩阵的定义,矩阵的乘法 ③相似矩阵的性质 ④向量组等价 ⑤非齐次方程组有无解的判定 ⑥特征值与特征向量的定义 ⑦行列式的计算 ⑧解非齐次方程组
概率论	①切比雪夫不等式 ②事件的关系 ③相关系数 ④中心极限定理 ⑤随机变量函数的数学期望 ⑥方差与协方差的关系式 ⑦二维均匀分布	①离散型随机变量的相关系数 ②二维随机变量的函数的分布函数 ③中心极限定理 ④事件独立的充要条件 ⑤随机变量函数的分布及分布函数	①相关系数、方差、斜方差的计算 ②数学期望的性质 ③事件的关系(独立、互不相容) ④独立与不相关的关系 ⑤一维随机变量函数的分布 ⑥事件相互独立的定义 ⑦构造随机变量,两点分布的数字特征

考研数学试题(2004年——2006年)知识点分布表

数学四

考试内容 所属单元 \ 年份	2004	2005	2006
函数、极限、连续性	①用洛必达法则、函数连续性求极限 ②函数连续性的定义 ③函数有界性的定义 ④用等价无穷小求极限 ⑤零点定理 ⑥保号性	①重要极限 ②函数的有界性 ③罗必达法则	①无穷小的比较 ②重要极限 ③罗必达法则 ④极限求法 ⑤函数的连续性
导数与微分	①导数的定义 ②用求导法则求导	①导数的定义、几何意义 ②高阶导数、复合函数求导 ③微分的几何意义	
中值定理及导数的应用	①极值点、拐点 ②弹性、函数单调性的判定 ③求最值	①函数的极值 ②用单调性证不等式 ③用导数研究函数的图象(方程的根的讨论)	①导数的几何应用(单调性、凹凸性) ②函数单调性的判别法 ③中值定理 ④泰勒公式
不定积分			
定积分及应用	①换元法 ②平面图形的面积 ③广义积分 ④积分上限的函数	①广义积分的敛散性 ②定积分的换元法 ③定积分的分部积分法	①定积分的性质 ②平面图形的面积
多元函数微积分	①求二元函数的偏导数 ②二重积分的计算(极坐标下)	①全微分 ②二重积分的性质 ③复合函数的二阶偏导数 ④二重积分的计算 ⑤二元函数的极值	①复合函数求导法 ②全微分 ③二元函数的条件极值 ④二重积分的计算
微分方程	①一阶线性方程(列方程、解方程)	①可分离变量的方程、特解	①线性方程解的性质与结构 ②一阶线性方程
线性代数	①求 A^n(利用相似求) ②求非齐次线性组的解 ③正交矩阵的定义 ④等价矩阵的性质 ⑤非齐次线性方程的解 ⑥求特征值与特征向量及矩阵	①向量组的线性相关性 ②行列式的性质、行列式的计算 ③矩阵的运算 ④齐次线性方程组、同解问题 ⑤矩阵的乘法 ⑥矩阵的特征值 ⑦矩阵相似对角矩阵	①行列式的性质 ②矩阵的运算 ③向量组的线性相关性、极大线性无关组 ④矩阵的初等变换与初等矩阵 ⑤特征值、特征向量的定义 ⑥向量组的正交规范化 ⑦矩阵对角化 ⑧方阵的行列式、幂
概率论	①指数分布的数字特征及概率的求法 ②标准正态分布的上 α 分位点及概率的求法 ③方差、斜方差的性质 ④求二维(离散型)随机变量的概率分布 ⑤求相关系数 ⑥求函数的分布 ⑦求条件密度、联合密度、边缘密度 ⑧求二维随机变量的概率	①条件概率、全概率公式 ②随机变量的函数的分布 ③随机变量的独立性 ④中心极限定理 ⑤条件概率 ⑥二维随机变量的边缘密度 ⑦二维随机变量函数的分布 ⑧正态分布的性质及概率	①事件的关系 条件概率 加法公式 ②独立性 ③均匀分布求概率 ④正态分布标准化及概率 ⑤随机变量的函数的分布 ⑥二维随机变量的分布律的性质 ⑦二维随机变量的概率的求法 ⑧二维随机变量的条件概率 ⑨随机变量及函数的数字特征

目　　录

2007年全国硕士研究生入学考试

数学(四)　全真模拟试卷(一)

试卷密号：

试卷密号：

此密号考生不得填写

考试科目 数　学　(四)

题　号		得　分	评卷人
一			
二			
三	(17)		
	(18)		
	(19)		
	(20)		
	(21)		
	(22)		
	(23)		
	(24)		
总分			

