

专题技术讲丛

激 光 技 术

(四)

长沙工学院资料室

总第14期

激 光 技 术

(四)

激 光 Doppler 测 速 计

激光研究室激光测速小组

长沙工学院资料室

1976.1

前 言

激光 Doppler 测速计是利用流体中或在固体表面上的运动粒子所散射出来的激光频率的 Doppler 移动来测量运动物体的速度。测量范围从每秒几厘米到每秒几千米，精度可达百分之一到百分之五左右，最大作用距离已超过百米，而且，随着激光器功率的增大和技术性能的改进，各项技术指标还在不断的提高。然而，这项技术最突出的优点有两个，一是空间分辨率极高，目前已超过了 10^{-4} 毫米³ 随着所用激光波长的减小，光路和聚焦元件性能的改进还在进一步缩小，二是测量过程中对待测物体的速度没有任何干扰。由于这两项突出的优点，所以在高速空气动力学和推进器的研究方面可用来测量流体速度场的分布，研究湍流的微观结构。此外，在热核反应和其他高温高压以及难以直接接触测量的场合，均可以用它来测量速度。所以从 1964 年第一个实验装置问世以来，这项技术在世界各国得到了迅速的发展，不仅已成为科研工作和实验室中强有力的工具，而且已成批生产广泛应用于生产实际中。同时有关的理论工作十分活跃，发表了许多文章对激光 Doppler 测速计的工作性能作了比较深入的分析，指导着这项技术进一步发展提高。

近年来随着我国科研生产大好形势的不断发展，激光技术的应用日益开展起来了，激光 Doppler 测速计也开始受到重视，有不少科研生产单位正在研制这种新型的测速计，取得了可喜的进展。我们是在 1974 年夏天，为了探讨激光技术对国防科研生产应用时，开始接触到这方面的工作。我们用小型测速实验装置测量固体转盘的速度，作了一点实际工作。同时接合实际对激光 Doppler 测速计的理论问题和设计也作了一点工作，并翻译了一些外国的文献资料。为了将这一段工作作一小结，现将这些资料整理出来以专题集的形式付印，本集包括十篇译文，对激光 Doppler 测速计的工作原理，各种参数对仪器性能的影响从理论和实验方面均作了比较全面的阐述。我们自己所作的一点工作的总结以及国外近年来关于这项技术更加深入和全面的总结文章和新的分析研究方法，将在以后另行整理付印。我们希望通过这本专题集的出版达到两个目的，第一，抛砖引玉交流资料向国内有关单位的同志们请教学习，第二，向科研生产使用单位介绍这项新技术，希望取得联系以便使我们的科研工作更好地直接为国防科研和生产实际服务，为经济基础服务，为加强无产阶级专政服务。

由于我们接触这方面工作的时间很短，学识水平很低，加之付印又非常仓促，除了对原文中明显的印刷错误作了一些改正之外，原文中其他错误均未作改正仍按原文译出。因此希望读者在深入研究这些文章时，最好自己动手进行计算，不要受原文中错误的约束。此外，译文必定有许多不妥之处，切望读者批评指正。

激光研究室激光测速小组

1975.6.

目 录

激光 Doppler 风速计的分析.....	(1)
用激光 Doppler 法测量湍流速度的新模型.....	(14)
激光 Doppler 测速计的统一分析.....	(18)
用散射光的 Doppler 频移测量湍流的速度.....	(26)
用连续激光测量湍流结构时的信噪比和谱线展宽.....	(33)
用光学 Doppler 效应对风速进行精细的测量.....	(41)
激光 Doppler 测速计的分析.....	(53)
Doppler 光学拍频测速的相干和不相干法.....	(67)
差动 Doppler 外差激光流速计中有关散射光的一些计算方法和公式.....	(81)
差动 Doppler 激光测速计中光学准直误差所带来的一些影响.....	(97)

激光 Doppler 风速计的分析

R. J. Adrian, R. J. Goldstein

摘要 本文对激光 Doppler 风速计作了理论分析, 我们从 Mie 的散射理论出发, 推出单个运动散射粒子产生的光电流及其频谱的公式。从这些公式出发, 可以得到确定发出信号的散射区, 谱线的带宽和频谱振幅的关系式, 所得出的结果已推广到任意数目的粒子作随机分布的情况; 并用统计方法考察了粒子浓度对均方频谱振幅和信噪比的影响。在这些问题中的噪音, 我们指的是由于散射粒子位置的随机性和浓度起伏引起的频谱起伏。

I. 引言

利用随同流体一起运动的小粒子所散射光的 Doppler 频移能够测出流体的局部流速。Yeh 和 Cummins (1964) 首先使用了这一方法, 随后, 人们迅速地采纳了这项技术, 并被公认为是一种标准的实验工具。

图 1 中的光路乃是常用激光 Doppler 风速计的几何布局。从同一个连续波激光器发出两束光经反射和聚焦, 然后在流体中它们的焦点处相交, 运动粒子从照射光束中所散射出来并指向光电倍增管方向的光波, 其频率有一 Doppler 移动 (Goldstein 和 Kreid 1967) 即:

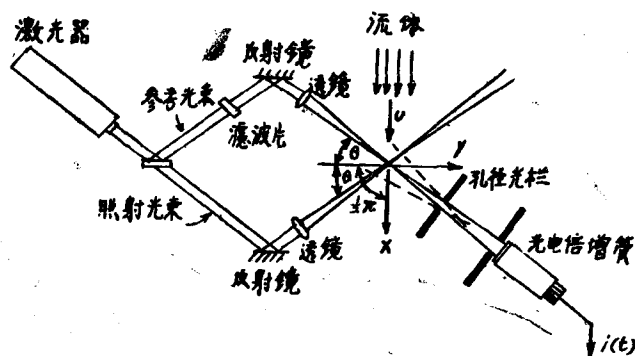


图 1 照射光束和参考光束在测试区中相交的光学装置

$$v_D = (2u \sin \theta) / \lambda \quad (1)$$

式中 λ 为波长, θ 角是在流体中测得的角度, Doppler 频移能够用光学外差法来测定, 即

将 Doppler 频移散射光和未发生频移的参考光束，在光电倍增管的光阴面处混频，则所产生的光电流中就包含有一个差频 (ν_D) 拍信号，速度的 u 分量可以直接测量光电流的频率或者利用光电流的频谱来确定之。

