



自然科学是什么

顾问

李政道 叶铭汉 许智宏

胡作玄 著

数学是什么

What is Mathematics



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

《未名·自然科学是什么》丛书

数学是什么

胡作玄 著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学是什么/胡作玄著. —北京:北京大学出版社,2008.6
(未名·自然科学是什么)
ISBN 978-7-301-13923-3

I. 数… II. 胡… III. 数学-普及读物 IV. O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第084943号

书 名: 数学是什么

著作责任者: 胡作玄 著

策划编辑: 杨书澜

责任编辑: 孙琰 舒岚

标准书号: ISBN 978-7-301-13923-3/O·0756

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路205号 100871

网 址: <http://www.pup.cn> 电子邮箱: weidf02@sina.com

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750673

出版部 62754962

印 刷 者: 世界知识印刷厂

经 销 者: 新华书店

890毫米×1240毫米 A5 13印张 192千字

2008年6月第1版 2008年6月第1次印刷

定 价: 27.00元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话:010-62752024 电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

普及自然科学

提高科学文明

中石



总 序

许智彦

人类的生存和发展历史就是一部了解自然,适应自然,进而改造自然的历史。远古时代,人类对强大的自然力量感到不知所措,对雷电、风暴、地震、火山爆发、瘟疫、彗星等自然现象怀着畏惧和崇敬的心情,以为雷电是上天惩罚恶人的神火,彗星预示着战乱、饥荒等灾难的来临。进而,远古人类将大自然加以神化,于是便产生了自然崇拜,成为原始宗教最早的表现形式之一,反映了人类当时对自然的无知。经过长期的生存斗争和不断的总结,人类逐步积累了对自然现象的认识,并进一步对自然现象认真地进行观察、记录、研究,整理概括出一些线索,发现了很多现象之间的因果关系和规律,而且能够根据这些规律再去推断其他的现象。这样,人们对各种自然现象的认识,逐渐丰富和深入,遂发展成为系统的认识。这些建立在实践和事实基础上的对自然现象及其规律的系统认识,就形成了我们所说的自

然科学。

我是搞植物学研究的,对整个自然科学的发展和影响也只能说有一点点了解。地球的年龄大约为 46 亿年,在这漫长的历史时空里,自然给予世界的既有丰富的物质资源,也有灾难甚至是灭亡。旱灾、洪涝、台风、海啸、地震、火山爆发、泥石流、传染病、农林病虫害等每年都在世界一定的范围内造成不同程度的破坏。1976 年我国唐山发生的 7.8 级地震,使上百万人口的工业重镇顷刻间成为一片废墟。2004 年印度洋海啸波及包括印度尼西亚在内的十多个国家和地区,造成近 30 万人离我们而去。艾滋病自 1981 年在美国首次发现以来,全世界已有超过 2 500 万人被与艾滋病有关的疾病夺去生命。我们更不会忘记 2003 年罕见高死亡率的 SARS 给中国乃至世界人民带来的恐慌。凡此种种,自然向人类发起了一次又一次的挑战。

多少年来,人类不惜牺牲生命去探索自然的奥秘,在与自然的斗争中逐渐获得了主动,推进了物质文明和精神文明的建设。对风暴、地震等自然现象,人们不仅能够解释,而且在一定范围内还可以作出预报和防范,将它们造成的损害减小到最低限度。通过对药物、医疗手段的研究和改进,人类有效地改善了自身的健康状况、延长了寿命,世界人口死亡率也不断呈下降趋势。核能技术、计算机技术、航天技术、生物技术、纳米和新材料技术、激光技术、光电技术、环境科学技术、新能源科学技术不断被开发,并应用于现实世界当中,为人类的生活提供了越来越多的便

利。现在,以自然科学为基础的现代化技术已经成为社会先进生产力的标志,引导着生产力的发展方向,开辟着生产发展的新领域。邓小平同志在总结科学技术这一发展趋势时深刻指出:“现代科学为生产技术的进步开辟道路,决定它的发展方向。许多新的生产工具,新的工艺,首先在科学实验室里被创造出来。”大量历史事实证明:理论研究一旦获得重大突破,将会给生产和技术带来极其巨大的进步。