注意：此半页考生不得填写

准考证编号＿＿＿＿＿＿

考试科目＿＿＿＿＿＿

报考学科、专业＿＿＿＿＿＿

报考研究方向＿＿＿＿＿＿

报考单位＿＿＿＿＿＿

注　意　事　项

1. 以上各项除试卷密号之外必须填写清楚。
2. 答案必须写准确、清晰、必须写在试卷上。
3. 字迹要清楚、卷面要整洁。
4. 草稿纸另发，考试结束，统一收回。

数学四　全真模拟试卷(一)

得分	评卷人

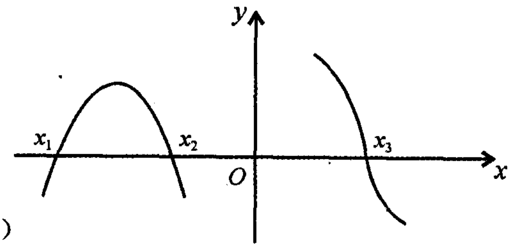
一、选择题：1－10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $P\ln 2$，已知该商品的最大需求量为 1000，则需求量 Q 关于价格 P 的函数关系是(　　).

(A) $Q = 1000e^{-P}$　　(B) $Q = 1000 \times 2^{-P}$

(C) $Q = 1000e^{-2P}$　　(D) $Q = 1000 \times 2^{-2P}$

(2) 设函数 $f'(x)$ 的图象如右图，则(　　).



(A) $f(x)$ 有两个极小值，一个极大值

(B) 有两个极大值，一个极小值

(C) 有一个极大值，一个极小值

(D) 没有极值

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f(a) < 0$，$f'(x) < f(x)$，则(　　)

(A) $\dfrac{f(b)}{f(a)} > e^{b-a}$　　(B) $\dfrac{f(b)}{f(a)} < e^{b-a}$

(C) $\dfrac{f(b)}{f(a)} \geqslant e^{b-a}$　　(D) $\dfrac{f(b)}{f(a)} \leqslant e^{b-a}$

(4) 下列说法中正确的是(　　)

(A) 若 $f'(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内单调减少

(B) 若 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值，则当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时 $f(x)$ 单调增加，$x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时 $f(x)$ 单调减少

(C) 若 $f(x)$ 在 x_0 点取得极值，则 $f(x)$ 在 x_0 点必连续

(D) 若 $f(x)$ 是偶函数且 $f''(0) \neq 0$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处必取得极值

(5) 设函数 $z = f(x,y) = x^{y^2}$，则下列结论成立的是(　　).

(A) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} > 0$　　(B) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} < 0$

(C) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \neq 0$　　(D) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$

(6) 设 $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$，其中 $z = z(x,y)$ 为由 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ 所确定的隐函数，则 $f'_x(1,1,2) =$ (　　).

(A) $\dfrac{28}{3}$　　(B) 9　　(C) $\dfrac{25}{3}$　　(D) 8

(7) 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 的非零特征值对应的特征向量为________.

(A) $(1,1,1)^T$　　(B) $(1,0,1)^T$　　(C) $(0,1,1)^T$　　(D) $(1,1,0)^T$

(8) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价,则不正确的命题是(　　).

(A) 如果 $|\boldsymbol{A}|>0$,则 $|\boldsymbol{B}|>0$

(B) 如果 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,则有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PBQ}=\boldsymbol{E}$

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{B}$ 非奇异

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

(9) 设随机变量 $X_1 \sim N(0,1)$,$X_2 \sim B(2,\frac{1}{2})$,$X_3$ 服从于参数为 $\lambda=1$ 的指数分布,

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} E(X_1) & D(X_1) & E(X_1^2) \\ E(X_2) & D(X_2) & E(X_2^2) \\ E(X_3) & D(X_3) & E(X_3^2) \end{bmatrix}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定是(　　).

(A) 可逆矩阵　　(B) 不可逆矩阵

(C) 对称矩阵　　(D) 反对称矩阵

(10) 设 A、B、C 是三个事件,则与 A 互斥的是(　　).

(A) $\overline{A}B \cup A\overline{C}$　　(B) $\overline{A(B \cup C)}$

(C) $\overline{ABC}$　　(D) $\overline{A \cup B \cup C}$

得分	评卷人

二、填空题:11－16 小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

(11) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{ax^2+2x+1}-x)=b$,则 $a=$________,$b=$________.

(12) 微分方程 $y'=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解为________.

(13) $\iint\limits_D(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.　　$D: x^2+y^2\leqslant 1$

(14) 曲线 $y=(x-1)^{5/3}$ 的拐点处的法线方程是________.

(15) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=$________.

(16) 设事件 $\overline{A}$,B 相互独立,且 $P(\overline{A})=P(B)=\frac{1}{3}$,则 $P(A+B)=$________.

三、解答题:17－24 小题,共 86 分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(17)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}+\frac{|x|}{\sin x}\right)$

得分	评卷人

(18)(本题满分 10 分)

计算$\iint\limits_{D}\sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 $D: x^2+y^2 \leqslant a^2 (0 < a < 1)$.