若再加上一个能够跟踪光电流瞬时 Doppler 频率的电子装置，则激光 Doppler 系统就能够进行原来用热线风速计所作的一切测量。此外，它还能够作一些其他的独一无二的测量，比如，空间相关度(Pike 等人 1968)和速度梯度的单点测量(Adrian 1969)。有关激光 Doppler 系统的应用和特性的讨论详见 Goldstein 和 Kreid (1968) 所作的评论性文章。

需要有散射粒子并不一定是一个严重的限制，甚至有必要时可以人为地引入散射粒子以补充天然杂质粒子的不足，例如，在水流中加入浓度为 1:50,000 (0.002%)，直径为 0.5μ 的聚苯乙烯球形粒子 ($sp. gr = 1.04$) 仪器就能很好地工作 (Goldstein 和 Kreid 1967)；虽然上述浓度是如此之小，以至于对流动的影响小到可以忽略，但这样一来测量体积中散射粒子的数量级大约从一 (对天然杂质粒子) 增加到了几百。

从已有的分析和实验中，人们已经知道激光 Doppler 系统的一些工作特性，实验和理论上均发现光电流是正弦的，但其振幅随时间而变化，在频率 ν_D 附近观察到的光电流的频谱，近似于高斯型分布：中心频率在 ν_D 处，但有一定的带宽；即使对于速度梯度为零的稳流和层流，情况也是如此，人们已对此作过分析 (Goldstein 和 Hagen 1967, Goldstein 和 Kreid 1968, Pike 等人 1968)，并预言这一带宽等于

$$\frac{\Delta \nu_D}{\nu_D} = \text{常数} \times \Delta \theta \cot \theta \quad (2)$$

式中 $\Delta \theta$ 是聚焦光束会聚角的一种测度；但是他们的工作并没有特别指出频谱分布具有高斯线式。

从实验中还知道：发出信号的体积定性地相应于两束光交叉的体积，以及为了确定这一测量体积不一定必须用孔径光栏。这些结果均为 Pike 等人 (1968) 讨论过，不过他们作了一些简化，忽略了散射波前的曲率和光强在横跨聚焦光束方向上的变化。

II. 模 型

由于几何对称性，我们选取图 1 中的光学系统作为分析的模型，但是很容易将所作的分析推广到其他几何布局的情况。为了避免由于测试流体与周围空气折射率不同引起的折射所带来的复杂情况，我们暂时假设整个装置都浸沉在折射率为 n 的流体中 (当待测部份的流体是空气时，就是这种情况)，在 §8 中将给出折射效应带来的修正。

激光器发出圆频率为 ω_0 ($\omega = 2\pi\nu$) 的连续相干平面偏振光波，偏振在 Z 方向上。工作于 TEM_{00} 模的激光器的输出光波是截面为圆形的光束，其横向强度分布仅在光束边缘附近与理想高斯分布有所差别，因为在半径为有限值的光束边缘，光强就要减小到零而高斯分布却不是这样。聚焦后的光束亦有相同的情况，(见图 2) 若聚焦光束的光强在 α 角的地方减到其极大值的 $\frac{1}{e}$ ，则粗略地讲光束边缘就在会聚角为 2α 的地方，会聚角

一般很小,其典型值在0.001到0.05之间,所以在下面整个分析中都近似使用 $\tan\alpha \approx \alpha$. 为了便于计算,将用理想的高斯分布来近似表示所有角度处的光强变化。

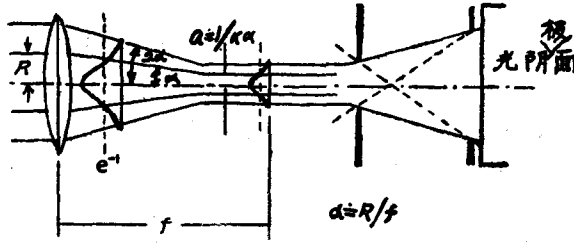


图 2 聚焦参考光束的示意图

光电倍增管前面的孔径光栏仅仅是用来在流体中确定一个有限大小的,从光阴面处可以看见的区域(见图1和图2中的虚线);它们不会阻碍任何一部份参考光束。最后,光阴面垂直于参考光束平面。

III. 由单个散射粒子产生的光电流

§ 3.1 光阴面上的光强

光电倍增管的输出与光阴面处的总光强成正比,而总光强则是单个散射粒子通过两束聚焦光束的交叉区附近时,散射而产生的。除了参考光波外(其电场向量为 \vec{E}_R)还有两束散射光波对总光强有贡献:即由照射光束散射出来的光波 \vec{E}_{IS} 和从参考光束散射出来的光波 \vec{E}_{RS} , 这些光波的方程最容易用图3中的坐标表示出来;这些坐标的选择分别为:沿着和垂直于参考光束(x_R, y_R, z_R),沿着和垂直于平均流动方向(x, y, z),沿着和垂直于照射光束(x_I, y_I, z_I)如图3所示。选取速度坐标(u, v, w)并使 u 平行于 x .

