

铁路职业教育铁道部规划教材

# 建筑力学(下册)

JIANZHULIXUE

TIELU ZHIYE JIAOYU TIEDAOBU GUIHUA JIAOCAI

马晓倩 / 主编 王 强 / 副主编

高职

中国铁道出版社  
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE



铁路职业教育铁道部规划教材

(高 职)

# 建筑力学(下册)

马晓倩 主 编

王 强 副主编

朱耀淮 主 审

中国铁道出版社

2008年·北 京

## 内 容 简 介

本书为铁路职业教育铁道部规划教材,全书分上、下两册,本书为下册,主要内容  
包括:组合变形,压杆稳定,平面体系的几何组成分析,静定结构的内力分析,超静定  
结构内力分析,影响线及其应用等。

本书可作为铁路职业教育教材,也可作为职工培训教材。

## 图书在版编目(CIP)数据

建筑力学.下册/马晓倩主编. —北京:中国铁道出版  
社,2008.2

铁路职业教育铁道部规划教材. 高职

ISBN 978-7-113-08596-4

I. 建… II. 马… III. 建筑力学-高等学校-教材  
IV. TU311

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 004739 号

书 名:建筑力学(下册)

作 者:马晓倩 主编 王 强 副主编

责任编辑:程东海 电话:010-51873135

封面设计:陈东山

责任校对:孙 玫

责任印制:金洪泽

出版发行:中国铁道出版社

地 址:北京市宣武区右安门西街 8 号

邮政编码:100054

网 址:[www.tdpress.com](http://www.tdpress.com)

电子信箱:发行部 [ywk@tdpress.com](mailto:ywk@tdpress.com)

印 刷:北京华正印刷有限公司

总编办 [zbb@tdpress.com](mailto:zbb@tdpress.com)

版 次:2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷

开 本:787 mm×1092 mm 1/16 印张:8.75 字数:212 千

书 号:ISBN 978-7-113-08596-4/O·1711

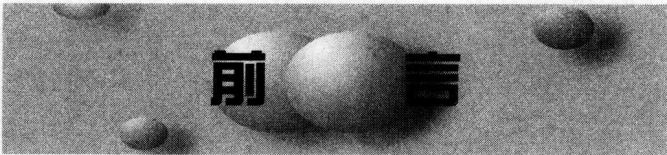
定 价:18.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版的图书,如有缺页、倒页、脱页者,请与本社读者服务部调换。

电 话:市电(010)51873170 路电(021)73170(发行部)

打击盗版举报电话:市电(010)63549504 路电(021)73187



## 前言

本书为铁路职业教育铁道部规划教材,是根据铁路高职教育铁道工程(工务、大型养路机械操纵)专业教学计划“建筑力学”课程教学大纲编写的。本教材分为上、下两册,上册主要介绍:力学的基本知识;力系的平衡方程及其应用;各种基本变形形式下杆件内力、应力、变形的计算以及强度和刚度条件。下册主要介绍:组合变形;压杆稳定;平面体系的几何组成分析;静定结构内力分析;超静定结构内力分析和影响线的基础知识。

在本教材的编写过程中,编者根据多年的教学实践经验,既考虑了教材内容的专业性和实践性,也考虑了力学本身的完整性和系统性,注重实际应用及实际计算。力求做到内容紧凑、深入浅出、理论叙述清楚、概念明确、计算简捷直观。

本教材由天津铁道职业技术学院马晓倩任主编,天津铁道职业技术学院王强任副主编,湖南交通工程职业技术学院朱耀准任主审。具体参编章节分工:绪论、第六、七、八、九、十、十三、十四章由马晓倩编写;第二、三、四、五、十五、十六章由王强编写;第一、十一章由曹中平(石家庄铁道学院齐齐哈尔校区)编写;第十二章由汤池(湖南交通工程职业技术学院)编写。书中带星号的部分为选学内容。

本书为下册,包括第十一至第十六章内容。

在本书的编写过程中,不仅得到了全国铁路职业教育建筑工程专业教学指导委员会的指导和大力支持,还得到了诸多同事的帮助,在此谨表谢意!

编者  
2008年1月

# 目 录

|      |                  |         |      |
|------|------------------|---------|------|
| 10   | .....            | 取取本基去代  | 寸二第  |
| 10   | .....            | 去第第     | 寸三第  |
| 88   | .....            | 代取代     | 寸四第  |
| 18   | .....            | 取代用     | 寸五第  |
| 10   | .....            |         |      |
| 10   | .....            |         |      |
| 00   | .....            | 用取其区建南第 | 章六十第 |
| 第十一章 | 组合变形.....        |         | 1    |
| 第一节  | 基本概念.....        |         | 1    |
| 第二节  | 斜弯曲.....         |         | 2    |
| 第三节  | 偏心压缩.....        |         | 7    |
| 思考题  | .....            |         | 11   |
| 习 题  | .....            |         | 12   |
| 第十二章 | 压杆稳定.....        |         | 13   |
| 第一节  | 概述.....          |         | 13   |
| 第二节  | 临界力和临界应力.....    |         | 13   |
| 第三节  | 临界应力总图.....      |         | 18   |
| 第四节  | 压杆的强度计算.....     |         | 19   |
| 第五节  | 提高压杆稳定的措施.....   |         | 23   |
| 思考题  | .....            |         | 25   |
| 习 题  | .....            |         | 25   |
| 第十三章 | 平面体系的几何组成分析..... |         | 29   |
| 第一节  | 几何组成分析的目的.....   |         | 29   |
| 第二节  | 平面体系的自由度.....    |         | 29   |
| 第三节  | 几何不变体系的组成规则..... |         | 32   |
| 第四节  | 几何组成分析的应用.....   |         | 35   |
| 第五节  | 静定结构和超静定结构.....  |         | 37   |
| 思考题  | .....            |         | 37   |
| 习 题  | .....            |         | 38   |
| 第十四章 | 静定结构的内力分析.....   |         | 40   |
| 第一节  | 多跨静定梁内力分析.....   |         | 40   |
| 第二节  | 静定平面刚架的内力分析..... |         | 42   |
| 第三节  | 静定平面桁架的内力分析..... |         | 46   |
| 第四节  | 静定组合结构内力分析.....  |         | 50   |
| 第五节  | 静定拱的内力分析.....    |         | 52   |
| 第六节  | 静定结构的静力特性.....   |         | 56   |
| 思考题  | .....            |         | 56   |
| 习 题  | .....            |         | 57   |
| 第十五章 | 超静定结构内力分析.....   |         | 61   |
| 第一节  | 超静定结构的概述.....    |         | 61   |