得分	评卷人

(19)(本题满分 11 分)

某商品交易市场上的税收收入与交易的成交额之间的关系经统计资料分析为：税收的收入随成交额增加的增长率等于税收收入的立方与成交额立方的 2 倍的差、再除以成交额与税收收入平方之积的 3 倍. 若成交额为 $x = 1$(万元) 时，税收收入 $y = 2$(百元)，试求该商品市场的税收收入与成交额之间的函数关系.

得分	评卷人

(20)(本题满分 11 分)

已知 $a \leqslant x \leqslant b$ 时 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

证明:$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$

得分	评卷人

(21)(本题满分 10 分)

设 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

(Ⅰ)试证:$\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \cdots, \boldsymbol{D}_n$ 成等差数列;

(Ⅱ)求 $\boldsymbol{D}_n$.

得分	评卷人

(22)（本题满分 12 分）

设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$，已知$A$有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$是$A$的二重特征值，试求可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

得分	评卷人

(23)（本题满分 11 分）

设随机变量 X、Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & y\leqslant 0\end{cases}$$

求：(Ⅰ)$Z=2X+Y$ 的概率密度函数； (Ⅱ)$E(Z)$.

得分	评卷人

(24)(本题满分 11 分)

已知二维随机变量(X,Y)服从于二维正态分布，X的边缘分布为$N(1,2^2)$，Y的边缘分布为$N(0,4^2)$，相关系数为$\rho_{XY}=-\dfrac{3}{4}$，设$Z=\dfrac{X}{2}+\dfrac{Y}{3}$.

(Ⅰ)求$E(Z)$，$D(Z)$；

(Ⅱ)求X、Z的相关系数ρ_{XZ}；

(Ⅲ)X、Z是否相互独立？

<table>
<tr><th colspan="7">测试总结</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="3">得分情况</td><td colspan="3">总分</td></tr>
<tr><td>选择题</td><td>填空题</td><td>解答题</td><td>各部分分值</td><td>各部分所得分</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>微积分</td><td></td><td></td><td></td><td>82</td><td></td></tr>
<tr><td>线性代数</td><td></td><td></td><td></td><td>34</td><td></td></tr>
<tr><td>概率论</td><td></td><td></td><td></td><td>34</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">测试分析</td></tr>
</table>

2007年全国硕士研究生入学考试

数学(四)　全真模拟试卷(二)

试卷密号：

考试科目 数　学　(四)

题号		得分	评卷人
一			
二			
三	(17)		
	(18)		
	(19)		
	(20)		
	(21)		
	(22)		
	(23)		
	(24)		
总分			

注意：此半页考生不得填写

试卷密号：

此密号考生不得填写

准考证编号 ____________

考试科目 ____________

报考学科、专业 ____________

报考研究方向 ____________

报考单位 ____________

注　意　事　项

1. 以上各项除试卷密号之外必须填写清楚。
2. 答案必须写准确、清晰、必须写在试卷上。
3. 字迹要清楚、卷面要整洁。
4. 草稿纸另发，考试结束，统一收回。

数学四　全真模拟试卷(二)

得分	评卷人

一、选择题: 1—10小题,每小题4分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 点都不可导,则 $F(x)=f(x)+g(x)$ 和 $G(x)=f(x)-g(x)$ 在 x_0 处(　　).

(A) 一定都不可导　　(B) 一定都可导

(C) 至少有一个可导　　(D) 至多有一个可导

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导,且 $f''(x)<0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$,则在 $(-\infty,0)$ 内 $f(x)$(　　).

(A) 单调增加且大于0　　(B) 单调增加且小于0

(C) 单调减少且大于0　　(D) 单调减少且小于0

(3) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以写成(　　).

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1} & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ 则在点 $x=1$ 处,函数(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

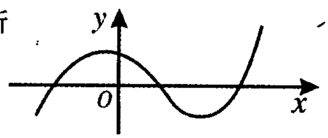
(C) 可导,但导函数不连续　　(D) 可导且导函数连续

(5) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$,$f'_y(x_0,y_0)$ 存在,是 $f(x,y)$ 在该点处连续的(　　).

(A) 充分而非必要条件　　(B) 必要而非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

(6) 若函数 $f(x)$ 存在二阶导数,且其一阶导数的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为(　　).



(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(7) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=2$,$|\boldsymbol{B}|=2$,则 $|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$(　　).

(A) 2^{n-2}　　(B) 2^n　　(C) 2^{n+1}　　(D) 2^{n-1}

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s\,(s>1)$,而 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2$,$\cdots$,$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_s$,则(　　)

(A) 秩 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=$ 秩 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$

(B) 秩 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)>$ 秩 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$