高等院校研究生用书
TEXTBOOKS FOR GRADUATES

结构方程模型

方法与应用

易丹辉　编著

中国人民大学出版社

高等院校研究
TEXTBOOKS
GRADUATE

结构方程模型

方法与应用

易丹辉　编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

结构方程模型：方法与应用/易丹辉编著.
北京：中国人民大学出版社，2008
高等院校研究生用书
ISBN 978-7-300-09192-1

Ⅰ.结…
Ⅱ.易…
Ⅲ.社会科学-统计模型：线性模型-研究生-教材
Ⅳ.C32

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 047202 号

高等院校研究生用书
结构方程模型：方法与应用
易丹辉　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京雅艺彩印有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2008 年 4 月第 1 版
印　　张	13.5 插页 1	**印　　次**	2008 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	245 000	**定　　价**	29.00 元

前　言

微观主体的行为和意愿是否可以计量，微观主体的行为与意愿对市场、市场主体各方面及宏观经济的影响，特别是对决策的影响以及它们之间的关系是否可以度量，随着社会的发展和科学技术的进步，人们越来越希望深入地认识这些问题。结构方程模型正是从微观个体出发探讨宏观规律的一种统计方法。其在教育、心理、医学、经济等领域有着广泛运用，公共管理、企业管理、市场营销等方面也都在运用。

结构方程模型将一些无法直接观测而又欲研究探讨的问题作为潜变量，通过一些可以直接观测的变量（指标）反映这些潜变量，从而建立起潜变量之间关系，也就是结构。结构方程模型主要是一种验证性的分析方法。它是从一种假设的理论架构出发，通过采集数据，验证这种理论假设是否成立的方法。要保证验证结论的可靠，构建具有良好信度和效度的测量指标至关重要。

笔者自 20 世纪 90 年代开始参与顾客满意度指数研究，一直在探讨结构方程模型及其应用的有关问题，指导本科生的论文和实习，承担北京市社科项目、教育部社科规划项目，研究生课程的讲授等，使得条理清楚了、内容丰富了，这才得以完成长达好几年的写作。感谢和我一起探讨的学生们：吴建民、庄菁、张首芳、许卫、周宏娟，等等，感谢他们对课程的认真和共同完成的作业，为本书提供了素材；感谢我的博士生贾知青、李扬，他们为本

书提供了第六章的初稿、第七章的案例。

感谢中国人民大学出版社的编辑为本书的出版所付出的劳动。由于时间和水平的限制，还有许多问题并没有完全清楚，需要进一步探讨和研究。目前这一方法又有了诸多的进展，愿意以此书为蓝本，与希望运用此方法的各位读者共同努力，探讨完善这一方法，更好地为我们从微观出发探索宏观规律服务。

易丹辉

目 录

第一章

概　述

第一节　问题的提出

一、单变量线性回归分析回顾

1. 基本思路

单变量线性回归分析，即传统的回归分析，是用一个模型描述一个被解释变量（因变量）和一组解释变量（自变量）之间的线性关系。其被解释变量（因变量）只有一个，解释变量（自变量）可以是一个或多个。

2. 模型

（1）模型形式。传统的回归分析中，模型如式（1.1）。

$$Y=\gamma X+\zeta \tag{1.1}$$

式中，γ 是回归系数；ζ 是随机干扰项。

（2）模型的基本假定。传统的回归分析中，对数据和模型有下面的假定条件：X 是非随机变量；Y 是随机变量；$E(\zeta)=0$，且相互独立；ζ 与 X 无关。

3. 特点

（1）由于使用一个线性模型度量多个指标变量之间直接的依存关系，变量之间的关系直观、简洁。

（2）通常采用最小二乘法估计参数。参数估计时，采用最小二乘法，即

$$\boldsymbol{\Sigma}(Y-\hat{Y})^2=\min$$

式中，Y 是观察值；$\hat{Y}$ 是式（1.1）Y 的估计值。

在许多方法中，如回归分析、联立方程组（经济计量模型）、因子分析、方差分析、协方差分析、Panel Data 分析等，基本思路都是研究 Y 与 $\hat{Y}$ 的差值问题，使其最小化，即通过对残差进行分析得到待估计参数的值。