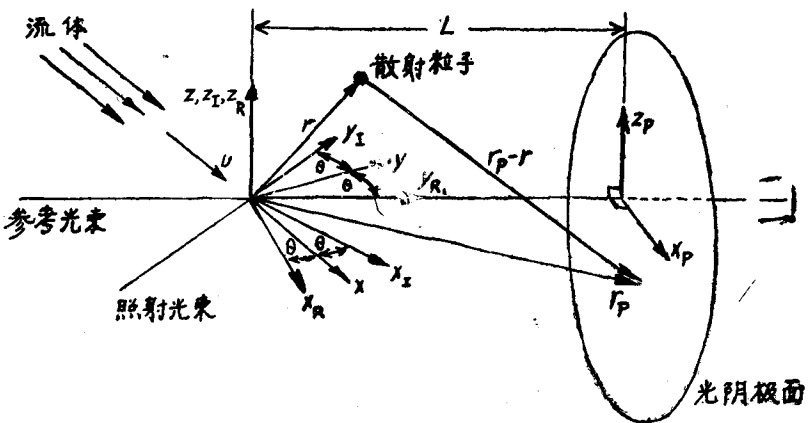


图 3 坐标系和位置向量

先考虑在矢径 \vec{r} 处的稳定粒子从照射光束中所散射出来的光波 \vec{E}_{IS} . 设照射光束的光强是 $I_1(\vec{r})$, 散射光的波数 $K = 2\pi/\lambda$, 由 Mie 的散射理论可知(Born和Wolf 1964), 在远离粒子的地方散射光波是球面波, 所以在光阴面上一 \vec{r}_p 处的电场为:

$$\vec{E}_{IS}(\vec{r}_p) = \frac{\vec{\sigma}_1}{|\vec{r}_p - \vec{r}|} I_I(\vec{r})^{\frac{1}{2}} \exp j[\omega_0 t - K|\vec{r}_p - \vec{r}|] \quad (3)$$

$\vec{\sigma}_1$ 是散射函数，具有长度单位，其大小约为粒子直径的数量级， $\vec{\sigma}_1$ 方向确定散射光波的偏振，它与 \vec{r}_p 方向之间的关系能够用 Mie 的理论计算出来。因为就现在讨论的情况而言，包含 \vec{r}_p 的立体角的数量级为 α^2 ，故将 $\vec{\sigma}_1$ 近似看成常量完全可以的。

对于理想透镜聚焦的高斯光束，其光强 $I_I(\vec{r})$ (单位：瓦/厘米²) 为 (Spectra Physics Bulletin 1966)

$$I_I(\vec{r}) = P_I (\pi a^2 + \pi \alpha^2 y_I^2)^{-1} \exp\{-[(x_I^2 + z_I^2)/(\alpha^2 + \alpha^2 y_I^2)]\} \quad (4)$$

式中 P_I 是照射光束的总功率， $a = \frac{1}{K\alpha}$ 是光束在其焦点处的 e^{-1} 半径。如引言中所指出的那样，仅当粒子位于两束光交叉区内，即 $|\vec{r}| = 0(a)$ ，方能接收到强信号，所以 $\alpha^2 y_I^2$ 项比之 α^2 ，其数量级为 $0(\alpha^2)$ ，今后将忽略不计。

在(3)和(4)中将下标由 I 改为 R ，即可得出参考光束的 \vec{E}_{RS} 和 $I_R(\vec{r})$ 。

若粒子不是稳定的，而以 \vec{V} 的速度在运动，则位于粒子上的观察者将感到照射光束的投射光波和参考光波都有一 Doppler 频移。因为在焦点附近波前接近于平面 (Boyd 和 Gordon 1961)，Doppler 频移分别为：

$$\Delta\omega_I = Ku \sin \theta - Kv \cos \theta \quad (5a)$$

$$\Delta\omega_R = -Ku \sin \theta - Kv \cos \theta \quad (5b)$$

但是，Doppler 频移光的波长人们还是认为近似等于 λ 。

综合考虑到有关散射波的上述情况，在光阴面上 \vec{r}_p 处它们的电场为

$$\begin{aligned} \vec{E}_{IS}(\vec{r}_p) &= \frac{\vec{\sigma}_I}{L} \left(\frac{P_I}{\pi a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{x_I^2 + z_I^2}{2a^2}\right)\right\} \\ &\quad \times \exp j\{(\omega_0 + \Delta\omega_I)t - K|\vec{r}_p - \vec{r}| - \phi\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{RS}(\vec{r}_p) &= \frac{\vec{\sigma}_R}{L} \left(\frac{P_R}{\pi a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{x_R^2 + z_R^2}{2a^2}\right)\right\} \\ &\quad \times \exp j\{(\omega_0 + \Delta\omega_R)t - K|\vec{r}_p - \vec{r}|\} \end{aligned} \quad (7)$$

式中 ϕ 为随机位相差，并且球面波的振幅因子 $\frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}|}$ 已近似用 $\frac{1}{L}$ 代替了 (见图 3)。

虽然我们已假设在测试体积中只有一个粒子，但在参考光束的整个长度范围内却有许多粒子，它们的净效果乃是使参考光强衰减。若不计衰减因子，则在 \vec{r}_p 处参考光波的电量为：

$$\vec{E}_R = \vec{e}_z \left(\frac{P_R}{\pi L^2 a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{x_p^2 + z_p^2}{2L^2 a^2}\right)\right\} \exp j(\omega_0 t - Kr_p) \quad (8)$$

这是一个原点在参考光束的焦点处并且偏振在 z 方向 (单位向量为 \vec{e}_z) 的球面波，在(8)

式中已设 $L\alpha \geq a$.