|        |                         |       |
|--------|-------------------------|-------|
| 第二节    | 力法基本原理 .....            | 64    |
| 第三节    | 位移法 .....               | 67    |
| 第四节    | 力矩分配法的基本原理 .....        | 83    |
| * 第五节  | 用力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架 ..... | 87    |
| 思考题    | .....                   | 91    |
| 习 题    | .....                   | 91    |
| 第十六章   | 影响线及其应用 .....           | 96    |
| 第一节    | 概述 .....                | 96    |
| 第二节    | 用静力法作单跨静定梁的影响线 .....    | 97    |
| 第三节    | 间接荷载作用下主梁的影响线 .....     | 101   |
| * 第四节  | 用机动法作单跨静定梁的影响线 .....    | 102   |
| * 第五节  | 多跨静定梁的影响线 .....         | 104   |
| 第六节    | 桁架的影响线 .....            | 106   |
| 第七节    | 利用影响线求量值 .....          | 108   |
| 第八节    | 铁路和公路的标准荷载 .....        | 109   |
| 第九节    | 最不利荷载位置 .....           | 111   |
| 第十节    | 换算荷载 .....              | 116   |
| 第十一节   | 简支梁的绝对最大弯矩 .....        | 121   |
| 第十二节   | 简支梁的包络图 .....           | 122   |
| * 第十三节 | 超静定结构影响线作法概述 .....      | 123   |
| * 第十四节 | 连续梁的均布活载最不利位置及包络图 ..... | 126   |
| 思考题    | .....                   | 128   |
| 习 题    | .....                   | 129   |
| 参考文献   | .....                   | 132   |
| 38     | .....                   | 第三卷   |
| 72     | .....                   | 第四卷   |
| 78     | .....                   | 第五卷   |
| 78     | .....                   | 第六卷   |
| 88     | .....                   | 第七卷   |
| 04     | .....                   | 第四十卷  |
| 04     | .....                   | 第四十一卷 |
| 84     | .....                   | 第四十二卷 |
| 04     | .....                   | 第四十三卷 |
| 08     | .....                   | 第四十四卷 |
| 82     | .....                   | 第四十五卷 |
| 06     | .....                   | 第四十六卷 |
| 02     | .....                   | 第四十七卷 |
| 72     | .....                   | 第四十八卷 |
| 10     | .....                   | 第四十九卷 |
| 10     | .....                   | 第五十卷  |

# 组合变形

前面我们对杆件的基本变形(拉伸、压缩、剪切、扭转、弯曲)已经分别进行了研究,建立了相应的强度条件和刚度条件。而在实际工程结构中,许多构件在荷载作用下发生的变形往往比较复杂,很少是单一的基本变形形式,在小变形的条件下,且材料服从胡克定律时,杆件的复杂变形可看成是多种基本变形的组合,那么就把由两种或两种以上的基本变形组合而成的变形称为组合变形。例如,图 11-1 所示的雨棚实例,雨棚梁除了承受上部墙体传来的均布荷载  $q$  之外,还要承受雨棚板传来的均布力矩  $M_e$ 。雨棚梁在  $q$  作用下发生弯曲变形,在  $M_e$  作用下发生扭转变形,所以雨棚梁发生的是由弯曲变形和扭转变形组合而成的组合变形。



再如,图 11-2 所示斜屋架上的檩条,屋面传来的均布荷载  $q$  的作用线垂直向下,而与檩条矩形截面的两个对称轴  $z$  轴和  $y$  轴都不重合,将  $q$  分解成沿  $z$  轴和  $y$  轴方向上的两个分力,则檩条受到的是沿  $z$  轴和  $y$  轴两个方向上平面弯曲的组合变形。那么就把由两个相互垂直平面内的平面弯曲组合称为斜弯曲。



图 11-3

又如,图 11-3 所示厂房的牛腿柱,上柱承受屋架传来的荷载  $F_1$ ,下柱承受吊车梁传来的荷载  $F_2$ ,而  $F_1$ 、 $F_2$  一般不与下柱的轴线重合,而有一定的偏心,其偏心距分别为  $e_1$  和  $e_2$ ,根据力的平移定理,可将力  $F_1$ 、 $F_2$  向柱子轴线平移,但必须同时附加力偶  $F_1 e_1$  和  $F_2 e_2$ ,平移的结果是牛腿柱受到一个轴向压力  $F(F=F_1+F_2)$  和一个附加力偶  $M(M=F_2 e_2 - F_1 e_1)$  的作用,则把这种外力的作用线与杆轴线平行但不重合,使杆件产生轴向压缩和弯曲变形的组合变形称为偏心压缩。

