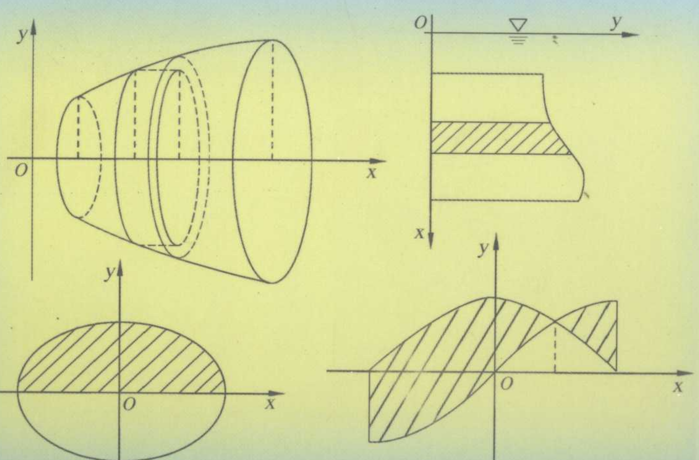
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

微积分

王增辉　主编



中国农业出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材
全 国 高 等 农 业 院 校 教 材
全国高等农业院校教学指导委员会审定

微 积 分

王增辉 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/王增辉主编. —北京：中国农业出版社，2005.8（2007.7 重印）
普通高等教育“十一五”国家级规划教材．全国高等农业院校教材
ISBN 978-7-109-09918-0

Ⅰ. 微… Ⅱ. 王… Ⅲ. 微积分—高等学校—教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 014173 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑 朱 雷

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行
2005 年 8 月第 1 版 2007 年 7 月北京第 3 次印刷

开本：787mm×960mm 1/16 印张：20
字数：351 千字
定价：24.50 元

内 容 提 要

本教材是根据高等农林水产院校《微积分》教学大纲和《经济数学基础》教学大纲以及编者多年的教学实践，按照当前的教学改革精神编写而成的.

本教材的主要内容有：函数与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分的应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、二重积分、微分方程、无穷级数等。书末附有习题参考答案和积分表.

本书内容丰富，叙述详细，通俗易懂，例题较多，并配备大量习题，具有便于自学等优点. 可供高等农林水产院校相关专业作为教材或教学参考书.亦可作为经济管理类专业教材和教学参考书. 本书也可供其他相关专业人员作为自学用书或参考书.

编写人员名单

主　编　王增辉

副主编　伍　勇　解顺强

参　编　吴瑞武　李丽华

　　　　赵　昕　刘丽红

前 言

本教材是根据高等农林院校《微积分》教学大纲和《经济数学基础》以及编者多年的教学实践，集集体智慧编写而成的. 可作为高等院校农林水产专业和经济管理类专业本专科生的《微积分》教材和教学参考书.

本教材注重用实际例子引入基本概念，以使读者能更深入地理解所学内容. 本书讲解详细，条理清晰，通俗易懂。另一特点是例题较多，内容丰富，可供不同专业选用. 书中每一节后都配备了一定数量的习题，书后附有习题答案，可供读者检查之用.

选用本书作为教材，可根据不同专业进行取舍，农林水产类专业可不讲导数在经济管理方面的应用一节和无穷级数一章；对数学要求较低的管理类专业（数学四），可少讲空间解析几何一章的内容，不讲无穷级数一章；对数学要求较高的管理类专业（数学三），可讲授本书的全部内容.

参加本教材编写工作的有：云南农业大学伍勇（第一、二章）、吴瑞武（第三章）、河北科技师范学院解顺强（第四章）、李丽华（第五章）、吉林农业大学王增辉（第六、八、十、十一章）、赵昕（第七章）、刘丽红（第九章），全书由王增辉统稿.

感谢吉林农业大学教务处的大力支持，特别感谢吉林农业大学安希忠教授给予热情的指导和帮助.

限于编者水平，再加上编写时间比较仓促，书中一定还存在不妥之处，希望专家、同仁和广大读者指正，以俟再版时更正、改进.