所有这三个波在光阴面上相加形成在 \vec{r}_p 处强度成比于 $I(\vec{r}_p) = (\vec{E}_R + \vec{E}_{RS} + \vec{E}_{IS}) \cdot (\vec{E}_R + \vec{E}_{RS} + \vec{E}_{IS})$ 的干涉图样。光电倍增管将 $I(\vec{r}_p)$ 中高频项对时间取平均后, 结果从 \vec{r}_p 处面元上输出的光电流为 $\kappa \bar{I} dA$, κ 是光电倍增管的灵敏度, 单位是安培/瓦, \bar{I} 是对时间的平均光强, 求平均的时间应小于 $\frac{1}{\Delta\omega_{IS}}$ 但大于 $\frac{1}{\omega_0}$. \bar{I} 可由 Poynting 定理对时间求平均后的形式得出 (Born 和 Wolf 1964):

$$\bar{I}(\vec{r}_p) = (\vec{E}_R + \vec{E}_{RS} + \vec{E}_{IS}) \cdot (\vec{E}_R^* + \vec{E}_{RS}^* + \vec{E}_{IS}^*). \quad (9)$$

式中上标“*”表示复共轭之意, 总光电流为:

$$I = \int \kappa \left\{ \underbrace{\vec{E}_R \cdot \vec{E}_R^*}_{i_R} + \underbrace{\vec{E}_{RS} \cdot \vec{E}_{RS}^*}_{i_{RS}} + \underbrace{\vec{E}_{IS} \cdot \vec{E}_{IS}^*}_{i_{IS}} + \underbrace{(\vec{E}_R \cdot \vec{E}_{RS}^* + \vec{E}_R^* \cdot \vec{E}_{RS})}_{i_{RRS}} \right. \\ \left. + \underbrace{(\vec{E}_{IS} \cdot \vec{E}_{RS}^* + \vec{E}_{IS}^* \cdot \vec{E}_{RS})}_{i_{DF}} + \underbrace{(\vec{E}_R \cdot \vec{E}_{IS}^* + \vec{E}_R^* \cdot \vec{E}_{IS})}_{i_{HD}} \right\} dA \quad (10)$$

式中各项下面的标记表示它们产生的光电流的类型。

§ 3.2 测试体积

关于测试体积的大小和形状可以通过研究 Doppler 外差光电流 i_{DF} 来确定。立刻就会证明: 除非 $r=0(a)$, 否则 i_{DH} 是很小的; 所以相对误差在 $\frac{a}{L}$ 和 α^2 的数量级内, 参考光波和散射光波之间的程差近似为:

$$|\vec{r}_p - |\vec{r} - \vec{r}_p|| \approx \vec{r} \cdot (2\vec{r}_p - \vec{r}) / 2L, \quad |\vec{r}| = 0(a). \quad (11)$$

并假设 $(\vec{E}_R \cdot \vec{E}_{IS}^* + \vec{E}_R^* \cdot \vec{E}_{IS})$ 对光阴面求积分时, κ 为一常数, 积分限可近似取为无限大, 由此可得出:

$$i_{DH} = 2\kappa \frac{\sigma_1 \cdot \lambda e_z}{\pi a^2} (P_I P_R)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{x_I^2 + z_I^2}{2a^2} + \frac{x_R^2 + z_R^2}{2a^2}\right)\right\} \\ \times \cos\left(\Delta\omega_I t + K y_R - \frac{K r^2}{2L} - \phi\right) \quad (12)$$

式中指数乘子确定散射粒子必须在多大的体积之内, (12) 表示的余弦波的振幅才能被探测出来。若可以探测出来的最小振幅与最大振幅之比为 $e^{-\eta^2}$, 则测试体积应界于下述曲线之内:

$$\frac{x_I^2 + z_I^2}{2a^2} + \frac{x_R^2 + z_R^2}{2a^2} = \eta^2 = \frac{x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta + z^2}{a^2} \quad (13)$$

这是一个中心在光束交点处的椭球体 V_D , 其轴为

$$\Delta x_D = 2a\eta / \cos \theta \quad (14a)$$

$$\Delta y_D = 2a\eta / \sin \theta \quad (14b)$$

$$\Delta z_D = 2a\eta. \quad (14c)$$

取 $\eta=2$ 比较合理而且方便。

Pike 等人(1968)曾忽略激光束的高斯型强度变化,把 \vec{E}_R 和 \vec{E}_{IS} 当成平面波,算出了测试体积,他们的论证认为:外差混频作用只能发生在光阴面上被参考光束照明的区域内,并且 \vec{E}_{IS} 和 \vec{E}_R 混频所形成的干涉条纹跨过此区域在运动着,这样总光强发生变化并产生出 Doppler 外差光电流。因此,余弦波的振幅与这一区域的长度以及参考光波与散射光波之间的夹角二者成反比。他们得出结论:这个夹角确定出一个“相干锥”,并且测试体积相应于相干锥与照射光束相交的区域。

与得出相干锥的道理一样,(12)中的因子 $\exp\{-(x_R^2+z_R^2)/2a^2\}$ 是由于对光阴面积分产生的;但是,对于我们研究的几何情况,把相干锥叫做“相干圆柱”更合适一些,因为在焦点附近它正好对应于参考光束的一个圆柱形部份。研究一下放在光阴面上 $x_P=y_P=0$ 点处的针孔光阑的作用,就容易看出相干性圆柱与光束相交后所经过的光路有关。此时,对光阴面积分只得到 i_{DH} 表示式中 $\exp\{-(x_I^2+z_I^2)/2a^2\}$ 这一因子,这就意味着测试体积在 y_I 方向上不受限制。换言之,相干性圆柱变成无限长。反之,因为已假设了参考光束不受光阑的限制,因此它在光阴面上照明了一个最大区域,所以(13)和(14)指的是相干性圆柱可能取的最小值。透镜的像差和折射效应都会使测试体积变大。