（3）回归系数反映每一个自变量对因变量的影响程度，即能够反映变量间的结构关系。

二、因子分析回顾

1. 基本思路

多元统计分析中常用的因子分析，是寻找隐藏在可观测的指标变量中，无法直接观察到，却影响或支配指标变量的潜在因子（公共因子），所以也称作探索性因子分析。它是利用原始数据，提炼出一些公共因子（潜在因子），估计公共因子对指标的影响程度，以及公共因子之间关联性的方法。为了以后叙述的方便，公共因子均称为潜在因子。

2. 模型

（1）模型形式。因子分析的数学模型如式（1.2）。

$$x_i=a_{i1}\xi_1+a_{i2}\xi_2+\cdots+a_{iq}\xi_q+\delta_i,\quad i=1,2,\cdots,k \tag{1.2}$$

式中，x_1，x_2，…，x_k 是 k 个可观测的指标变量；ξ_1，ξ_2，…，ξ_q 是 q 个潜在因子，$q\leqslant k$；a_{ij} 是待估计的参数，称为因子载荷；δ_i 是误差，称为度量误差。式（1.2）中，因子载荷 a_{ij} 表示第 j 个潜在因子 ξ_j 对第 i 个可观测的指标变量 x_i 的影响程度；δ_i 表示 x_i 的随机测量误差或模型外的其他潜在因子对 x_i 的总影响，亦称为误差因子或特殊因子；ξ_j 是潜在因子，一般每个潜在因子至少对两个可观测的指标变量有影响，个别情况可能有一个，这时称为单指标因子。

（2）模型的基本假定。因子分析要求数据和模型满足下面的假定条件：x_i 是随机变量；ξ_j 是方差为 1 的随机变量，ξ_j 之间相互独立；δ_i 是均值为 0，方差为常数的正态随机变量，且相互之间独立；δ_i 与所有的 ξ_j 相互独立。

3. 特点

（1）探索多个指标变量中存在的理论变量即潜在因子。因子分析要求提取出的潜在因子相互之间是独立的，要尽可能多的概括原来指标变量的信息，并且要有实际意义，即每个因子都能有一个合理的命名。

（2）将多指标变量之间的关联或依存关系，转化为少数几个因子之间的关系。因子分析使多个指标变量之间的关联或依存关系通过几个潜在因子变得更直观和容易解释。

三、实际应用中的问题

1. X 为随机变量

单变量回归分析中，假定 X 为非随机变量；若 X 为随机变量，有测量误差或 X 为潜在随机变量，不可以直接观测，模型将如何建立，参数如何估计，模型如何检验？

2. 多指标变量之间关系复杂

在许多实际问题中，多个指标变量之间的关系往往比较复杂，并不一定都是能够用一组自变量去解释一个因变量。例如，学历或受教育程度会影响其收入，而收入又会影响到消费支出的多少和消费结构，因此，学历或受教育程度就间接影响消费支出的多少和消费结构。多个变量之间不仅存在直接影响，还存在间接影响，如何建模？

3. 潜在因子之间不相互独立

因子分析中，要求潜在因子之间是相互独立的，而实际问题中，有些潜在因子之间存在一定的关联或依存关系，这种情况如何建模？

若有一些指标变量与某个潜在因子有关联，能否建立起指标与因子之间的关系？

［例 1.1］

$$x_1=\xi+\delta_1$$
$$x_2=\xi+\delta_2 \tag{1.3}$$

式中，x_1，x_2 为随机变量；ξ 为潜在随机变量；δ_1，δ_2 为随机干扰项。

$$E(\delta_1)=E(\delta_2)=0$$

δ_1，δ_2 与 ξ 无关且彼此无关。

ξ 前面也可以有系数即因子载荷，反映观测变量与因子的关系。

将式（1.1）与式（1.2）结合，即将回归模型与因子分析结合，可以建立一个线性方程体系。

这个体系由两部分构成，回归部分类似于式（1.1），因子分析部分与式（1.2）和式（1.3）相同。

所谓线性是指所有变量，包括潜在变量 ξ 和可观测的变量 X 之间的关系，能够被表示在线性方程中，或者能够被转化为一种线性的形式。这个线性方程体系被称为结构方程模型（structural equation model，SEM）。在后面的介绍中可以看到，结构方程模型主要是通过协方差矩阵完成模型建立的，而不是仅考虑 Y 与 $\hat{Y}$ 的差值，因而模型也被称作协方差结构方程模型（covariance structure model，CSM）。