编 者

2005 年 6 月

目　录

前　言

第一章　函数与极限 …… 1

第一节　函数 …… 1

一、函数概念 …… 1

二、函数的四种特性 …… 2

三、初等函数 …… 4

习题 1—1 …… 6

第二节　函数的极限 …… 7

一、数列的极限 …… 7

二、函数的极限 …… 10

三、无穷小与无穷大 …… 14

习题 1—2 …… 17

第三节　函数极限的计算 …… 17

一、函数极限的运算法则 …… 17

二、两个重要极限 …… 20

三、无穷小的比较 …… 21

习题 1—3 …… 22

第四节　函数的连续性 …… 22

一、函数的连续性 …… 22

二、连续函数的运算 …… 26

三、闭区间上连续函数的性质 …… 27

习题 1—4 …… 28

第二章　导数与微分 …… 30

第一节　导数概念 …… 30

一、导数概念 …… 30

二、求导举例 …… 32

习题 2—1 …… 34

第二节　函数求导法则与基本初等函数求导公式 …… 35

一、函数求导法则 …… 35
二、基本初等函数求导公式 …… 38
习题 2—2 …… 39
第三节 高阶导数、隐函数导数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 40
一、高阶导数 …… 40
二、隐函数的导数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 41
习题 2—3 …… 45
第四节 微分及其在近似计算中的应用 …… 45
一、微分概念 …… 45
二、基本初等函数的微分公式及函数微分运算法则 …… 48
三、微分在近似计算中的应用 …… 49
习题 2—4 …… 49

第三章 导数的应用 …… 51

第一节 中值定理 …… 51
一、罗尔定理 …… 51
二、拉格朗日中值定理 …… 52
三、柯西中值定理 …… 54
习题 3—1 …… 54
第二节 洛必达法则 …… 55
一、“$\frac{0}{0}$”型未定式 …… 55
二、“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式 …… 56
三、其他类型未定式 …… 57
习题 3—2 …… 58
第三节 泰勒公式 …… 59
习题 3—3 …… 61
第四节 函数的极值与最大值最小值 …… 62
一、函数的单调性 …… 62
二、函数的极值 …… 64
三、函数的最大值和最小值 …… 67
习题 3—4 …… 68
第五节 函数图形的描绘 …… 69
一、曲线的凸凹与拐点 …… 69
二、曲线的渐近线 …… 71

三、函数图形的作法 …… 71
习题 3—5 …… 73
第六节　导数在经济中的应用 …… 74
一、边际分析 …… 74
二、弹性分析 …… 76
习题 3—6 …… 81
第四章　不定积分 …… 82
第一节　原函数与不定积分 …… 82
一、原函数与不定积分的概念 …… 82
二、基本积分公式 …… 84
三、不定积分的性质 …… 86
习题 4—1 …… 89
第二节　第一类换元积分法 …… 90
习题 4—2 …… 95
第三节　第二类换元积分法 …… 96
习题 4—3 …… 100
第四节　分部积分法 …… 101
习题 4—4 …… 105
第五节　几类特殊初等函数的积分 …… 105
一、有理函数的积分 …… 105
二、三角函数有理式的积分 …… 108
三、简单无理函数积分举例 …… 110
习题 4—5 …… 111
第五章　定积分 …… 113
第一节　定积分的概念 …… 113
一、引例 …… 113
二、定积分的定义 …… 115
三、定积分的几何意义 …… 116
习题 5—1 …… 117
第二节　定积分的性质 …… 117
习题 5—2 …… 120
第三节　微积分的基本公式 …… 120
一、可变上限函数 …… 120

二、微积分基本公式 …… 123
习题 5—3 …… 124
第四节 定积分的换元法 …… 125
习题 5—4 …… 128
第五节 定积分的分部积分法 …… 129
习题 5—5 …… 131
第六节 广义积分 …… 131
一、无穷区间上的广义积分 …… 132
二、无界函数的广义积分 …… 134
习题 5—6 …… 135

第六章 定积分的应用 …… 136

第一节 定积分的微元法 …… 136
习题 6—1 …… 137
第二节 平面图形的面积 …… 138
一、直角坐标系情形 …… 138
二、极坐标系情形 …… 140
习题 6—2 …… 141
第三节 体积 …… 142
一、旋转体的体积 …… 142
二、平行截面面积为已知的立体的体积 …… 144
习题 6—3 …… 145
第四节 水压力 …… 145
习题 6—4 …… 146
第五节 变力作功 …… 147
习题 6—5 …… 148
第六节 平面曲线的弧长 …… 148
习题 6—6 …… 149

第七章 空间解析几何与向量代数 …… 150

第一节 空间直角坐标系 …… 150
习题 7—1 …… 151
第二节 向量的加减与数乘运算 …… 152
一、向量的概念 …… 152
二、向量的加减法 …… 153

