责任编辑：张玉霞
装帧设计：吴以征

GAILULUNYUSHULITONGJI

ISBN 7-5423-1145-X

9 787542 311450 >

ISBN 7-5423-1145-X

O·2　　定价：24.00 元

GAILULUNYUSHULITONGJI

概率论与数理统计

主编　刘国祥
何志芳
杨纪龙

甘肃教育出版社

前　　言

概率论与数理统计是大学理工科及管理类专业的一门重要的基础课. 尤其是随着我国社会经济的不断改革和发展,概率论与数理统计已不仅是数学专业、理工科及其它绝大多数专业和经济类专业的传统基础课程,而且也已成为人文管理类相关专业的大学必修课. 因此可以说,概率论与数理统计已基本成为继高等数学之后的又一门通识类数学课程. 正是在这样的情形下,我们编写了本教材. 为此,我们特别注意了以下几点.

1. 作为供数学专业使用的教材,我们尽量根据学生数学基础课的进程,能详则详,不能详则简. 例如,由于实变函数与概率论一般是同时开设的,因此,概率的定义尽量避免直接构建在学生尚未学到的测度论的框架上,而是通过逐步引入概率的统计定义,古典定义和几何定义,然后才总结性地给出概率的公理化定义,以使学生有一个逐步适应的过程. 又如,为使学生对大数定律在数理统计中的应用上能有清晰的理解,我们详述了随机变量序列的四种收敛性并给出了相关证明;为拓展学生学习的空间,有的地方我们增加了相对本科生具有前瞻性的内容,如统计决策、最佳检验等.

2. 同时作为供其它各专业使用的具备通识性的教材,我们力求通过具体实例引入概念,尽量避免抽象的数学刻画,并增加例子以帮助学生理解概念. 同时,在编排上作适当的调整,以利于学生的学习. 例如,我们把数字特征的概念放在随机变量(向量)及其分布之后,这样可以避免学生在尚未弄清随机变量(向量)的概念就陷入有关数字特征繁杂的微积分运算的尴尬局面之中. 另外,我们对非数学专业不必要的内容都加注了“*”号.

3. 在各章后配有大量的习题,并在书末附有习题答案以备参考.

本书在编写过程中参考了国内外多种教材,特别是从中摘取了不少好的例题和习题. 为此,我们向这些编著者表示诚挚的谢意.

参加本书初稿编写的有:第一章,何志芳;第二章,姚奕;第三章,杜秀丽;第四章,梁志彬;第五、六章,杨纪龙;第七章,赵媛媛;第八章,冯玉英;第九、十章,刘国祥. 大家对初稿进行了多次讨论修改. 前五章概率论部分由何志芳、后五章数理统计部分由杨纪龙进行了初步统稿. 全书由杨纪龙、刘国祥统稿,冯玉英也参加了全书的统稿工作. 王晓谦阅读了全稿,并提出了许多好的修改意见.

由于编写时间仓促,不当和错误在所难免,敬请读者批评、指正.

编　者

2002 年 10 月 28 日

目　录

第一章　事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科.那么,什么是随机现象呢?为此我们先引入如下基本概念.

一、必然现象与随机现象

当我们多次观察自然现象和社会现象后,会发现许多结果在一定条件下必然发生.例如在标准大气压下,纯水加热到100℃时必然会沸腾;又如在没有外力作用的条件下,作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动;再如掷一颗骰子,出现点数为7是不可能的等等.它们的共同特征是,现象的某个结果在给定条件下能否发生是完全可以预言的.所有这种现象被称为**必然现象**.它们表达了条件和结果之间的确定性联系.概率论与数理统计以外的数学分支研究的是必然现象的数量规律.

但是在自然现象和社会现象中,也广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象,例如当掷一枚硬币时,可能出现"正面朝上",也可能出现"反面朝上",在掷硬币之前不能确定哪一面朝上;某电话交换台在一分钟内接到的呼唤次数可能是0次,也可能是1次,2次……事先不能确定哪种结果会出现.一般地,在一定条件下可能发生这样的结果,也可能发生那样的结果,即预先不能确定到底发生哪种结果的现象称为**随机现象**.