自然科学理论与技术的创新,不仅推动了社会的发展,改善了人们的生活,更深刻影响着世界政治和经济的格局。18世纪的工业革命逐渐确立了资本主义对世界的统治,形成东方从属于西方的局面。19世纪70年代的第二次工业革命,重新划分了国际关系格局。20世纪40年代特别是七八十年代以来,世界正经历着一场以信息技术为代表的新的技术革命,人类开始全球化进程。今天,科学技术的竞争成为国际竞争的制高点,拥有先进的科学技术,就能在国际政治经济竞争中处于主导地位。我们鼓励科技创新,就必须普及自然科学知识,从基础做起,促成一种追问自然、加快创新的求知氛围,使对自然科学的好奇和追求成为科学创造的核心力量,推动人们不懈地探索宇宙的奥秘,发现自然的规律,取得更多有现实指导意义的创造性成果。

自然科学还是“真”与“美”的和谐统一。一种科学理论成果,如果揭示了自然界的规律,反映了自然界的和谐,它就不仅是“真”的,而且是“美”的,科学研究的最高境界便是这种真与

|| 自然科学是什么 ||

美的结合。在科学史上,欧几里德的几何学,爱因斯坦的相对论,普朗克的量子论等就被人们称为“科学的艺术品”。另外,追求科学、尊重科学、实事求是的科学态度以及客观精神、理性精神、实证精神也是人们在从事科学研究中真与美的表现。

今天,我们的社会在快速发展的同时仍被很多难题困扰,比如温室效应、臭氧空洞、环境破坏、艾滋病蔓延,等等。如何走可持续发展道路不仅是一个国家或地区要面对的,而且是整个世界,尤其是青年朋友们都应该关心的。解决这些难题,需要我们对自然科学有更为深入的学习和思考,在理论上有所创新,对科学现象和规律进行不断探索,在技术上不断改进。

很多自然科学方面的知识也许会让觉得高深莫测,但它确是与我们联系最紧密,影响最深远的知识,我们需要从多方面、多角度了解这些知识。北京大学拥有百年的基础科学教育和研究的历史,一大批杰出的科学家曾在或正在这里学习和工作,既有邓稼先、于敏等“两弹一星”元勋,也有黄昆、王选等“国家最高科学技术奖”获得者,他们为中国乃至世界范围内的理论创新、科技发展、社会进步都作出了重要贡献。北京大学继出版《人文社会科学是什么》丛书后推出这套《自然科学是什么》丛书,深入浅出地介绍了自然科学领域的知识,为大、中学生展示了一个五彩缤纷的自然科学世界。相信这套书的出版会对提高中华民族的科学素养、普及自然科学知识起重大的推动作用。

目 录

导言 数学是什么?	1
0.1 数学与哲学	4
0.2 数学与科学	8
0.3 数学与艺术	13
一 数	21
1.1 自然数的难题	26
1.2 初等数论及其问题	33
1.3 高斯的启发	40
1.4 数列中的问题	45
1.5 自然数的加法表示	50
小结	55
二 量	57
2.1 自然数的有理扩张	62
2.2 从离散到连续	69

2.3	第二次划分	76
	小结	81
三	图	83
3.1	初等图论	87
3.2	图论三大问题	103
3.3	拉姆齐理论	126
	小结	131
四	形	133
4.1	几何学是什么	136
4.2	欧几里得几何学	144
4.3	非欧几何学	151
4.4	解析几何学	157
4.5	丰富多彩的直观几何对象	159
	小结	168
五	算	171
5.1	从算术到代数	176
5.2	算术:从有限到无穷	178
5.3	从代数到分析	183
5.4	从多项式到一般函数	186
5.5	函数	189

What is mathematics?