三、向量的数乘运算 …… 154
习题 7—2 …… 156
第三节 向量的坐标表示 …… 156
习题 7—3 …… 158
第四节 向量间的投影 …… 158
一、向量的方向角和方向余弦 …… 159
二、向量间的投影 …… 160
习题 7—4 …… 161
第五节 数量积 …… 161
习题 7—5 …… 164
第六节 向量积 …… 164
习题 7—6 …… 167
第七节 平面及其方程 …… 167
一、平面的点法式方程 …… 167
二、平面的一般方程 …… 169
三、两个平面的夹角 …… 170
习题 7—7 …… 171
第八节 空间直线及其方程 …… 172
一、直线的一般方程 …… 172
二、直线的对称式方程和参数方程 …… 172
三、两条直线所成的角 …… 173
习题 7—8 …… 173
第九节 空间曲面和曲线的简单知识 …… 173
一、曲面与方程 …… 173
二、旋转曲面 …… 175
三、柱面 …… 175
*四、二次曲面简介 …… 176
五、空间曲线 …… 177
习题 7—9 …… 177

第八章 多元函数的微分学 …… 179

第一节 多元函数的基本概念 …… 179
一、二元函数的实例 …… 179
二、平面点集 …… 180
三、二元函数的定义 …… 181

四、二元函数的图像 …… 182
习题 8—1 …… 183
第二节 多元初等函数及其连续性 …… 183
一、多元初等函数的概念 …… 183
二、多元初等函数的连续性 …… 185
习题 8—2 …… 185
第三节 多元函数的偏导数 …… 186
习题 8—3 …… 189
第四节 高阶偏导数 …… 189
习题 8—4 …… 192
第五节 全微分及其应用 …… 192
一、全微分 …… 192
二、全微分在近似计算中的应用 …… 195
习题 8—5 …… 196
第六节 多元复合函数的求导法则 …… 197
习题 8—6 …… 200
第七节 隐函数的求导问题 …… 201
一、含两个变量的方程 …… 201
二、含三个变量的方程 …… 201
*三、方程组的情形 …… 203
习题 8—7 …… 203
第八节 最大值最小值问题 …… 204
习题 8—8 …… 205

第九章 二重积分 …… 206

第一节 二重积分的概念与性质 …… 206
一、曲顶柱体的体积 …… 206
二、二重积分的定义 …… 208
三、二重积分的基本性质 …… 209
习题 9—1 …… 210
第二节 二重积分的计算 直角坐标系 …… 211
习题 9—2 …… 217
第三节 二重积分的计算 极坐标系 …… 219
习题 9—3 …… 222
第四节 二重积分的应用举例 …… 223

一、二重积分的微元法 …… 223
二、体积的计算 …… 224
*三、平面均质薄板的质心 …… 226
习题 9—4 …… 228

第十章　微分方程 …… 229

第一节　微分方程的一般概念 …… 230
习题 10—1 …… 232
第二节　可分离变量的微分方程 …… 233
习题 10—2 …… 236
第三节　一阶线性微分方程 …… 236
习题 10—3 …… 239
第四节　几类可降阶的高阶微分方程 …… 240
一、$y^{(n)}=f(x)$ 型 …… 240
二、$y''=f(x, y')$ 型 …… 241
三、$y''=f(y, y')$ 型 …… 242
习题 10—4 …… 243
第五节　二阶常系数齐次线性微分方程 …… 243
习题 10—5 …… 247
第六节　二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 247
习题 10—6 …… 249

***第十一章　无穷级数** …… 250

第一节　无穷级数的基本知识 …… 250
一、无穷级数的概念 …… 250
二、无穷级数的基本性质 …… 252
三、无穷级数收敛的必要条件 …… 253
习题 11—1 …… 254
第二节　正项级数的审敛法 …… 254
一、正项级数的概念 …… 254
二、正项级数的判别法 …… 255
习题 11—2 …… 258
第三节　任意项级数 …… 258
一、交错级数及其审敛法 …… 258
二、绝对收敛与条件收敛 …… 259

习题 11—3 …… 261
第四节 幂级数 …… 261
一、幂级数及其收敛区间 …… 262
二、幂级数的运算 …… 265
习题 11—4 …… 267
第五节 函数展开成幂级数 …… 268
一、函数的泰勒级数 …… 268
二、函数的麦克劳林级数 …… 269
三、函数展开成幂级数 …… 269
四、函数展开成幂级数的间接方法 …… 271
习题 11—5 …… 272

习题参考答案 …… 273
附录 积分表 …… 298
参考文献 …… 304

第一章　函数与极限

众所周知，数学是研究现实世界的空间形式、数量关系以及它们逻辑可能的学科．微积分学作为数学领域的重要分支学科产生于 17 世纪，是由牛顿（I. Newton，英国数学家，1643—1727）和莱布尼茨（G . W. Leibniz，德国数学家，1646—1716）共同创立．它所解决的实际问题从数学的角度归纳起来有如下两类：

1. 如何求物体运动的瞬时速度、函数曲线的切线及函数的最大值、最小值等问题.