二、随机试验

为探索随机现象的规律性,常常需要进行一系列试验.试验是一个很广泛的术语,但在概率论与数理统计中,试验有它独特的概

念. 一个试验如果满足下述条件:

(1) 试验可以在同一条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是明确可知道的,而且往往不止一个;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的某一个,但在试验之前不能确定哪个结果将会出现.

就称这样的试验是一个**随机试验**,为方便起见,也简称为试验.

显然,一种随机现象就对应一个随机试验. 随机试验常用 E 或 E_1, E_2 等表示.

三、随机现象的统计规律性

通过实践我们了解到,随机现象虽然在一、二次或少数次试验中,时而出现这样的结果,时而出现那样的结果,表现出一种不确定性或偶然性,但在大量重复试验中却是有其规律性的. 例如,将一枚质料均匀、形状对称的硬币(通常称为均匀的硬币)投掷一次,可能出现正面朝上,也可能出现反面朝上,其结果事先无法肯定. 但是在大量次数的投掷中,出现正面朝上的次数几乎总是投掷总次数的一半,呈现出明显的规律性.

物理学上这样的例子也很多. 例如,波意耳 — 马略特定律就是其中的一个,这个定律告诉我们,构成气体的每个分子在运动过程中是杂乱无章的,然而大量分子运动总体的压强、体积与温度之间是有规律性的. 通常把随机现象在大量重复试验下所呈现的这种规律性称为随机现象的**统计规律性**.

概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的数学学科. 由于随机现象的普遍性,使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用. 近年来,一方面它为科学技术、工农业生产等现代化及社会经济的发展做出了重要的贡献;另一方面,广泛的应用也促使概率论与数理统计的快速发展.

本章我们将主要介绍概率论的基本概念.

§1.1　随机事件和样本空间

一、随机事件

对于随机试验,人们通常关心的是试验的结果中可能会发生哪些事情以及发生这些事情的可能性有多大. 我们把随机试验的结果中可能发生,也可能不发生的事情称为**随机事件**,简称为**事件**. 随机事件通常用大写字母 $A,B,\cdots$ 等来表示.

如果在每次试验中,某件事一定发生,则称这件事为**必然事件**;相反地,如果在每次试验中,某件事一定不发生,则称这件事为**不可能事件**. 必然事件和不可能事件同属确定性范畴,都不是随机事件. 但是为了方便起见,我们还是把它们看作随机事件,稍后我们会理解,它们不过是随机事件的两个极端情形而已.

例 1.1.1　掷一枚均匀的硬币,观察哪面朝上. 则 $A=\{$正面朝上$\}$,$B=\{$反面朝上$\}$,都是随机事件. $\Omega=\{$正面朝上或反面朝上$\}$是必然事件,$\Phi=\{$正反两面都朝上$\}$,是不可能事件.

例 1.1.2　掷一颗均匀的骰子,观察朝上一面的点数,则 $A_i=\{$掷出点数为 i 点$\}$,$i=1,2,\cdots,6$;$C=\{$掷出点数为奇数点$\}$;$G=\{$掷出点数大于 1 且小于 5$\}$ 等都是随机事件. 而 $\Omega=\{$掷出点数小于 7$\}$ 是必然事件,$\Phi=\{$掷出点数小于 1$\}$ 是不可能事件.

再进一步比较分析例 1.1.2 中的随机事件后,不难发现事件 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 与事件 C,G 在结构上有本质的区别,前者是不可再细分的,而后者则可以分解,比如 C 可以分解为 A_1,A_3,A_5;G 可分解为 A_2,A_3,A_4. 我们把不可再分解的事件称为**基本事件**,而可分解的事件称为**复合事件**. 复合事件可由若干基本事件复合而成. 这样例 1.1.2 中的 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 均为基本事件,而 C,G 均为复合事件.

作为特例,显然,必然事件是由所有的基本事件复合而成. 因为

在每次试验中，有且只有一个基本事件发生，所以必然事件必然发生. 而不可能事件不包括任何基本事件，所以在每次试验中一定不会发生.

二、样本空间

为了研究随机试验 E，首先需要知道这个试验 E 可能出现的结果，这些结果称为**样本点**，一般用 ω 表示；样本点全体所成的集合称为**样本空间**，记为 Ω.

对于给定条件下的试验，由于所有结果是明确的，因而样本空间也是确定的.