第二节　路径分析

路径分析（path analysis）是由生物学家最先提出并发展的一种分析系统的因果关系的技术，主要用于分析多个指标变量之间的关系，特别是变量间存在间接影响关系的情况。

路径分析包括三个部分：路径图、依路径图写出协方差或相关系数与模型参数（如路径系数）的方程、效应分解。利用路径分析，可以分析自变量对因变量作用的方向、作用的大小以及解释的能力，亦可以用于预测。

一、路径图

路径图是路径分析最有用的一个工具。它是用图形形式表示变量之间的各种线性关系，包括直接的和间接的关系。图 1—1 是一个含有两个 X 变量和两个 Y 变量的路径图。

一般在路径图中，任意两个变量 A 和 B，有四种可能的基本结构关系：

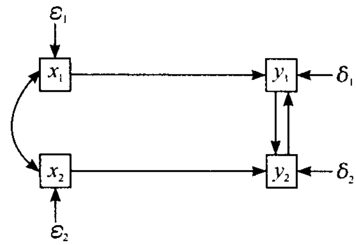

图 1—1 一个路径图示例

（1）A 可能影响 B，但 B 不影响 A。A 和 B 之间的直线为单向箭头，由 A 指向 B。

（2）B 可能影响 A，但 A 不影响 B。A 和 B 之间的直线为单向箭头，由 B 指向 A。

（3）A 可能影响 B，B 也可能影响 A。A 和 B 之间的直线为双向箭头。

（4）A 和 B 之间没有假定的结构关系，但可能有相关关系。A 和 B 之间有一带箭头的弧线相连。

路径图可以直观地展示可测变量与潜变量之间、各个潜变量之间以及可测变量之间的关系，给人一目了然的认识。在建立结构方程模型时，反映各个变量关系的理论模型通常用路径图表示。

1. 常用记号

在路径图中，矩形框表示可测变量或指标，如“住房面积”为 x_1，则可以表示为$\boxed{x_1}$；圆的或椭圆的框表示潜变量，如“住房现状”为 η_1，则可以表示为η_1；小的圆的或椭圆的框，或无任何框，标有 ε 或 δ 的变量，表示方程或测量的误差。单向箭头指向指标或可测变量，表示测量误差，如图 1—1 中的 ε；单向箭头指向因子或潜变量，表示未能被内生潜变量解释的部分，是方程的误差，如图 1—2 中的 ζ。单向直线箭头连结的两个变量表示假定有因果关系，箭头由原因变量指向结果变量，如图 1—1 中 x_1 与 y_1，x_1 为原因变量，y_1 为结果变量；如果两个变量之间连线的两端都有箭头，表示它们之间互为因果，如图 1—1 中 y_1 与 y_2 之间互为因果。弧形的双向箭头表示假定两个变量间无结构关系，但有相关关系，如图 1—1 中 x_1 与 x_2 之间的关系。变量之间没有任何连线，则表示假定它们之间没有直接联系，如图 1—1 中 x_1 与 y_2 之间的关系。

2. [例 1.2] 一个路径图的例子见图 1—2。

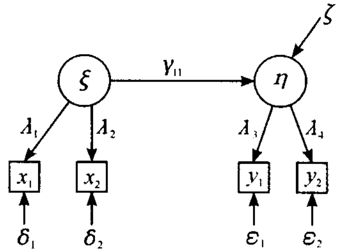

图 1—2 一个路径图

由图可以看出，ξ 与 η 之间是单向直线箭头，表示假定变量之间有因果关系，箭头由原因变量指向结果变量，即 ξ 影响 η。根据图可以写出下面的结构方程模型：

$$
\begin{aligned}
&\eta=\gamma_{11}\xi+\zeta \\
&x_1=\lambda_1\xi+\delta_1 \\
&x_2=\lambda_2\xi+\delta_2 \\
&y_1=\lambda_3\eta+\varepsilon_1 \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\zeta)=0 \\
&y_2=\lambda_4\eta+\varepsilon_2 \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_2,\zeta)=0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