其他如挡土墙产生的是压—弯组合变形;卷扬机的机轴产生的是弯—扭组合变形等。对发生组合变形的杆件进行分析并进行强度计算时,通常把作用在杆件上的荷载进行简化或分解,简化或分解后的荷载,各自对杆件产生一种基本变形,分别计算每一种基本变形的应力和变形,然后利用叠加法进行叠加,就得到原来的荷载产生的组合变形的应力和变形。工程中发生组合变形的杆件一般都符合小变形的假设,在弹性范围内工作,因此可采用叠加法进行分析和计算。

本章讨论斜弯曲和偏心压缩两种组合变形,其他形式的组合变形可举一反三,分析方法和这两种情况相同。

## 第二节 斜 弯 曲

对于横截面有对称轴的梁,当外力作用在纵向对称平面内时,梁变形后轴线由原来的直线将变为位于纵向对称平面内的一条平面曲线,这种变形形式称为平面弯曲。如果外力不作用在梁的纵向对称平面内时,梁变形后的轴线就不在同一纵向平面内,这时梁的变形形式是斜弯曲。

### 一、应 力

下面以矩形截面悬臂梁为例对斜弯曲进行分析,见图 11-4 所示。

设梁在自由端受集中力  $F$  作用,力  $F$  通过截面形心与对称轴  $y$  轴夹角为  $\varphi$ ,建立如图所示的坐标系,即以梁轴线为  $x$  轴,截面上两个对称轴分别为  $y$  轴和  $z$  轴,以  $O$  点为坐标原点。将力  $F$  沿  $y$  轴和  $z$  轴分解为两个分量  $F_y$  和  $F_z$ ,则

$$\begin{cases} F_y = F \cos \varphi \\ F_z = F \sin \varphi \end{cases}$$

$F_y$  引起铅直面的平面弯曲,与前面讲过的弯曲变形相

同。 $F_z$  引起水平面的平面弯曲。在距自由端为  $x$  距离处任取一截面,并在截面上任取一点  $K(z, y)$ ,先求出此截面的弯矩  $M_z$  和  $M_y$

$$M_z = F_y \cdot x = F \cos \varphi \cdot x = M \cos \varphi$$

$$M_y = F_z \cdot x = F \sin \varphi \cdot x = M \sin \varphi$$

式中,  $M = F \cdot x$  是力  $F$  对距自由端为  $x$  距离截面的弯矩。从上式看出,先求出总弯矩  $M$  后,再将  $M$  沿坐标轴分解为  $M_z$  和  $M_y$  也可以,则  $K$  点的正应力为  $M_z$  和  $M_y$  分别引起的应力  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$  的叠加,  $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$  可按弯曲变形应力公式进行计算,则

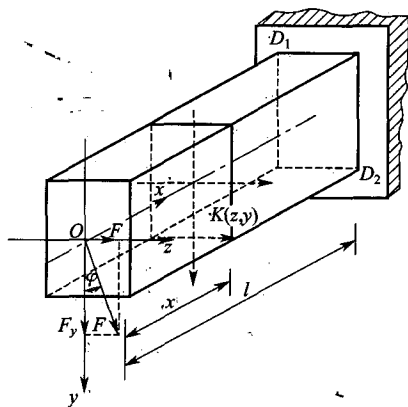


图 11-4

$$\sigma_y = -\frac{M_z}{I_z}y = -\frac{M\cos\varphi}{I_z}y$$

$$\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y}z = -\frac{M\sin\varphi}{I_y}z$$

应力的符号根据任取的点  $K(z, y)$  所在的位置在  $M_z$  和  $M_y$  作用下是处于梁发生弯曲变形的受拉区还是受压区来确定, 拉应力为正, 压应力为负。这里选取的点  $K(z, y)$ , 无论在  $M_z$  还是在  $M_y$  的作用下, 均处于受压区, 所以计算出的  $\sigma_y, \sigma_z$  均为负值, 则  $K$  点正应力为

$$\sigma_K = \sigma_y + \sigma_z = -\frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z$$

从而推出梁任意截面上任意点  $K$  的正应力为

$$\sigma_K = \pm \frac{M_z}{I_z}y \pm \frac{M_y}{I_y}z \quad (11-1)$$

式中的正负号根据  $K$  点的位置进行判断。

任意一点的强度计算公式有了, 还要确定  $\sigma_{\max}$  发生的位置, 即要确定危险截面和危险点。以图 11-4 所示的悬臂梁为例, 在固定端截面上  $M$  达到最大值, 这显然是危险截面。而固定端截面在  $M_{z\max}$  作用下, 上边缘拉应力最大, 下边缘压应力最大; 在  $M_{y\max}$  作用下, 左边缘拉应力最大, 右边缘压应力最大。危险点应该是危险截面上  $M_{z\max}$  和  $M_{y\max}$  引起的正应力都达到最大值的点, 即图中的  $D_1, D_2$  点, 其中  $D_1$  是最大拉应力点,  $D_2$  是最大压应力点。

若材料的抗拉和抗压强度相等, 设危险点的坐标分别为  $z_{\max}$  和  $y_{\max}$ , 则可建立如下强度条件:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{I_z}y_{\max} + \frac{M_{y\max}}{I_y}z_{\max}$$

$$\frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{M_{y\max}}{W_y} \leq [\sigma] \quad (11-2)$$

式中,  $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}$ 。

对于边界没有棱角而呈弧线的截面, 不易确定危险点的位置, 如图 11-5 所示, 需研究应力分布规律。

$$\sigma = M \left( \frac{\cos\varphi}{I_z}y + \frac{\sin\varphi}{I_y}z \right) \quad (11-3)$$