例如，例 1.1.1 中，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$，其中 ω_1 表示正面朝上，ω_2 表示反面朝上；例 1.1.2 中，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$，其中 ω_i 表示掷出点数为 i，$i = 1,2,\cdots,6$.

以上只包含有限个样本点的样本空间称为**有限样本空间**.

例 1.1.3　考察某电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数，则其所有的样本点为

$\omega_i = \{$单位时间内收到 i 次呼唤$\}$，$i = 0,1,2,\cdots$. 所以样本空间为 $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$.

以上包含无限可列多个样本点的样本空间称为**可列样本空间**.

有限样本空间、可列样本空间统称为**离散样本空间**.

例 1.1.4　测量某电器元件的寿命 T，则样本空间为

$$\Omega = [0, +\infty).$$

以上包含无限不可列个样本点的样本空间称为**不可列样本空间**.

有了样本空间 Ω 的概念，就可把任意一个随机事件 A 看作为 Ω 的一个子集，A 发生当且仅当 A 所包含的一个样本点在试验中出现. 这样，基本事件可看作只含一个样本点的单点集，而复合事件为含有多个样本点的 Ω 的子集. 特别地，样本空间 Ω 是事件，且是必然事件；空集 Φ 也是事件，且是不可能事件. 在不致混淆时，我们也称单个样本点为基本事件.

例如,例 1.1.1 中,A、B 是单点集;例 1.1.2 中,$C = \{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$,$G = \{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$;例 1.1.4 中,$D = \{$某电器元件的寿命不小于 1000 小时$\} = [1000, +\infty)$.

引入样本空间后,一个随机事件就与样本空间的某一子集相对应. 这样,我们就可以依照集合的关系和运算来定义事件的关系和运算.

三、事件间的关系与运算

如果没有特别的声明,在以下的叙述中总认为样本空间 Ω 已经给定,并且还给定了 Ω 中的一些事件,如 A、B、$A_i(i = 1,2,\cdots)$.

1. 包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称 B **包含了** A 或 A **包含于** B 中,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

如在例 1.1.2 中,令 $A = \{$掷出点数为 4 点$\}$,$B = \{$掷出点数为偶数$\}$,则 $A \subset B$.

可以给上述的含义以一个直观的几何解释. 设样本空间 Ω 是一个正方形(图 1 − 1),A 与 B 是两个事件,也就是说 Ω 的某两个子集,"A 发生必然导致 B 发生"意味着"属于 A 的样本点 ω 必然属于 B",即 A 中的点全在 B 中,如图 1 − 1 所示. 由此可知,事件 $A \subset B$ 的含义与集合论中的含义是一致的.

规定:对于任意事件 A,有 $\Phi \subset A$.

如果 $A \subset B$ 与 $A \supset B$ 同时成立,则称 A 与 B 是**相等**(或**等价**)的,记为 $A = B$.

显然,两个相等的事件含有相同的样本点.

2. 并(或和)

称$\{$事件 A、B 中至少有一个发生$\}$这一事件为事件 A、B 的**并**(或**和**),记作 $A \cup B$. 如图 1 − 2 中的阴影部分.

如在例 1.1.2 中,令 $A = \{$掷出点数 $\leqslant 3\}$,$B = \{$掷出点数为偶数$\}$,则 $A \cup B = \{$掷出点数为 $1,2,3,4,6\}$.

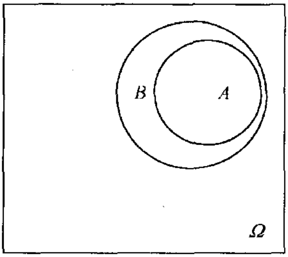

图 1 - 1

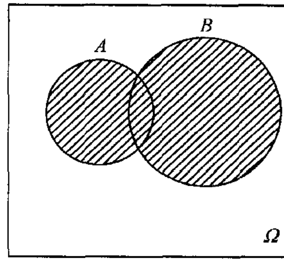

图 1 - 2

3. 交(或积)

称{事件 A、B 同时发生}这一事件为事件 A、B 的**交**(或**积**),记作 $A \cap B$ 或 AB.如图 1 - 3 中的阴影部分.

如在例 1.1.2 中,若 A,B 同上,则 $A \cap B$ = {掷出点数为 2}.