也可以得到如下的假定：

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{Cov}(\xi,\delta_1)=0 & \mathrm{Cov}(\eta,\varepsilon_1)=0 & \mathrm{Cov}(\delta_2,\varepsilon_1)=0 \\
\mathrm{Cov}(\xi,\delta_2)=0 & \mathrm{Cov}(\eta,\varepsilon_2)=0 & \mathrm{Cov}(\delta_2,\varepsilon_2)=0 \\
\mathrm{Cov}(\xi,\varepsilon_1)=0 & \mathrm{Cov}(\delta_1,\delta_2)=0 & \mathrm{Cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0 \\
\mathrm{Cov}(\xi,\varepsilon_2)=0 & \mathrm{Cov}(\delta_1,\varepsilon_1)=0 & \mathrm{Cov}(\delta_1,\zeta)=0 \\
\mathrm{Cov}(\xi,\zeta)=0 & \mathrm{Cov}(\delta_1,\varepsilon_2)=0 & \mathrm{Cov}(\delta_2,\zeta)=0
\end{array}
$$

路径图对把假设的理论模型写成公式形式是有用的工具。它指出了变量之间因果关系的方向和性质，可以很容易地识别模型的类型，也很容易由图写出模型的具体形式。

二、路径分析模型

(一) 模型形式

路径分析模型是反映多个变量之间关联或依存关系的模型。根据变量之

间关系的类型可以分为递归（recursive）和非递归（non-recursive）两类。递归模型中不含有相互影响的变量，即路径图中没有双向箭头；非递归模型则含有相互影响的变量，路径图中允许存在双向箭头。路径分析模型的一般形式如式（1.5）。

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.5}$$

式中，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ 是待估计的系数矩阵；$\boldsymbol{\varepsilon}$ 是残差项矩阵。

式（1.5）式写成矩阵为：

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \cdots & \beta_{pp} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1q} \\ \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{2q} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{q1} & \cdots & \gamma_{qq} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix}$$

当对变量进行减均值的处理后，变量间的线性关系不会发生改变，但是常数项不在模型中。于是，式（1.5）也可以写成式（1.6）。

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.6}$$

这是一个不含常数项的路径分析模型。

（二）模型的基本假定

为了保证式（1.5）或式（1.6）得到的参数估计值无偏，需要有以下的假定条件：

（1）$\boldsymbol{Y}$ 为随机变量，服从多元正态分布，且每一个 $\boldsymbol{Y}$ 变量的残差项之间相互独立；

（2）$\boldsymbol{X}$ 为非随机变量，无测量误差，且相互独立；

（3）$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为随机变量，服从均值为 0，方差为常数的多元正态分布，且与 $\boldsymbol{X}$ 不相关。

为了保证参数的有效估计，需要有一定的样本数目，Bentler（1993）推荐的样本数据个数 n 至少要大于 $10k\sim50k$，其中，k 是模型中待估计的参数的个数。

可以看出，式（1.5）或式（1.6）仅对研究可观测变量之间关系适用。

（三）路径系数

1. 含义

路径系数（path coefficient）是路径分析模型的回归系数，有标准化系数和非标准化系数之分。一般情况下，路径系数是指路径分析模型中标准化的系数，即将所有观测变量都标准化后的回归系数。

路径系数有两种，一种是反映外生变量影响内生变量的路径系数，通常用 γ 表示。如例 1.2 中的 γ_{11}，表示由 ξ 到 η 的路径系数。路径系数的下标有两个，第一个表示所指向的结果变量，如指向 η_1，则路径系数的第一个下标为 1；第二个表示原因变量，如指向 η_1 的原因变量是 ξ_2，则第二个下标为 2，路径系数就为 γ_{12}。另一种是反映内生变量影响内生变量的路径系数，通常用 β 表示，下标的规则与 γ 相同。如 η_1 为箭头指向的结果变量，η_2 为原因变量，则路径系数为 β_{12}。

2. 作用

路径系数可以用来衡量变量之间的影响程度或变量的效应大小。

标准化系数是对数据进行标准化处理后得到的，因而没有测量单位，可以在同一模型中进行不同系数的比较。系数为正，表明自变量对因变量的影响是正向的；系数为负，表明其影响为负向的。一般来说，系数的绝对值越大，表明其影响作用越大。

三、效应分解

在路径分析中，具有因果关系的变量，在计算协方差时，通常将可测变量标准化。这样，得到的协方差就是相关系数。为了弄清变量之间如何作用，通常将相关系数进行分解，分成总效应、直接效应和间接效应。

1. 直接效应

直接效应（direct effect）反映原因变量（外生或内生变量）对结果变量（内生变量）的直接影响，其大小等于原因变量到结果变量的路径系数。

[例 1.3]　工业化与政治民主效应分析。[①]

分析：图 1—3 是工业化与政治民主的路径图。其中，ξ_1 是工业化水平，

① Kenneth A. Bollen: *Structural Equations with Latent Variables*, John Wiley & Sons, 1989, p. 17.