§ 3.3 随时间变化的总光电流

因为 V_D 的大小很小,故可以合理地将在 V_D 内的矢径 $\vec{r}(t)$ 表为 $\vec{r}=\vec{V}t+\vec{r}_0$, \vec{V} 为粒子在 V_D 内的速度,可以认为是常量。当 V_D 充分小时,上述近似甚至对于湍流也成立。下面最好先对 $\vec{r}=(ut, y_0, z_0)$ 这一简单情况进行分析。关于三个速度分量都不为零的一般情况的一些结果将在附录中结出;所作分析应用于不稳流动的可能性将要在§7中简单地讨论之。

把(6),(7),(8)代入(10)积分后可得总光电流为:

$$\begin{aligned}
 i(t) = & \kappa P_R + \kappa \frac{\vec{\sigma}_I \cdot \vec{\sigma}_I}{\pi a^2} P_I \frac{A}{L^2} \exp\left\{-\frac{z_0^2}{a^2} - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{a^2} \left(t + \frac{y_0}{u \cot \theta}\right)^2\right\} \\
 & + \kappa \frac{\vec{\sigma}_R \cdot \vec{\sigma}_R}{\pi a^2} P_R \frac{A}{L^2} \exp\left\{-\frac{z_0^2}{a^2} - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{a^2} \left(t - \frac{y_0}{u \cot \theta}\right)^2\right\} \\
 & + 2\kappa \frac{\vec{\sigma}_R \cdot \lambda \vec{e}_z}{\pi a^2} P_R \exp\left\{-\frac{z_0^2}{a^2} - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{a^2} \left(t - \frac{y_0}{u \cot \theta}\right)^2\right\} \\
 & \times \cos\left\{(K/2L) \cdot (u^2 t^2 + y_0^2 + z_0^2) - K y_0 \cos \theta\right\} \\
 & + 2\kappa \frac{\vec{\sigma}_I \cdot \vec{\sigma}_R}{\pi a^2} (P_I P_R)^{\frac{1}{2}} \frac{A}{L^2} \times \exp\left(-\frac{y_0^2 \sin^2 \theta + z_0^2}{a^2}\right. \\
 & \left. - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{a^2} t^2\right) \cos(\omega_D t - \phi) \\
 & + 2\kappa \frac{\vec{\sigma}_I \cdot \lambda \vec{e}_z}{\pi a^2} (P_I P_R)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{y_0^2 \sin^2 \theta + z_0^2}{a^2} - \frac{u^2 \cos^2 \theta}{a^2} t^2\right) \\
 & \times \cos\left\{\omega_D t - (K/2L)(u^2 t^2 + y_0^2 + z_0^2) + K y_0 \cos \theta - \phi\right\} \\
 = & i_R + i_{IR} + i_{RS} + i_{RRS} + i_{DF} + i_{DH}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

式中 Doppler 频率

$$\omega_D = 2K u \sin \theta (= 2\pi \nu_D) \quad (16)$$

与(1)式的结果相同, A 是被散射光波所照明的那一部份光阴面的面积。若孔径光栏正好大到能让参考光束通过, 而另一个光栏又很靠近光阴面(见图2), 则 A 近似等于 E_R 所照明的面积, 即

$$A \approx \pi(L/2\alpha)^2 \quad (17)$$

因为参考光束的边缘相应于 2α 角处, 故(17)式中出现一个因子2。

“Doppler 条纹”光电流 i_{DF} 与 i_{DH} 非常相似, 两者都是频率为 ω_D 的余弦波, 其振幅亦均受到与时间有关的高斯型函数的调制。两者的差别仅在于振幅因子和位相项不同。

i_{DH} 中的位相项表现出一种轻微的频率调制效应, 这是由于粒子与光阴面之间的夹角随粒子运动而变化所引起的; 此外还有一个与随机位置 y_0 和 z_0 有关的位相项。比之于 2π , $K(u^2 t^2 + y_0^2 + z_0^2)/2L$ 这一项的数量级为 $\frac{a}{L\alpha}$, 所以它可以忽略不计(在 i_{RRS} 中亦有类似的项)。

与 Doppler 外差电流不同, i_{DF} 是由于在光阴面上两束散射波 \vec{E}_{IS} 和 \vec{E}_{RS} 混频而产生的。因为还能够把 i_{DF} 解释为一种与粒子通过一组干涉条纹(此条纹是由两束光相交形成的)时所散射出来的光强成正比的电流, 故称为 Doppler 条纹光电流, 这一点 Rudd(1969) 曾讨论过。然而, 我们要注意: 由于(15)式中同时出现了 i_{DH} 和 i_{DF} 两项, 所以干涉条纹模型和 Doppler 频移模型并不是研究同一物理事件的两种等效方法。对于 $\alpha \approx 0.01$ 这一典型值, i_{DF} 远小于 i_{DH}

$$i_{DF}/i_{DH} = \left(\frac{\vec{\sigma}_I \cdot \vec{\sigma}_R}{\sigma_I \cdot \lambda e_z} \right) 4\pi\alpha^2 = 0(1)4\pi\alpha^2.$$

当我们研究测试体积时, 这两种作用机构之间的差别就变得很重要了。显然, 因为 i_{DF} 仅与两束光交叉区内的干涉条纹有关, 与 i_{DF} 相应的 V_D 则与两束光相交后的光路无关。另一方面, 我们已知: i_{DH} 相应的 V_D 则与确定相干性圆柱的光路有关。

还应当注意: 若参考光束绕过而非通过流体, 则 i_{DH} 仍然存在, 但 i_{DF} 却变为零了; 另一方面若参考光束没有射中光阴面, 则 i_{DH} 为零但 i_{DF} 仍然存在。

