高等学校教材

王希云 主编

# 线性代数

（第 2 版）

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

兵器工業出版社

高等学校教材

# 线性代数

## （第2版）

王希云　主编

兵器工业出版社

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了线性代数的基本概念和理论。全书共7章，内容包括：行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等内容。书末附录中还介绍了MATLAB和线性代数的发展简史，并汇编了2003年以来全国硕士研究生入学统一考试中线性代数部分试题。

本书内容丰富，阐述深入浅出，简明扼要。可作为高等院校非数学类专业的本科教材或教学参考书及考研复习用书。

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数/王希云主编．—2版．—北京：兵器工业出版社，2007.7

ISBN 978-7-80172-885-2

Ⅰ．线… Ⅱ．王… Ⅲ．线性代数—高等学校—教材 Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第087656号

| | |
|---|---|
| 出版发行：兵器工业出版社 | 责任编辑：常小虹 |
| 发行电话：010-68962596，68962591 | 封面设计：李　晖 |
| 邮　　编：100089 | 责任校对：郭　芳 |
| 社　　址：北京市海淀区车道沟10号 | 责任印制：赵春云 |
| 经　　销：各地新华书店 | 开　　本：787×1092　1/16 |
| 印　　刷：北京市登峰印刷厂 | 印　　张：17.25 |
| 版　　次：2007年7月第2版第1次印刷 | 字　　数：335千字 |
| 印　　数：1—6650 | 定　　价：26.00元 |

# 再版前言

线性代数是高等学校理工科专业的一门重要基础课程。在自然科学、工程技术和管理科学等诸多领域有着较大的应用。本书是根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求和全国硕士研究生入学数学考试大纲有关部分的规定内容编写的。编者结合多年来从事线性代数课程教学的体会，在《线性代数》（第 1 版）的基础上编写了这本书。在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法，内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂。根据非数学专业学生使用的需要，以线性变换作为贯穿全书的主线，一方面让线性方法得以充分体现，同时也有利于学生理解线性代数课程的基本概念和基本原理。在概念的引入、理论分析和例题演算等环节上尽可能多地反映代数与实际结合的思想，这样可以使学生从实际背景中理解代数概念的来龙去脉，并获得解决问题的启示。本书重视例题和习题的设计和选配，除了在每一节后选配巩固课程内容的基本习题外，每章结束后还选配了总练习题。为了便于学生牢固掌握每章的内容，在每章结束后都给出了该章的基本要求及主要内容。

全书共分 7 章，既紧密联系又相对独立。系统地介绍了行列式、矩阵、向量空间、线性方程组的基础知识，论述了方阵的特征值与特征向量、方阵的对角化和实二次型的化简等问题，讨论了线性空间与线性变换的相关内容。根据现行研究生入学考试大纲，从内容上看，本书的前 6 章覆盖了数学一和数学三的考试要求，本书的前 5 章覆盖了数学二和数学四的考试要求。

本书正文的基本内容及教材的体系框架和章节安排基本上与《线性代数》（第 1 版）一致，保留了原书的风格。第 2 版的变化主要有以下几点：

1. 改变了部分内容的阐述。正文有些部分（如矩阵概念的引入、向量的线性相关性等）的阐述更为精练和通俗易懂。

2. 对例题和习题的配置作了一些调整和充实。与《线性代数》（第 1 版）的题目相比，第 2 版的例题和习题更丰富，题型也更多样，更能启迪读者运用基本概念、基本理论和基本方法去分析、解决各种具体问题。

3. 增加了部分内容。

（1）鉴于信息技术的飞速发展及软件的广泛应用，本书在附录1中对MATLAB做了简要介绍。为了提高读者数值计算和应用计算机的能力，并通过实际计算加深对所学内容的理解，各章（除第7章外）都给出了用MATLAB进行数值实验的习题。

（2）为了培养学生学习本门课程的兴趣，本书在附录2中介绍了线性代数的发展简史。

（3）为了使有志于攻读硕士研究生的读者能在学习过程中就作适当准备，且使所有读者具体理解线性代数课程的基本要求和重点，本书在附录3中汇编了2003年以来硕士研究生入学考试中线性代数试题。