例 1.1.5　掷两枚均匀的硬币,若 A = {恰有一个正面朝上},B = {恰有两个正面朝上},C = {至少有一个正面朝上},则有 $A \cup B = C$,$AC = A$,$BC = B$,$AB = \Phi$.

另外,显然对于任意事件 A、B,有

$$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B,$$
$$AB \subset A, AB \subset B.$$

4. 互斥(或互不相容)

如果二事件 A、B 不可能同时发生,即 $AB = \Phi$,则称 A、B 是**互斥**的(或**互不相容**的). 如图 1 - 4 表示了这种情形.

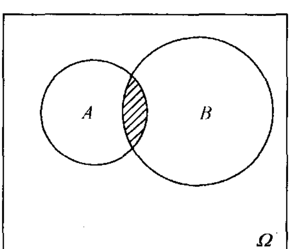

图 1 - 3

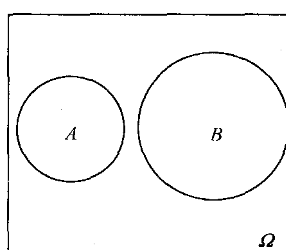

图 1 - 4

如在例 1.1.2 中，$A=\{$掷出点数为 3$\}$，$B=\{$掷出点数为偶数$\}$，则显然 $AB=\Phi$，即 A、B 是互斥的.

5. 差

称$\{$事件 A 发生而 B 不发生$\}$这一事件为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$. 如图 1－5 中阴影部分.

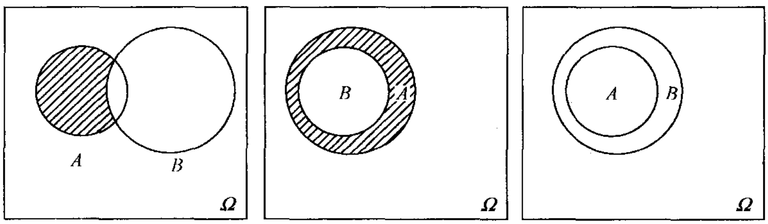

图 1－5

如在例 1.1.2 中，若 $A=\{$掷出点数$\leqslant 3\}$，$B=\{$掷出点数为偶数$\}$，则 $A-B=\{$掷出点数为 1,3$\}$.

6. 对立事件(或逆事件)

设 A 为任一事件，称 $\Omega-A$ 为 A 的**对立事件(或逆事件)**，记作 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$. 如图 1－6 中阴影部分.

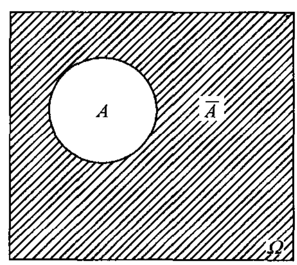

图 1－6

显然，在一次试验中，A 与 $\overline{A}$ 必然有一个发生且仅有一个发生，即

$$A\cup\overline{A}=\Omega,$$
$$A\cap\overline{A}=\Phi.$$

且 $\overline{\overline{A}}=A$，即 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件.

另外，还有 $A-B=A-AB=A\overline{B}$.

如在例 1.1.2 中，若 $A=\{$掷出点数为偶数$\}$，则 $\overline{A}=\{$掷出点数为奇数$\}$.

7. 和、积运算的拓广

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列随机事件，则

(1) $\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$ 这一事件称作 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并,记作 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$;$\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生$\}$ 这一事件称作 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的**可列并**,记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

(2) $\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生$\}$ 这一事件称作 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,记作 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$;$\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生$\}$ 这一事件称作 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的**可列交**,记作 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots$.

(3) 如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件都不可能同时发生,即

$$A_iA_j = \Phi \quad (i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n)$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互斥的;

如果可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个事件都不可能同时发生,即

$$A_iA_j = \Phi\ (i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n,\cdots)$$

则称这可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是互斥的;

例 1.1.6 若 A、B、C 是三个随机事件,则

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生可表示为:$A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$;

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生可表示为:$AB\bar{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$;

(3) 这三个事件恰好发生一个可以表示为:$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$;

(4) 这三个事件中至少有两个发生可表示为:$AB\cup AC\cup BC$ 或 $A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup AB\bar{C}\cup ABC$.

从上可知,概率论中事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的,从而常常把事件的分析转化为对集合的分析;利用集合间的运算来分析事件间的运算.

事件的运算满足下述规律,它们的证明留给读者.