IV. 单粒子的频谱

总光电流的频谱由其付氏变换给出:

$$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} i(t) dt \quad (18)$$

或,

$$\begin{aligned}
F(\omega) = & \kappa P_R \delta(\omega) + \kappa \frac{\vec{\sigma}_I \cdot \vec{\sigma}_I}{\pi a^2} \frac{A}{L^2} P_I \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\Delta\omega_D} \exp\left(-\frac{z_0^2}{a^2} - \frac{4\omega^2}{\Delta\omega_D^2} - j \frac{y_0 \omega}{u \cot \theta}\right) \\
& + \kappa \frac{\vec{\sigma}_R \cdot \vec{\sigma}_R}{\pi a^2} \frac{A}{L^2} P_R \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\Delta\omega_D} \exp\left(-\frac{z_0^2}{a^2} - \frac{4\omega^2}{\Delta\omega_D^2} + j \frac{y_0 \omega}{u \cot \theta}\right) \\
& + \kappa \frac{\vec{\sigma}_R \cdot \lambda \vec{e}_z}{\pi a^2} P_R \frac{2^{\frac{5}{2}}}{\Delta\omega_D} \times \exp\left(-\frac{z_0^2}{a^2} - \frac{4\omega^2}{\Delta\omega_D^2}\right. \\
& \left. + j \frac{y_0 \omega}{u \cot \theta}\right) \cos(K y_0 \cos \theta) \\
& + \kappa \frac{\vec{\sigma}_I \cdot \vec{\sigma}_R}{\pi a^2} (P_I P_R)^{\frac{1}{2}} \frac{A}{L^2} \frac{2}{\Delta\omega_D} \times \exp\left\{-\frac{y_0^2 \sin^2 \theta + z_0^2}{a^2}\right. \\
& \left. - \frac{4(\omega \pm \omega_D)^2}{\Delta\omega_D^2}\right\} + \kappa \frac{\vec{\sigma}_I \cdot \lambda \vec{e}_z}{\pi a^2} (P_I P_R)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\Delta\omega_D} \times \exp\left\{-\frac{y_0^2 \sin^2 \theta + z_0^2}{a^2}\right. \\
& \left. - \frac{4(\omega \pm \omega_D)^2}{\Delta\omega_D^2} \pm j(K y_0 \cos \theta - \phi)\right\} \quad (19)
\end{aligned}$$

式中带宽 $\Delta\omega_D$ 与(2)式给出的值很相似:

$$\Delta\omega_D = 2a \cot \theta \omega_D \quad (20)$$

在其他书中,这一带宽称为“系统展宽”或“Doppler 模糊效应”。能够用两种方法来研究它:把它看成是散射波列长度 ($\sim a/u$) 在时间上有限的结果,或者是聚焦光波角度的不确定性 ($\sim \alpha$) 的结果。由于 a 和 α 之间有着密切的关系,上述两种方法是等效的。其他展宽效应,比如激光本身的带宽 $\Delta\omega_0$ 和波分析器的带宽 $\Delta\omega_f$, 可以通过对 Doppler 频谱与激光器输出激光的频谱以及波分析器的滤波函数求折积而得出。若 $\Delta\omega_0$ 和 $\Delta\omega_f$ 相应的频谱都是高斯型,则 Doppler 频谱的总带宽变为:

$$\Delta\omega_e = (\Delta\omega_0^2 + \Delta\omega_f^2 + \Delta\omega_D^2)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

并且应当用 $\Delta\omega_f \Delta\omega_D / \Delta\omega_e$ 乘(19)式($\Delta\omega_0$ 的因子已被纳入 $(P_I P_R)^{\frac{1}{2}}$ 之中了)。平方谱的倍增乘子(The multiplication factor)是相同的。

(19)式中前四项的中心永远在零频处,所以若我们只是注意研究 ω_D 附近的频率以及 $\left(\frac{\Delta\omega_e}{\omega_0}\right)^2 \ll 1$ 的情况,则永远可以忽略低频谱,并且平方谱为:(由(19)式中最后两项可知)

$$|F(\omega)|^2 = A^2 \frac{\Delta\omega_f}{\Delta\omega_e \Delta\omega_D} \exp\left\{-2 \frac{(y_0^2 \sin^2 \theta + z_0^2)}{a^2} + \frac{8(\omega - \omega_D)^2}{\Delta\omega_e^2}\right\} \quad (22)$$

式中

$$\begin{aligned}
A \equiv & 2\kappa \frac{(P_I P_R)^{\frac{1}{2}}}{\pi a^2} \left\{ (\vec{\sigma}_I \cdot \lambda \vec{e}_z)^2 + \frac{A}{L^2} (\vec{\sigma}_I \cdot \lambda \vec{e}_z) (\vec{\sigma}_I \cdot \vec{\sigma}_R) \right. \\
& \left. \times \cos(K y_0 \cos \theta - \phi) + \frac{A^2}{L^4} (\vec{\sigma}_I \cdot \vec{\sigma}_R)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (23)
\end{aligned}$$

我们把(22)称为“Doppler 频谱”。

V. 多粒子的信号

§ 5.1 多粒子的光电流

最一般的情况下，测试体积中包含的散射粒子数是随机的。今研究从光阴面处可以看得见的流体体积 V 。在 T 秒钟内有 $\langle N \rangle$ 个粒子通过 V ， $\langle N_D \rangle$ 个粒子通过 V_D 。

忽略多次散射和衰减，光阴面处总电向量为：

$$\vec{E}_N = \vec{E}_R + \sum_{m=1}^N (\vec{E}_{RS}^m + \vec{E}_{IS}^m) \quad (24)$$

总光电流可像前面那样计算出来。略去频率很低的项和因为随机位相求平均时为零的项，可得

$$i_N(t) = i_R + \sum_{m=1}^N (i_{IS}^m + i_{RS}^m + i_{RRS}^m) + \sum_{m=1}^{N_D} (i_{DF}^m + i_{DH}^m). \quad (25)$$