本书由王希云同志任主编，第1章由王希云同志编写，第2、3章、附录及所有数值实验题由陈培军同志编写，第4、5、6章由赵文彬同志编写，第7章由董安强同志编写。

本书在编写过程中得到了兵器工业出版社、太原科技大学有关领导及太原科技大学印刷厂同志们的大力支持，太原科技大学数学系的老师们对本书提出了许多建设性的意见。编者在此向他们表示衷心的感谢！由于时间仓促，加之编者水平有限，书中内容、体系、结构不当甚至错误在所难免，恳请读者和使用本教材的老师不吝赐教，多多指正。

**编　者**

**2007年5月**

# 前　言

本书是庆祝“太原重型机械学院”更名为“太原科技大学”的学术系列丛书中的一册。

线性代数是高等工科院校各类专业的一门重要基础理论课，是学习和掌握其他数学学科及科学技术的基础。它的内容广泛存在于工程和科学技术的各个领域。随着计算机的日益普及，线性代数的理论和方法已成为工程技术人员不可缺少的工具。为了满足高等学校教学及各类工程技术人员工作的需要，我们特编写了这本《线性代数》。

本书以高等学校工科类本科学校《线性代数课程教学基本要求》为依据，参照工科部分专业的教学大纲和硕士研究生入学考试大纲，结合编者多年的教学实践而编写。我们力图使内容系统，叙述通俗，论证严谨；注重启发思维，培养能力；突出基本概念，基本理论与基本方法。本书可作为各工科院校本科生的教材或教学参考书，也可供报考工科硕士研究生及工程技术人员参考。考虑到各类专业与各类人员的不同要求，我们将部分内容注记“ * ”。如选用本书作为教材可根据具体情况加以取舍。

本书共分七章：行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换。为了便于读者牢固地掌握每章内容，在每一节后都安排了适量的基本习题；每章结束后，都有本章基本要求、小结及总复习题，并在书末给出了习题的参考答案。附录还给出了部分计算机程序。

本书在编写与出版过程中得到了太原科技大学有关领导及太原科技大学印刷厂同志们的大力支持，我们在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正。

**编　者**

**2005 年 1 月**

# 目　　录

# 第1章　行　列　式

行列式是一种重要的数学工具，是由人们求解线性方程组的需要而产生的．它不仅在数学中有广泛的应用，而且在物理学、力学等其他学科的研究中也经常用到．特别是在本门课程中，它是研究后面的线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具．

本章主要介绍 $n$ 阶行列式的定义、性质及计算方法，并介绍用 $n$ 阶行列式求 $n$ 元线性方程组的克莱姆法则．

## 1.1　$n$ 阶行列式的定义

### 1.1.1　$n$ 阶行列式的引入

行列式的概念是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出来的(一次方程组也称为线性方程组)，例如对于一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法求解，得其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

在式(1.2)中，其各自的分母由方程组(1.1)中未知数的系数构成，把这4个系数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成两行两列(横排称行，竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**2阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

其中 $a_{ij}(i, j=1, 2)$称为2阶行列式的**元素**．元素 $a_{ij}$的第一个下标 $i$ 称为**行标**，表明该元素位于第 $i$ 行；第二个下标 $j$ 称为**列标**，表明该元素位于第 $j$ 列．

上述二阶行列式的定义，可用**对角线法则**来记忆．如图 1.1，把 $a_{11}$到 $a_{22}$的实连线称为**主对角线**，$a_{12}$到 $a_{21}$的虚连线称为**副对角线**．于是2阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差．

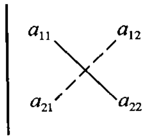


图 1.1

利用2阶行列式的概念，式(1.2)的分子也可以写成2阶行列式，即

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则式(1.2)可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

上式为二元一次线性方程组(1.1)的求解公式，其中 $D$ 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式，称 $D$ 为方程组的**系数行列式**．$x_1$ 的分子 $D_1$ 是用常数项 $b_1$，$b_2$ 替换 $D$ 中 $x_1$ 的系数 $a_{11}$，$a_{21}$所得的2阶行列式．$x_2$ 的分子 $D_2$ 是用常数项 $b_1$，$b_2$ 替换 $D$ 中 $x_2$ 的系数 $a_{12}$，$a_{22}$所得的2阶行列式．