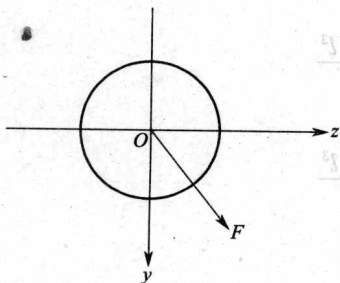


图 11-5

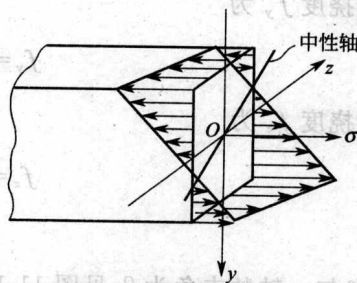


图 11-6

上式则表明, 截面上正应力是  $y$  和  $z$  的线性函数, 所以它的分布规律是一个平面, 见图 11-6 所示。此平面与  $y, z$  坐标平面 (即  $x$  截面) 相交于一直线, 此直线上应力均为零, 该直线即为中

性轴。那么如何确定中性轴的位置呢？设中性轴上各点的坐标为  $y_0, z_0$ ，中性轴上应力为零，则式(11-3)可写为

$$\sigma = M \left( \frac{\cos \varphi}{I_z} y_0 + \frac{\sin \varphi}{I_y} z_0 \right) = 0$$

$M$  不为零，则

$$\frac{\cos \varphi}{I_z} y_0 + \frac{\sin \varphi}{I_y} z_0 = 0$$

这是一条通过形心的直线。设它与  $z$  轴的夹角为  $\alpha$  (见图 11-7)，则有

$$\tan \alpha = \frac{y_0}{z_0} = -\frac{I_z}{I_y} \tan \varphi \quad (11-4)$$

此式表明：(1) 当力  $F$  通过第一、三象限时，中性轴通过第二、四象限。(2) 中性轴与力  $F$  作用线不垂直，除非  $I_z = I_y$ ，即截面的两个形心主惯性矩相等。工程上常用的正方形和圆形截面梁就是这种情况。

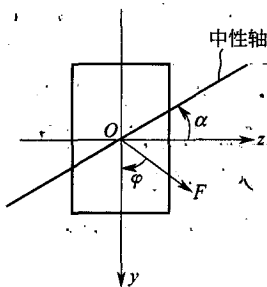


图 11-7

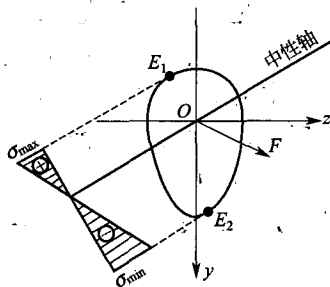


图 11-8

中性轴位置确定后，在截面的周边上作两条与中性轴平行的切线，如图 11-8 所示，切点  $E_1$  和  $E_2$  即为离中性轴最远的点，其应力的绝对值最大，其中一个是最大拉应力  $\sigma_{\max}$ ，一个是最大压应力  $\sigma_{\min}$  (按代数值)。把这两点的  $y, z$  坐标分别代入式(11-2)，即可进行强度计算。

## 二、变 形

斜弯曲的变形计算，其挠度也可看作是两个平面弯曲的挠度叠加。仍以图 11-4 所示的悬臂梁为例，求自由端的挠度  $f$ 。

$y$  方向的挠度  $f_y$  为

$$f_y = \frac{F_y \cdot l^3}{3EI_z} = \frac{F \cos \varphi \cdot l^3}{3EI_z}$$

$z$  方向的挠度  $f_z$  为

$$f_z = \frac{F_z \cdot l^3}{3EI_y} = \frac{F \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_y}$$

则

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad (11-5)$$

设  $f$  与  $y$  轴的夹角为  $\beta$ ，见图 11-10，则有

$$\tan \beta = \frac{f_z}{f_y} = \frac{F \sin \varphi \cdot l^3}{3EI_y} \cdot \frac{3EI_z}{F \cdot \cos \varphi \cdot l^3} = \frac{I_z}{I_y} \tan \varphi \quad (11-6)$$

上式表明，总挠度方向与力  $F$  的方向不一致，即荷载平面与挠曲线平面不重合，见图 11-9 所示。

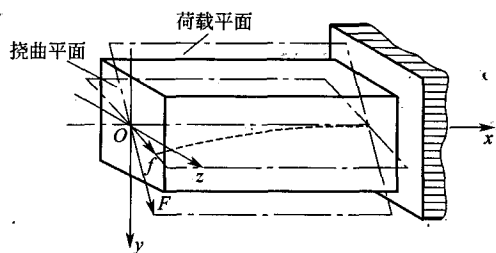


图 11-9

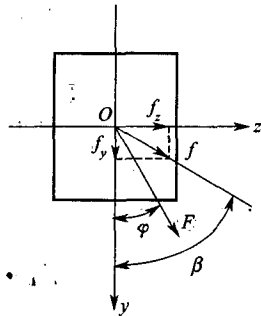


图 11-10

**例 11-1** 如图 11-11 所示, 一工字形简支钢梁, 工字钢型号为 No. 22b, 跨中作用一集中力  $F$ , 已知  $F=30 \text{ kN}$ ,  $\varphi=5^\circ$ ,  $E=2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $l=4 \text{ m}$ ,  $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ , 试进行: (1) 梁的强度校核。 (2) 求最大挠度及其方向。