带有 3 个指标 $x_1 \sim x_3$；η_1 是 1960 年政治民主变量，带有 4 个指标 $y_1 \sim y_4$；η_2 是 1965 年政治民主变量，带有 4 个指标 $y_5 \sim y_8$。

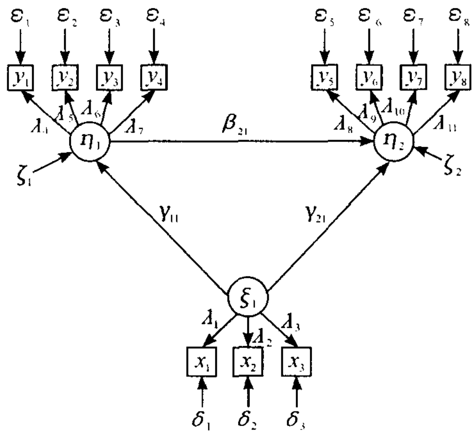

图 1—3 工业化与政治民主路径图

由图可知，η_1 到 η_2 直接效应为 β_{21}；ξ_1 到 η_2 直接效应为 γ_{21}；η_2 到 y_5 直接效应为 λ_8。

2. 间接效应

间接效应（indirect effect）反映原因变量通过一个或多个中间变量对结果变量所产生的影响。

通过路径图，观察箭头指向（连接关系，不是直接到达），可以找到间接效应。如果只有一个中间变量，间接效应是两个路径系数的乘积；如果中间变量不止一个，间接效应是所有从原因变量出发，通过所有中间变量结束于结果变量的路径系数乘积。图 1—3 中，ξ_1 对 η_2 的间接效应，通过 η_1 是 γ_{11}，再通过 η_1 作用 η_2 即 β_{21}。因此，ξ_1 对 η_2 的间接效应为 $\gamma_{11}\beta_{21}$。η_1 对 y_7 的间接效应是 $\beta_{21}\lambda_{10}$。

3. 总效应

总效应是原因变量对结果变量的效应总和，包括直接效应和间接效应。计算公式如式（1.7）。

$$总效应 = 直接效应 + 间接效应 \tag{1.7}$$

图 1—3 中，ξ_1 对 η_2 的总效应为：$\gamma_{21} + \gamma_{11}\beta_{21}$；$\xi_1$ 对 y_8 的总效应为：$0 + \gamma_{21}\lambda_{11} + \gamma_{11}\beta_{21}\lambda_{11}$。

第三节　模型的有关概念和记号

一、模型记号

采用 Joreskog，Sorbom 的 LISREL（linear structural relationship）软件的记号。结构方程模型包含两个部分，结构模型和测量模型。

（一）结构模型

结构模型（structural model）反映潜变量之间的因果关系，亦称潜变量模型（latent variable model）或因果模型。其中的方程称为结构方程（structural equation）。

1. 潜变量的含义

潜变量（latent variable）亦称隐变量，是无法直接观测并测量的变量。如研究影响学生数学成绩的因素，其中有逻辑思维能力，是一个无法直接测量的变量；又如研究居民购买住房行为的时候，“住房现状”是一个重要的影响因素，但无法直接测量，是潜变量。潜变量需要通过设计若干指标间接加以测量。

2. 外生变量

外生变量（exogenous observable）是指那些在模型或系统中，只起解释变量作用的变量。它们在模型或系统中，只影响其他变量，而不受其他变量的影响。在路径图中，只有指向其他变量的箭头，没有箭头指向它的变量均为外生变量。在结构方程模型中，外生潜变量通常用 ξ 表示，如图 1—3 中的 ξ_1。

3. 内生变量

内生变量（endogenous observable）是指那些在模型或系统中，受模型或系统中其他变量包括外生变量和内生变量影响的变量，即在路径图中，有箭头指向它的变量。它们也可以影响其他变量，在结构方程模型中，内生潜变量通常用 η 表示，如图 1—3 中的 η_1，η_2。内生潜变量的个数应与方程的个数相同，即每一个内生潜变量都会对应一个方程。

4. 模型形式

结构模型用以描述潜变量之间的关系。其模型形式如式（1.8）。