**例 1**　求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

**解**　由于 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-4) = 5 \neq 0$

所以方程组有解，而

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-2) = 5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5$$

因此方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -1$$

类似地，对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示的代数和式为

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

上述3阶行列式的定义可按图1.2的**对角线法则**来记忆．其遵循的规律为：三条实线看作是平行于主对角线的连线，实线上连接的三个元素的乘积取正号；三条虚线看作是平行于副对角线的连线，虚线上连接的三个元素的乘积取负号；然后取这六项之和即为3阶行列式．

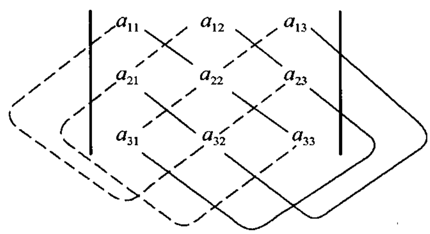


图1.2

若令

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

可用对角线法则计算出 $D_1$，$D_2$，$D_3$ 的值，当系数行列式 $D \neq 0$ 时，方程组(1.4)的求解公式为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad , \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{1.5}$$

**例2**　计算3阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

**解**　按照对角线法则，得

$$D=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8-2\times(-1)\times8-\\0\times1\times3-1\times(-4)\times(-1)\\=-24+8+16-4=-4$$

请读者注意，对角线法则仅适用于2阶与3阶行列式，为了研究4阶及高阶行列式的计算，下面先介绍排列的有关知识，然后引出 $n$ 阶行列式的概念.

### 1.1.2 全排列及其逆序数

把 $n$ 个不同的元素排成一列，称为这 $n$ 个元素的**全排列**(也简称**排列**). $n$ 个不同元素的所有排列的种数，通常用 $P_n$ 表示.

**例3** 写出元素1，2，3的所有全排列.

**解** 三个元素1，2，3的全排列的种数 $P_3=3!=6$，其全排列依次为123，132，213，231，312，321.

在上面的全排列中，除了123是按自然顺序排列以外，其他排列中都可找到一个大数排在一个小数前面的情况，这样的排列顺序与自然顺序相反. 例如，排列132中，3排在2的前面；在排列321中，2排在1的前面，3排在1和2的前面. 一般地，在一个排列中，若一个大数排在一个小数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. 在一个排列里出现的逆序总数称为排列的**逆序数**. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**. 排列的奇偶性是定义 $n$ 阶行列式的基础，为了方便，引进一个符号：如果 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是一个 $n$ 元排列，把它的逆序数记作 $\sigma(j_1 j_2\cdots j_n)$.

**例4** 确定排列4321和1324以及 $n(n-1)\cdots21$ 的奇偶性.

**解** 在排列4321中，因2在1之前构成一个逆序，3在1，2之前构成两个逆序，4在1，2，3之前构成三个逆序，此排列的逆序数 $\sigma(4321)=1+2+3=6$，所以排列4321是偶排列.

在排列1324中，因3在2之前构成一个逆序，此排列的逆序数 $\sigma(1324)=1$，所以排列1324是奇排列.

在排列 $n(n-1)\cdots21$ 中，因2在1之前构成一个逆序，3在1，2前构成两个逆序，…，$n$ 在 $n-1$，…，2，1之前构成 $n-1$ 个逆序，所以

$$\sigma(n(n-1)\cdots21)=1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$$

当 $n=4k$ 或者 $n=4k+1$ 时，它是偶排列；而当 $n=4k+2$ 或者 $n=4k+3$ 时，它是奇排列，其中 $k$ 为自然数.

在排列中，把任意两个数字互换位置，而其他数字不动，这种做出新排列的手

续称为**对换**. **一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性**. 在这里我们不证明这个性质，仅用例子说明它，如在例 2 中排列 4321 是偶排列，4 与 1 对换得排列 1324，它是奇排列.

### 1.1.3　$n$ 阶行列式的定义

为了给出 $n$ 阶行列式的定义，先来研究 3 阶行列式的结构.