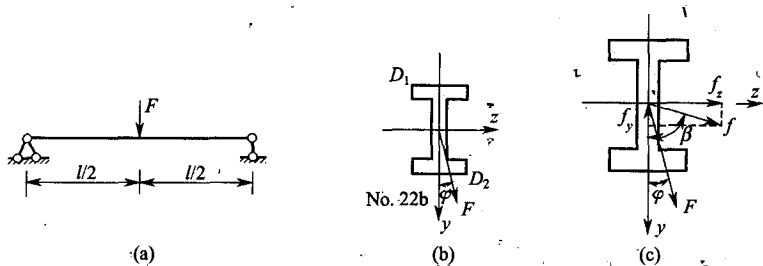


图 11-11

**解** (1) 校核梁的强度

将力  $F$  沿  $z$  轴和  $y$  轴分解, 得

$$F_z = F \sin \varphi = 30 \times \sin 5^\circ = 2.61 \text{ kN}$$

$$F_y = F \cos \varphi = 30 \times \cos 5^\circ = 29.89 \text{ kN}$$

跨中弯矩最大, 分别为

$$M_{z\max} = \frac{1}{4} F_y \cdot l = \frac{1}{4} \times 29.89 \times 4 = 29.89 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{y\max} = \frac{1}{4} F_z \cdot l = \frac{1}{4} \times 2.61 \times 4 = 2.61 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

根据上述两个弯矩的转向, 可知最大应力发生在  $D_1$  和  $D_2$  两点[见图 11-11(b)], 其中  $D_1$  为最大压应力的作用点,  $D_2$  为最大拉应力的作用点, 两点应力的绝对值相等, 所以计算一点即可, 例如计算  $D_2$  点。

查型钢表中 No. 22b 工字钢, 得  $W_z = 325 \text{ cm}^3$ ,  $W_y = 42.7 \text{ cm}^3$ , 则

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} + \frac{M_{y\max}}{W_y} = \frac{29.89 \times 10^6}{325 \times 10^3} + \frac{2.61 \times 10^6}{42.7 \times 10^3} = 153.1 \text{ MPa} < [\sigma] = 160 \text{ MPa}$$

故梁的强度满足要求。

(2) 计算最大挠度  $f_{\max}$  及其方向

查型钢表中 No. 22b 工字钢, 得  $I_z = 3570 \text{ cm}^4$ ,  $I_y = 239 \text{ cm}^4$ , 沿  $z$  轴和  $y$  轴方向的挠度分量分别为

$$f_{z\max} = \frac{F_z \cdot l^3}{48EI_y} = \frac{2.61 \times 10^3 \times 4\,000^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times 239 \times 10^4} = 7.28 \text{ mm}$$

$$f_{y\max} = \frac{F_y \cdot l^3}{48EI_z} = \frac{29.89 \times 10^3 \times 4\,000^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times 3\,570 \times 10^4} = 5.58 \text{ mm}$$

$$f_{\max} = \sqrt{f_{z\max}^2 + f_{y\max}^2} = \sqrt{7.28^2 + 5.58^2} = 9.17 \text{ mm}$$

设  $f_{\max}$  与  $y$  轴的夹角为  $\beta$ , 则

$$\tan \beta = \frac{I_z}{I_y} \tan \varphi = \frac{3\,570}{239} \cdot \tan 5^\circ = 1.307$$

$$\beta = 52.58^\circ$$

(3) 作为比较, 设力  $F$  的方向与  $y$  轴重合, 即发生的是绕  $z$  轴的平面弯曲, 试求此情况下的  $\sigma_{\max}^0$ 、 $f_{\max}^0$

$$\sigma_{\max}^0 = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{F \cdot l}{4W_z} = \frac{30 \times 10^3 \times 4\,000}{4 \times 325 \times 10^3} = 92.31 \text{ MPa}$$

$$f_{\max}^0 = \frac{F \cdot l^3}{48EI_z} = \frac{30 \times 10^3 \times 4\,000^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times 3\,570 \times 10^4} = 5.60 \text{ mm}$$

分别与斜弯曲进行比较, 得

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\max}^0} = \frac{153.1}{92.31} = 1.66$$

$$\frac{f_{\max}}{f_{\max}^0} = \frac{9.17}{5.6} = 1.64$$

从上面比较中发现, 当  $I_z$  比  $I_y$  大得多时, 力的作用方向与主惯性轴稍有偏离, 则  $\sigma_{\max}$  和  $f_{\max}$  就比没有偏离时增大很多, 本例  $F$  仅偏离  $5^\circ$ , 而  $\sigma_{\max}$  与  $f_{\max}$  却增大很多, 所以对于两个主惯性矩相差很大的梁应尽量避免斜弯曲的发生。

**例 11-2** 如图 11-12 所示, 屋面结构中的檩条,  $l=3 \text{ m}$ , 受均载  $q=800 \text{ N/m}$  的作用。檩条采用高宽比为  $h/b=3/2$  的矩形截面,  $[\sigma]=10 \text{ MPa}$ , 容许挠度  $[f]=l/200$ ,  $E=8 \times 10^3 \text{ MPa}$ , 试选择截面尺寸, 并进行刚度校核。

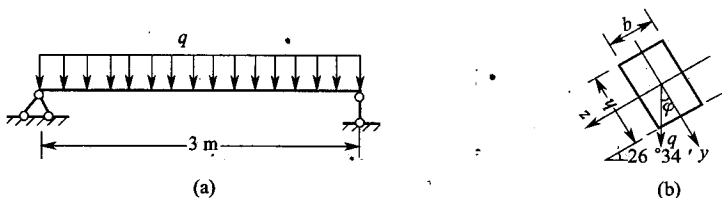


图 11-12

**解** (1) 选择截面尺寸

将  $q$  沿  $z$  轴和  $y$  轴分解, 得

$$q_y = q \cdot \cos \varphi = 800 \times \cos 26^\circ 34' = 715.53 \text{ N/m}$$

$$q_z = q \cdot \sin \varphi = 800 \times \sin 26^\circ 34' = 357.79 \text{ N/m}$$