小结	196
六 集合	199
6.1 无穷	202
6.2 从素朴集合论到公理集合论	209
6.3 病态的集合	220
小结	223
七 逻辑	225
7.1 数学基础	229
7.2 几何学基础和公理理论	231
7.3 希尔伯特计划	233
7.4 哥德尔不完全性定理	237
小结	239
八 结构	243
8.1 多头的数学家——布尔巴基	247
8.2 布尔巴基的思想	257
8.3 域	265
8.4 群	268
小结	273
九 空间	275
9.1 空间概念的演化	279

9.2	维数	284
9.3	流形	290
9.4	什么是拓扑学	293
9.5	庞加莱猜想	295
	小结	301
十	概率	303
10.1	赌场产生的问题	308
10.2	概率的哲学本质	311
10.3	布朗运动	316
10.4	随机分析	326
	小结	328
十一	数学大厦	331
11.1	经典数学	336
11.2	现代数学	348
11.3	后现代数学	355
	小结	363
十二	理解数学	365
12.1	基础教育中的数学	370
12.2	数学家的工作	379

|| 数学是什么 ||

12.3 伟大的数学家创造伟大的数学	382
小结	385
结束语 数学是什么!	389
阅读书目	396
后记	400
《自然科学是什么》丛书出版后记	402

导言

数学是什么？

基尔凯郭尔 (Soren Kierkegaard, 1813—1855) 有一次说过, 宗教讨论的是那些无条件关涉人的问题。与此对比 (也具有同样的夸张), 我们可以说, 数学所讨论的事物是完全不牵涉到人的。数学有着星光那种非人的特性, 明亮清晰但却冷漠。但是, 似乎是造物的嘲弄, 对于离开人的存在中心越远的事物, 人的心智就越能更好地处理它。因此, 对于那些与人最不相干的知识, 像数学知识, 特别是数论知识, 我们是最聪明的。

赫尔曼·外尔

(Hermann Weyl, 1885—1955)



科学

赫尔曼·外尔 20 世纪中期最伟大的数学家。对于整个的数学领域,他都具有广博而精深的研究,特别对于黎曼曲面、李群表示、联络理论、数论和群论等分支,他都具有开拓性的贡献。他是物理学两大领域——规范场理论以及群论在量子力学中的应用的先驱。外尔的哲学素养在科学家中更是首屈一指,他仔细阅读中世纪神秘主义哲学家埃克哈特(Eckhart, 1260—1327/28)的著作,还著有数学哲学及科学哲学的专著。布尔巴基学派创始人韦伊(Andre Weil, 1906—1998)和谢瓦莱(Claude Chevalley, 1909—1984)深刻地指出,正是外尔完成了从经典数学(以实数为主)到现代数学(以结构为主)的转变。

当我们对许多常见又常用的概念谈不清、道不明的时候，就会像瞎子摸象那样，去探索它的方方面面，然后拼凑出一个图案，乃至一个理论、一个学科，这样出现了美学、文化学（或文化研究乃至文化科学）、道德科学、伦理学、宗教学。这些学科的主要目标之一就是要搞清楚它的主要对象到底是什么？随着时间的推移，我们的认识也许有着不同程度的改进。

数学则恰恰相反，数学的对象，比如说数（1, 2, 3, …）和形（三角形、圆等），大家都清楚，其他数学概念的定义虽然更复杂、更难懂，但都很清楚、确切，只是研究它们的数学是什么？还是不太清楚。原因何在，数学的对象不仅在我们的现实当中，更多是处于柏拉图的理想世界当中，处于可能性世界当中，处于虚拟世界当中，它的范围要比我们看得见摸得着的经验世界远远宏大。数学实际上是一门“万学

之学”。

也许哲学更应该享有这种伟大的称号,在历史进程中也的确如此。由于基础教育的普及,现代人对数学的确有了初步的了解,然而却不知哲学甚至逻辑学为何物,因为从来没有开过这些课(也许法国、德国等少数国家是例外)。这样,到了大学选修哲学时,觉得听起来就像数学。这的确显示出哲学与数学有某种亲缘关系,不过,现在恐怕很少人把数学同哲学混为一谈。另一方面,更多的人把数学当成自然科学,而自然科学无非就是研究自然界的对象,那么研究人工制造的计算机和由数学衍生出的计算机科学算不算自然科学呢?或许数学是介乎哲学与科学中的知识领域。随着科学的人文关系日益密切,也有少数人提到数学的艺术特征。因此为了搞清楚数学是什么,不妨了解一下数学不是什么,首先是数学与哲学,数学与科学,数学与艺术,到底有哪些相同之处,有哪些不同之处。

What is mathematics?

0.1 数学与哲学

必须看到哲学与数学的对象虽然归根结底都来自我们周边的现实世界,但是,现在研究的对象都是抽象化、概念