2. 如何计算曲线所围成图形的面积、曲线的长度及曲面所围成物体的体积等问题.

微分、积分以及微分与积分的关系是微积分的重要内容，函数是它的研究对象，极限思想和方法是微积分学坚实的基石．本章是在初等数学的基础上，讨论函数、函数极限及函数连续性等基本概念.

第一节　函　　数

一、函数概念

定义 1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个非空的实数集，如果在 D 内所取的每一个值 x，按照某一种确定的对应规律，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为：

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量，D 叫做该函数的定义域，取定一点 $x_0\in D$，称 $y_0=f(x_0)$ 为 x_0 的函数值，函数值的全体叫做该函数的值域，一般用 W 表示，即，$W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$.

在函数定义中有两个要素，即定义域和对应规律．若两函数的定义域与对应规律相同则称两函数相等．表示函数通常用表格、图像及解析式三种方法，在微积分学中一般是用解析式表示函数，这时约定使解析式有意义的 x 的全

体就作为函数的定义域.

例 1 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$，函数图形如图 1 - 1.

例 2 函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=\{-1,1,0\}$，函数图形如图 1 - 2.

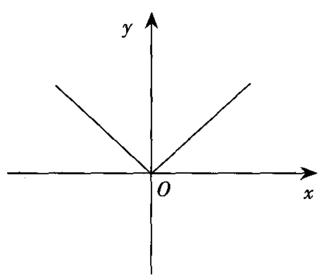


图 1 - 1

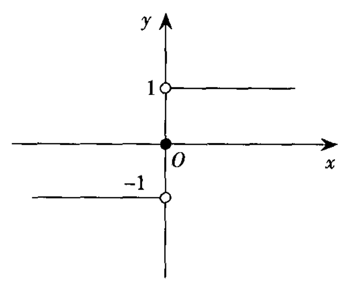


图 1 - 2

例 1 和例 2 有一个共同的点：自变量在不同范围变化时，因变量依照不同的对应法则与之对应. 这种根据自变量的不同取值范围，用不同的数学解析式表示的函数称为分段函数.

例 3 x 为任一实数，y 表示不超过 x 的最大整数，用记号 $y=[x]$ 表示，例如，$[-3.5]=-4$，$[-2.9]=-3$，$[0]=0$，$[\pi]=3$，$[2.5]=2$，$[5]=5$ 等等. 函数 $y=[x]$ 称为取整函数.

二、函数的四种特性

1. 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且对任意 $x\in D$，必有 $-x\in D$，若对任意 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

如函数 $y=\cos x$，$y=\frac{1}{2}x^2$ 都是偶函数，函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 都是奇函数，而函数 $y=\ln x$，$y=\sin x+\cos x$，$y=e^x$ 是非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于 D 内任意两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调增加；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调减少.

如反正弦函数 $y=\arcsin x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上单调增加，反余弦函数 $y=\arccos x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上单调减少. 单调函数存在反函数，且反函数仍为单调函数. 一般地，若 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的单调函数，$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，$[\alpha,\beta]$ 为其值域，对每一个 $y\in[\alpha,\beta]$，存在唯一的 $x\in[a,b]$，使得 $f(x)=y$，由函数定义则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 显然，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数，即

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in[a,b];\ f(f^{-1}(y))=y,\ y\in[\alpha,\beta].$$

习惯上，我们总是用 x 表示自变量，而用 y 表示因变量（或函数），因此，一般将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 表示为 $y=f^{-1}(x)$.

例 4　证明：(1) 函数 $f(x)=\frac{1+x}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

(2) 函数 $f(x)=2x+\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

证明　(1) 任取 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，因为 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$，又 $x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$，所以，$f(x_1)>f(x_2)$，即函数 $f(x)=\frac{1+x}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

(2) 任取 x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，因为，

$$f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)+2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2},$$

又 $\left|\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant 1$，$\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|<\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|$，所以

$$\left|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|<|x_1-x_2|，即 f(x_1)<f(x_2).$$

因此，函数 $f(x)=2x+\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.