跨中弯矩最大, 分别为

$$M_{y\max} = \frac{q_z l^2}{8} = \frac{357.79 \times 3^2}{8} = 401.51 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{z\max} = \frac{q_y l^2}{8} = \frac{715.53 \times 3^2}{8} = 804.97 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由于  $W_y = \frac{b^2 h}{6}$ ,  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ ,  $\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b} = \frac{3}{2}$  代入强度公式得

$$\frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

得

$$W_z \geq \frac{\frac{3}{2}M_{y\max} + M_{z\max}}{[\sigma]}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b\left(\frac{3}{2}b\right)^2}{6} = 0.375b^3 \geq \frac{\frac{3}{2}M_{y\max} + M_{z\max}}{[\sigma]} = \frac{\left(\frac{3}{2} \times 402.51 + 804.97\right) \times 10^3}{10}$$

则  $b \geq 72.15 \text{ mm}$ , 取  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $h = 3/2 \times 80 = 120 \text{ mm}$ 。

故取截面为  $80 \text{ mm} \times 120 \text{ mm}$  的矩形。

(2) 刚度校核

根据截面尺寸, 得

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{80 \times 120^3}{12} = 1.152 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{120 \times 80^3}{12} = 5.12 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

最大挠度发生的跨中

$$f_{y\max} = \frac{5q_y l^4}{384EI_z} = \frac{5 \times 715.53 \times 10^{-3} \times 3\,000^4}{384 \times 8 \times 10^3 \times 1.152 \times 10^7} = 8.19 \text{ mm}$$

$$f_{z\max} = \frac{5q_z l^4}{384EI_y} = \frac{5 \times 357.79 \times 10^{-3} \times 3\,000^4}{384 \times 8 \times 10^3 \times 5.12 \times 10^6} = 9.21 \text{ mm}$$

$$\text{则 } f_{\max} = \sqrt{f_{y\max}^2 + f_{z\max}^2} = \sqrt{8.19^2 + 9.21^2} = 12.32 \text{ mm} < [f] = \frac{l}{200} = \frac{3\,000}{200} = 15 \text{ mm}$$

所以, 刚度满足要求。

### 第三节 偏心压缩

当作用在杆件长度方向的外力, 其作用线与杆轴线重合时, 杆的变形为轴向压缩。如果外力的作用线与杆轴线平行但不通过截面的形心时, 杆的变形为偏心压缩。从图 11-13 所示的厂房牛腿柱可知, 偏心压缩是轴向压缩与弯曲的组合变形。偏心压缩包括单向偏心压缩和双向偏心压缩。

如图 11-13(a) 所示, 设一等截面直杆, 截面上的对称轴为  $y$  轴和  $z$  轴, 在顶端截面上作用一偏心荷载  $F$ , 其作用点  $A$  到截面形心  $C$  的距离  $e$  为偏心距, 如果力  $F$  在  $y$ 、 $z$  两个方向都有偏离, 则称为双向偏心压缩。如果力  $F$  只在  $y$  (或  $z$ ) 一个方向上有偏离, 即力  $F$  作用在  $y$  (或  $z$ ) 轴上, 称为单向偏心压缩, 见图 11-13(b) 所示。

下面就这两种情况分别加以讨论。

#### 一、单向偏心

设力  $F$  在  $y$  轴上有偏离, 偏心距为  $e_y$ , 见图 11-14(a) 所示, 根据力的平移定理, 可将力  $F$  向截面形心  $C$  点平移, 平移结果为一个力和一个力偶, 见图 11-14(b) 所示, 杆件发生轴向压缩

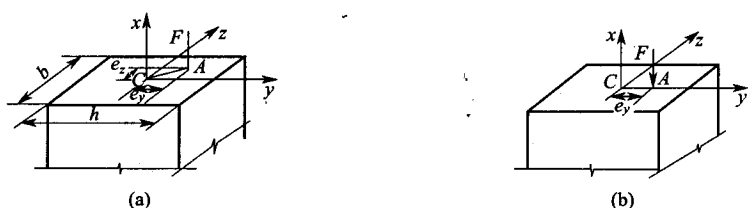


图 11-13

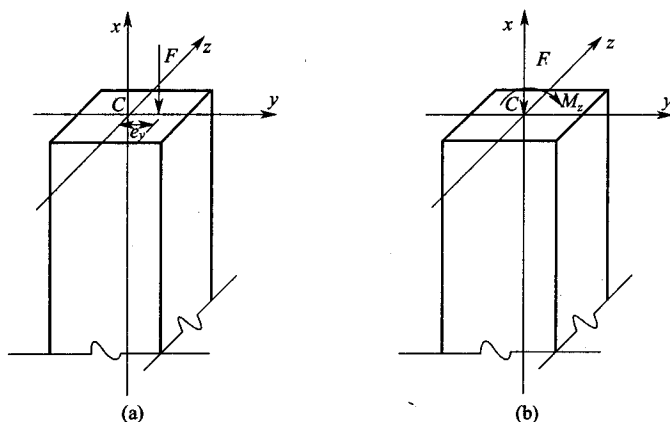


图 11-14

和弯曲的组合变形,则横截面上任意一点的正应力为这两种变形的叠加,即

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y \quad (11-7)$$

正负号根据杆件变形的情况来判断。从公式(11-7)看出,  $\sigma_{\max}$  发生在杆件的边缘,即当  $y$  达最大值时,则单向偏心压缩的最大拉应力  $\sigma_{\max}^+$  和最大压应力  $\sigma_{\max}^-$  为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^+ &= -\frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} \\ \sigma_{\max}^- &= -\frac{F}{A} - \frac{M_z}{W_z} \end{aligned} \quad (11-8)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