光电流的位相和振幅均与变量 y_0 和 z_0 有关，并且以上各项都是在时刻 $t - t_m$ 计算的， t_m 是第 m 个粒子通过 $y_0 - z_0$ 平面的时间，所以 i_N 是一种散粒噪音过程。若粒子和液流的统计分布是稳定的，则 i_N 亦为稳定的。

§ 5.2 均方谱

直接用统计分析的方法就可以得出均方谱，所以我们略去计算的细节。简而言之，对 i_N 的自相关函数求付氏变换即可获得 i_N 的功率谱，使用平稳过程功率谱与均方谱的关系(Reif 1965)，可以证明(Adrian 1969)

$$\langle |F_N(\omega)|^2 \rangle = \langle \sum_{m=1}^{N_D} |F^m(\omega; y_0^m, z_0^m)|^2 \rangle. \quad (26)$$

(26)中和数的期值为：

$$\langle |F_N|^2 \rangle = \langle N_D |F|^2 \rangle \quad (27)$$

$$N_D = C \frac{\pi \Delta y_D \Delta z_D u T}{4} \quad (28)$$

式中 C 是平均粒子浓度，求平均是在 V_D 中 $y_0 - z_0$ 平面上进行的，因为流过 V_D 的流体中高速区内，每秒钟有更多的粒子通过 $y_0 - z_0$ 平面，所以在平均算子中 N_D 作为一种权函数出现。 T 表示探测时间的单位， $\langle N_D \rangle$ 可以解释为在单位探测时间内通过 V_D 的平均粒子数。当 u 为常数时， $N_D = \langle N_D \rangle$ 所以

$$\langle |F_N|^2 \rangle = \langle N_D \rangle \langle |F|^2 \rangle \quad (29)$$

对于 ω_D 附近的频率

$$\langle |F_N|^2 \rangle = \frac{4}{\pi \Delta y_D \Delta z_D} \int_{y_0^2 \sin^2 \theta + z_0^2 = a^2 \eta^2}^{N_D} |F(\omega)|^2 dy_0 dz_0 \quad (30)$$

式中 $|F(\omega)|^2$ 由(22)式给出，当 $\eta \rightarrow 0$ 时，(30)式与 η 无关。

在一般流场中速度 u 与 (y_0, z_0) 有关，因此 ω_D 和 $\Delta \omega_D$ 是 (y_0, z_0) 的函数。

因为在带宽和 $|F|^2$ 的振幅乘子中存在着 $\Delta\omega_D(y_0, z_0)$ 所以一般来说, 频谱既不是高斯型也不对称。

VI. 固有噪音

应用上节的结果去研究速度梯度为零的稳定层流是很有教益的。此时 ω_D 和 $\Delta\omega_D$ 与 y_0 和 z_0 无关, 由(22), (28)和(29)可得:

$$\langle |F_N|^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\langle N_D \rangle \langle A^2 \rangle \frac{\Delta\omega_f}{2\eta^2 \Delta\omega_e \Delta\omega_D} \right)^{\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{4(\omega - \omega_D)^2}{\Delta\omega_e^2} \right\} \quad (31)$$

这是一个与单粒子谱有相同带宽的高斯型函数。它与平均粒子浓度的平方根成正比。

由于 N_D 的起伏和随机量 (y_0^0, z_0^0) 引起的噪音可以按下式来确定:

$$\sigma |F_N|^2 = \langle (|F_N|^2 - \langle |F_N|^2 \rangle)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

当然上式是对均方谱而言的, 求平均的过程与(30)式相同, 均方谱信噪比为:

$$\langle |F_N|^2 \rangle / \sigma |F_N|^2 = \langle N_D \rangle^{\frac{1}{2}} / \eta \quad (33)$$

这一“固有噪音”通常压倒了诸如散粒噪音, 白噪音以及半导体表面噪音之类的电子噪音, 在高频时尤其是这样。

图4是实验得出的频谱, 它表明固有噪音与信号电平之间有一种正比关系, 并且实验结果与理论预言的高斯型谱很好的符合一致。

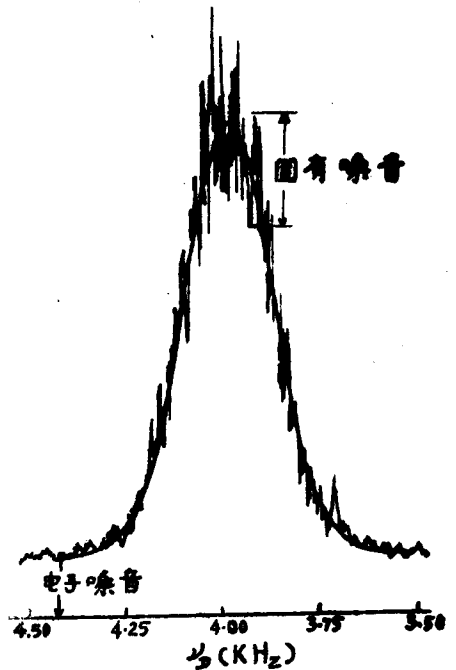


图4 典型的实验频谱 (实线为高斯型的曲线)

VII. 不稳定流动

因为速度变化引起的频率调制效应在前面的研究中未加考虑, 故严格来说(22)式对不稳定流动是不成立的。尽管如此只要不稳定流动的速度起伏的时间尺度比频谱分析器的时间常数长, 则仍可将(22)式用来研究不稳定流动, 因为此时频谱分析器并不能有效地反映出光电流的频率调制效应 (注: 频谱分析器的时间常数是对分析器内部而言的, 并不是用来对频谱分析器的输出求时间平均值的积分电路 (the integrating circuit) 的时间常数)。将(22)式对速度概率密度求平均, 即可得到所测出的 Doppler 频谱的时间平均。Goldstein 和 Hagen(1967) 曾利用这一事实来测量圆管中的湍流强度。