根据三阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.6}$$

容易看出:

(1) (1.6)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行，不同的列. 因此，(1.6)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$. 这里第一个下标(行标)排成自然顺序 123，而第二个下标(列标)排成 $j_1 j_2 j_3$，它们是 1，2，3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 6 种，而对应(1.6)式右端恰含 6 项.

(2) 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是: 123，231，312;

带负号的三项列标排列是: 132，213，321.

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列，因此各项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$所带的正负号可以表示为$(-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)}$.

经过上述分析可知，3 阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和.

仿此，可以把行列式推广到一般情形.

**定义 1.1**　设有 $n^2$ 个数，排成 $n$ 行 $n$ 列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中 $a_{ij}(i, j=1, 2,\cdots, n)$ 表示第 $i$ 行第 $j$ 列的元素，仍然规定横排为行，竖排为列．作出表中位于不同行与不同列的 $n$ 个数的乘积，并冠以正负号．这种乘积的一般项可以写成如下形式

$$(-1)^{\sigma(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

其中 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是 1，2，⋯，$n$ 的一个排列，由于这样的排列共有 $n$！个，因而形如(1.7)的项共有 $n$！项．所有这 $n$！项的和

$$\sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为 ***n* 阶行列式**，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

简记作 $\det(a_{ij})$，即 $\det(a_{ij}) = \sum (-1)^{\sigma(j_1 j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

利用对换的性质还可证明 $n$ 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\sigma(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

简言之，行列式等于不同行不同列的 $n$ 个元素乘积的代数和．显然，$n$ 阶行列式是 2 阶、3 阶行列式的推广．特别地，当 $n=1$ 时，1 阶行列式 $|a|$ 就是数 $a$.

一般来说，直接用定义计算行列式，工作量是比较大的．因为当 $n$ 较大时，$n$！增加很快．如 4！ =24，5！ =120，⋯．要写出这 $n$！项是很不容易的，况且还要逐个地用排列的奇偶性确定其正负号，只有对一些特殊的行列式用定义来计算是比较简单的．

**例 5**　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

**解**　根据定义 1.1，$D$ 是 4！ =24 项取自不同行不同列的 4 个元素乘积的代数和．然而，在这个行列式里，除了 $acfh$，$adeh$，$bdeg$，$bcfg$ 这 4 项外，其余项均含有

零因子，因而等于零．与上面4项对应的列标的排列依次是1234，1324，4321，4231．其中第一个和第三个是偶排列，第二个和第四个是奇排列．因此

$$D = acfh - adeh + bdeg - bcfg$$

**例6**　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**解**　由于第一列除了$a_{11}$之外其他元素都为0，于是要得非零项，第一列必须选$a_{11}$．而第二列不能选$a_{12}$，因为一行中只能选一个元素，所以第二列只能选$a_{22}$．同理第三列只能选$a_{33}$,…，第$n$列只能选$a_{nn}$．这样该行列式仅有唯一可能的非零项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，由于该项的行标与列标都是按自然顺序排列的，因此$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$．

这样的行列式称为**上三角形行列式**，它等于主对角线(行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**)上元素的乘积．同理可得**下三角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称此行列式为**对角行列式**，其值也等于主对角线上元素的乘积．

## 习题　1-1

1. 确定下列排列的逆序数，指出它们的奇偶性．

32415，413265，6427531，$12\cdots n$.

2. 确定下列各项所冠的正负号：

(1) 在四阶行列式中$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$；

（2）在五阶行列式中 $a_{31}a_{12}a_{53}a_{24}a_{45}$；

（3）在六阶行列式中 $a_{32}a_{54}a_{41}a_{65}a_{13}a_{26}$.

3. 写出 4 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中包含因子 $a_{42}a_{23}$ 的项，并指出正负号.

4. 写出 4 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中所有取负号且包含因子 $a_{23}$ 的项.

5. 按行列式的定义计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

（4）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

## 1.2　$n$ 阶行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式，一般是较繁琐的．本节我们从行列式的定义推导出行列式的一些性质，以简化行列式的计算．

先介绍转置行列式的概念．对行列式