选取其中绝对值最大的应力作为强度计算的依据,则单向偏心压缩的强度条件为

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{F}{A} - \frac{M_{z\max}}{W_z} \right| \leq [\sigma] \quad (11-9)$$

**例 11-3** 如图 11-15(a) 所示,一矩形截面混凝土柱,受偏心力  $F$  的作用,力  $F$  作用在  $y$  轴  $A$  点上,偏心距为  $e_y = 50 \text{ mm}$ ,  $F = 100 \text{ kN}$ ,截面尺寸  $b = 200 \text{ mm}$ ,  $h = 120 \text{ mm}$ ,求任一截面  $m-n$  上的最大应力。

**解** 将力  $F$  向柱子轴线平移,得

$$F = 100 \text{ kN}, M_z = F \cdot e_y = 100 \times 0.05 = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在杆件横截面的左、右边缘分别发生最大拉应力  $\sigma_{\max}^+$  和最大压应力  $\sigma_{\max}^-$ ,根据公式(11-8),其值分别为

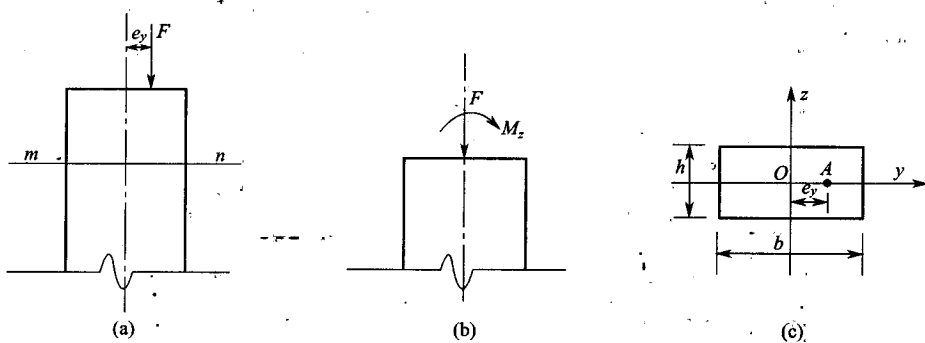


图 11-15

$$\sigma_{\max}^+ = -\frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -\frac{100 \times 10^3}{200 \times 120} + \frac{5 \times 10^6}{\frac{120 \times 200^2}{6}} = 2.08 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = -\frac{F}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{100 \times 10^3}{200 \times 120} - \frac{5 \times 10^6}{\frac{120 \times 200^2}{6}} = -10.42 \text{ MPa}$$

**例 11-4** 见图 11-16 所示, 厂房的牛腿柱, 由屋架和吊车梁传来的力分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 已知  $F_1 = 100 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 45 \text{ kN}$ ,  $e = 0.2 \text{ m}$ ,  $b = 200 \text{ mm}$ , 求: (1) 若  $h = 300 \text{ mm}$ , 则柱上的最大拉应力和最大压应力各为多大? (2) 要使柱截面内不出现拉应力,  $h$  应为多大? 此时最大压应力为多大?

**解** (1) 将力  $F_2$  向  $F_1$  处平移, 平移的结果为力  $F$  和力偶  $M_z$ , 则

$$F = F_1 + F_2 = 145 \text{ kN}, M_z = F_2 \cdot e = 45 \times 0.2 = 9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

最大拉、压应力发生在柱子的左、右边缘, 则

$$\sigma_{\max}^+ = -\frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -\frac{145 \times 10^3}{200 \times 300} + \frac{9 \times 10^6}{\frac{200 \times 300^2}{6}} = 0.58 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^- = -\frac{F}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{145 \times 10^3}{200 \times 300} - \frac{9 \times 10^6}{\frac{200 \times 300^2}{6}} = -5.42 \text{ MPa}$$

(2) 若截面上不出现拉应力, 则  $\sigma_{\max}^+ \leq 0$ , 即

$$\sigma_{\max}^+ = -\frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} \leq 0$$

$$-\frac{145 \times 10^3}{200 \times h} + \frac{9 \times 10^6}{\frac{200 \times h^2}{6}} \leq 0$$

$h \geq 372 \text{ mm}$ , 取  $h = 380 \text{ mm}$ , 此时最大压应力为

$$\sigma_{\max}^- = -\frac{F}{A} - \frac{M_z}{W_z} = -\frac{145 \times 10^3}{200 \times 380} - \frac{9 \times 10^6}{\frac{200 \times 380^2}{6}} = -3.78 \text{ MPa}$$

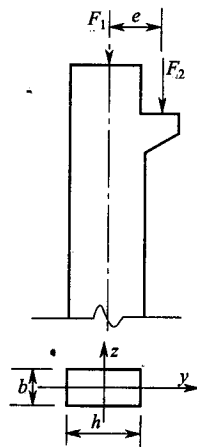


图 11-16

## 二、双向偏心

如图 11-17(a) 所示的偏心受压柱, 力  $F$  的作用点  $E$  与截面形心  $O$  之间有一个偏心距  $e$ , 这时力  $F$  对两个对称轴  $y$ 、 $z$  都有偏离, 为双向偏心压缩。先将  $F$  向  $y$  轴上的点  $(e_y, 0)$  进行平