VIII. 折 射 效 应

若 θ 和 α 角都不太大, 则在待测流体的容器壁和周围空气的分界面上所发生的折射效应很容易被纳入前面的分析之中。此时由 Snell 定律可知在折射率为 n 的流体中的 α 角与在空气中的 α_a 角之间近似有下列关系

$$\alpha \approx \alpha_a/n \quad (34)$$

这是一个线性关系, 它意味着诸如波前畸变之类的二级效应是很小的; 并且基于几何光学的一切计算都成立。因此, 在前面讨论过的诸式中凡涉及 θ , α 和 λ 之值处皆应当用在空气中的值 θ_a , α_a 和 λ_a 来换算, 二者之间有以下关系:

$$\sin\theta = \sin\theta_a/n \quad (35)$$

$$\lambda = \lambda_a/n \quad (36)$$

以及 (34) 式,
$$\alpha \approx \alpha_a/n. \quad (34)$$

例如, 这样算得的 Doppler 频率和光束半径分别为:

$$\omega_D = 2K_a u \sin\theta_a \quad (37)$$

$$a = \frac{1}{K_a \alpha_a} \quad (38)$$

IX. 总 结

对于测试体积中存在单个球形散射粒子的情况, 我们已经清楚地推导出了总光电流 ((15)式) 和频谱 ((19)式) 的表示式, 由这些公式可以得出如下结论:

1. 总光电流的一部份 ((15) 式中最后两项) 是正弦波, 其振幅受到一个与时间有关的高斯函数的调制。它的频率由 (16) 式给出, 还加上一项通常可以忽略的很小的 FM 项 (译注: FM 为调频之意) 我们把这部份光电流称为“Doppler 光电流”

2. 总光电流中还包含一直流项和三项高斯型的电流脉冲。(见 (15) 式)

3. Doppler 光电流的频谱是由两个高斯型频谱组成的, 两者仅在振幅和位相上有所差别 (见 (19) 式中最后两项)。它们是由不同的机构产生的, 第一项是由于 Doppler 频移外差作用机构引起的, 而第二项则是由粒子通过两束光交叉形成的干涉条纹时发生光的散射作用所产生的。 $\frac{1}{e}$ 总带宽 $\Delta\omega_e$ 由 (21) 式给出。

4. 总频谱中还包含中心在零频处的高斯型频谱。

5. 测试体积是由 (13) 式所确定的椭球, 并且由 (15) 可知: 单粒子产生的 Doppler 频谱的强度按如下指数方式衰减:

$$\exp\{- (y_0^2 \sin^2\theta + z_0^2)/a^2\}$$

本文对多粒子问题所作分析的主要结果如下:

6. 使用 (22) 和 (28) 两式可以得出多粒子的均方频谱 (30) 式。

7. 当流动是稳定而又没有速度梯度时, 均方根频谱由(31)式给出, 它也是高斯型频谱, 带宽与单粒子频谱的带宽相同。

8. 均方根 Doppler 频谱的振幅与平均散射粒子浓度的平方根成正比。

9. 频谱中包含有固有噪音, 而且均方谱的信号与固有噪音之比与平均粒子浓度的 $\frac{1}{2}$ 方成正比。

上述分析阐明了与典型的激光 Doppler 系统有关的许多重要效应, 只要适当地改变 \vec{E}_R , \vec{E}_{RS} 和 \vec{E}_{IS} 的表示式, 则所作的分析能够直接推广到其他光路。

附 录 1

设 $\vec{r} = (ut, vt + y_0, wt + z_0)$, 可将本文所作的分析推广到任意三个速度分量都不为零的情况。为了简单起见, 在此我们仅仅给出比较重要的那些项, 即 Doppler 外差光电流和 Doppler 频谱; 至于更完全的结果请有兴趣的读者参考其他文献 (Adrian 1969)。

Doppler 外差光电流为:

$$i_{DH} = \frac{2\kappa\sigma_I \cdot \lambda e_z (P_I P_R)^{\frac{1}{2}}}{\pi a^2} \times \exp\left(-\frac{u^2 \cos^2\theta + v^2 \sin^2\theta + w^2}{a^2} t^2 - \frac{2y_0 v \sin^2\theta + 2z_0 w}{a^2} t - \frac{y_0^2 \sin^2\theta + z_0^2}{a^2}\right) \times \cos\left\{\left(\omega_D - \frac{K\vec{r}_0 \cdot \vec{V}}{L}\right)t - \frac{K}{2L}(\vec{V} \cdot \vec{V} t^2 + r_0^2) + Ky_0 \cos\theta - \phi\right\} \quad (A1)$$

因为上式是直接由(12)式推出的, 故 V_D 的定义仍与(13)式相同。

与(22)对应的公式为:

$$|F(\omega)|^2 = A^2 \left\{ \Delta\omega_f / \Delta\omega'_e (\Delta\omega_e^2 - \Delta\omega_0^2 - \Delta\omega_f^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \times \exp\left\{-\frac{2y_0^2 \sin^2\theta + 2z_0^2}{a^2} + \frac{2(y_0 v \sin^2\theta + z_0 w)^2}{a^2 (u^2 \cos^2\theta + v^2 \sin^2\theta + w^2)} - \frac{8(\omega - \omega_D)^2}{\Delta\omega_e'^2}\right\} \quad (A2)$$

这里 Doppler 频谱的带宽现在变为:

$$\Delta\omega_e'^2 = \Delta\omega_0^2 + \Delta\omega_f^2 + \Delta\omega_D^2 \left\{ 1 + \left(\frac{vcot\theta}{u}\right)^2 + \left(\frac{wsec\theta}{u}\right)^2 \right\} \quad (A3)$$

(A3)意味着: 当速度向量垂直于照射光束与参考光束夹角的分角线, 并垂直于参考光束和照射光束的平面时, 如图1所示, Doppler 频谱的带宽最小。