移,再向形心(0,0)平移,平移结果为作用在形心的压力  $F$  及作用在  $xOy$  平面和  $xOz$  平面的两个力偶  $M_z$  及  $M_y$ ,见图 11-17(b)所示,这样,双向偏心压缩变形就化为轴向压缩与双向弯曲的组合变形。

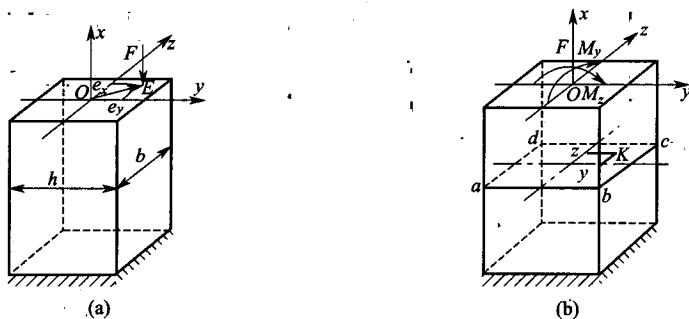


图 11-17

$M_y = F \cdot e_z, M_z = F \cdot e_y$ , 它们引起的正应力分别为

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \sigma_y = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

由力  $F$  引起的正应力为

$$\sigma = -\frac{F}{A}$$

将上述正应力进行叠加就得到横截面上任意一点的正应力为

$$\sigma = -\frac{F}{A} \pm \frac{M_z}{I_z} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (11-10)$$

正负号根据杆件实际变形的情况来判断。与单向偏心受压分析相同,双向偏心压缩的最大拉应力  $\sigma_{\max}^+$  和最大压应力  $\sigma_{\max}^-$  为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^+ &= -\frac{F}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \\ \sigma_{\max}^- &= -\frac{F}{A} - \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} \end{aligned} \quad (11-11)$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}, W_y = \frac{I_y}{z_{\max}}$$

选取其中绝对值最大的应力作为强度计算的依据,则双向偏心压缩的强度条件为

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{F}{A} - \frac{M_z}{W_z} - \frac{M_y}{W_y} \right| \leq [\sigma] \quad (11-12)$$

### 三、截面核心

偏心压缩时,横截面上以中性轴为界划分为受拉区和受压区。如果偏心压力的偏心距较小时,相应的偏心弯矩也较小,从而使由弯矩引起的应力  $|\sigma_m|$  小于轴向压力引起的应力  $|\sigma_N|$ ,则横截面上只会有压应力而无拉应力。

在工程上有不少材料的抗拉性能较差而抗压性能较好且价格便宜,如砖、石材、混凝土、铸铁等,这类构件材料的抗拉强度远低于抗压强度,主要用于承压,故在使用时要求在整个横截面上只有压应力而无拉应力,这就限制了偏心压力的作用范围,这个作用范围就是截面核心。

则截面核心是指包含截面形心在内的一个区域,当压力作用在该区域时,截面上就只产生压应力。

图 11-18 所示的一边长为  $b$  和  $h$  的矩形截面,确定其截面核心方法是:

(1) 先设偏心压力  $F$  作用在  $y$  轴上距原点  $O$  为  $e_1$  位置处,根据截面核心概念,则有  $|\sigma_m| \leq |\sigma_N|$ ,即

$$\frac{M_z}{W_z} \leq \frac{F}{A}$$

式中

$$M_z = F \cdot e_1, W_z = \frac{1}{6} \cdot h \cdot b^2, A = bh$$

整理后,得

$$e_1 \leq \frac{b}{6}$$

(2) 若将偏心压力作用在  $z$  轴上距原点  $O$  为  $e_2$  位置处,同理得

$$e_2 \leq \frac{h}{6}$$

(3) 若将偏心压力  $F$  作用在截面上任意一点,则不难推出当偏心压力作用位置位于图 11-18 所示的菱形阴影部分时,截面上的应力全部为压应力,故矩形截面的截面核心即为图 11-18 所示的菱形阴影部分。

同理可证明圆形截面的截面核心是圆心不变直径为原来直径  $1/4$  的圆形,见图 11-19 所示。

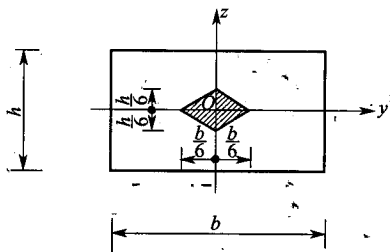


图 11-18

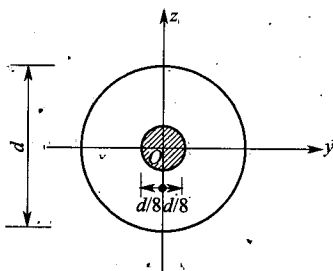


图 11-19

### 思考题

11-1 试述组合变形的特点。并举例说明常见的组合变形。

11-2 构件发生组合变形时依据什么原理计算强度?

11-3 构件发生组合变形,应用叠加法计算时需符合什么条件?

11-4 斜弯曲杆件危险点处于:

(1) 双向应力状态; (2) 纯剪切应力状态;

(3) 多向应力状态; (4) 单向应力状态。

11-5 对条件相同的工程结构的构件,偏心拉伸与偏心压缩各有什么利弊?

11-6 见图 11-20 所示,若在正方形横截面短柱的中间开一槽,使

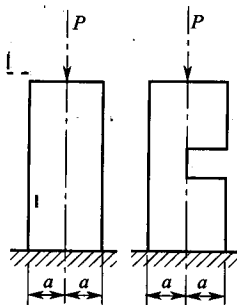


图 11-20