



BEIHUA DAXUE WENKU

北华大学文库

国家自然科学基金资助项目资助出版

小波分析理论 及工程应用

XIAOBO FENXI LILUN JI
GONGCHENG
YINGYONG



◎ 谢成俊 著



东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

小波分析理论及 工程应用

解成俊



ISBN 7-302-08052-8
定价：20.00元

计算机系列
(13052) 号

7-302-08052-8

08052-8

www.nenp.com

lib@nenp.com

图书馆中心

东北师范大学图书馆

长春市人民大街

25001号

电话：0431-5962000

0431-5962000

0431-5962000

东北师范大学出版社
长春

元 00.51, 待审

图书在版编目 (CIP) 数据

小波分析理论及工程应用/解成俊著. —长春: 东北
师范大学出版社, 2007. 12

ISBN 978 - 7 - 5602 - 5092 - 2

I. 小... II. 解... III. 小波分析 IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 088131 号

☐责任编辑: 孙维石 ☐封面设计: 李冰彬

☐责任校对: 曲 颖 ☐责任印制: 张允豪

东北师范大学出版社出版发行
长春市人民大街 5268 号 (130024)

销售热线: 0431—85687213

传真: 0431—85691969

网址: <http://www.nenup.com>

电子函件: sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

吉林省吉新月历制版印刷有限公司印装

长吉公路南线 1 公里处 (130031)

2007 年 12 月第 1 版 2007 年 12 月第 1 次印刷

幅面尺寸: 148mm×210mm 印张: 8.5 字数: 243 千

印数: 001—500 册

定价: 17.00 元



国家自然科学基金资助项目 (60672156)

资助出版



北华大学学术专著出版基金 (2006013)

资助出版，已列入北华大学文库

前 言

本书全面阐述了小波分析的基本概念和基本算法,介绍了小波分析在信号分析、图像压缩、模式识别、跟踪等图像分析中的应用。

小波分析是泛函分析、数值分析等的最完美结晶,在信号处理、图像处理、语音分析、模式识别、量子物理及众多非线性科学等领域,它被认为是近年来在工具及方法上的重大突破。小波分析在理论、算法、技术工具、方法方面仍有很多须要研究和解决的问题。为了便于读者的理解,我们尽量用通俗的语言来叙述其思想,揭示其实质。读者同时会发现,它也不失数学上的完美。

本书系北华大学学术成果,由国家自然科学基金资助项目(60672156)和北华大学学术专著出版基金(2006013)资助出版,已列入北华大学文库。

本书适合做高等学校计算机、信息、电子类专业本科生、硕士研究生的教材以及一般工程技术人员的参考书。

作 者

2007年5月30日

目 录

第一章 多分辨率分析的基本性质	1
§ 1.1 Shannon 采样定理	1
§ 1.2 多分辨率分析的基本性质	3
1.2.1 多分辨率分析 MRA 定义	4
1.2.2 两尺度关系及性质	6
§ 1.3 几种常用的两尺度形式	14
§ 1.4 正交投影关系及一维小波变换	15
第二章 正交紧支集小波	22
§ 2.1 Daubechies 正交小波滤波器	22
§ 2.2 尺度函数、小波函数的计算	26
§ 2.3 小波滤波器能量集中性质的实验研究	37
§ 2.4 Coiflet 正交小波滤波器结构	39
§ 2.5 Symlet 正交小波滤波器结构	44
第三章 双正交小波变换	50
§ 3.1 双正交小波的性质	50
§ 3.2 双正交小波变换快速算法	63
§ 3.3 典型双正交小波滤波器	68
3.3.1 B 样条双正交小波滤波器	68

3.3.2 Antio97 双正交小波滤波器	73
第四章 多维小波变换	75
§ 4.1 二维张量积正交小波变换	75
4.1.1 二维多分辨率分析的基本概念	75
4.1.2 二维小波分解快速算法	77
4.1.3 二维小波重构快速算法	80
§ 4.2 三维小波变换	82
4.2.1 三维多分辨率分析的基本概念	82
4.2.2 三维小波分解快速算法	87
4.2.3 三维小波重构快速算法	89
第五章 向量小波变换和小波包变换	94
§ 5.1 向量小波性质	94
§ 5.2 向量小波变换分解快速算法	95
§ 5.3 向量小波变换重构快速算法	98
§ 5.4 向量小波变换预滤波	99
§ 5.5 小波包变换	103
§ 5.6 小波包算法的实现	105
§ 5.7 小波包算法的改进及在图像压缩中的应用	107
第六章 提升方案	109
§ 6.1 提升方案的概念	110
§ 6.2 提升方案基本原理	111
§ 6.3 基于提升方案的整数 $CDF(m, n)$ 双正交小波变换	113
§ 6.4 基于提升方案的整数 $Deslauriers - Dubuc(m, n)$ 插值双正交小波变换	117
§ 6.5 其他小波提升方案	120
§ 6.6 二维提升方案	120
§ 6.7 滤波器约束条件对小波变换 提升格式及滤波效果影响的研究	126

§ 6.8 整数小波变换提升格式能量集中性质	
实验研究	128
第七章 小波分析在模式识别中的应用研究	131
§ 7.1 基于 B 样条小波的边缘检测算子	131
7.1.1 小波变换边缘检测的优点	131
7.1.2 B 样条小波边缘检测算子	132
§ 7.2 边缘检测的小波变换算法	134
§ 7.3 不变矩特征及实验	135
7.3.1 不变矩理论	135
7.3.2 仿真实验	137
§ 7.4 基于小波变换的快速匹配	139
§ 7.5 具有平移、伸缩、旋转不变性的	
小波特征的目标跟踪方法	142
7.5.1 灰度模板匹配跟踪和特征跟踪	142
7.5.2 Gabor 小波介绍	143
7.5.3 利用 Gabor 小波特征进行目标跟踪的方法	144
第八章 小波变换在图像压缩中的应用研究	146
§ 8.1 嵌入式小波零树编码算法(EZW)	146
§ 8.2 集合的分层树剖分编码算法(SPIHT)	151
8.2.1 SPIHT 算法具体符号规定	151
8.2.2 SPIHT 算法具体实现过程	152
8.2.3 编码图像自适应小波变换设计	155
8.2.4 SPIHT 编码 VC++ 数据结构及实现	155
§ 8.3 EZW 和 SPIHT 编码方法实例	158
8.3.1 EZW 编码方法例子	158
8.3.2 SPIHT 编码方法例子	162
§ 8.4 小波变换约束条件的简单实例	165
§ 8.5 小波变换传递误差、尺度、加权量化	
对图像压缩质量影响的实验研究	169

8.5.1	小波变换域传递误差、尺度、加权量化	169
8.5.2	小波变换边界延拓问题研究	170
8.5.3	传递误差对 SPIHT 编码图像压缩的影响	173
8.5.4	小波变换尺度对 SPIHT 编码图像压缩的影响	174
8.5.5	加权量化对 SPIHT 编码图像压缩的影响	174
8.5.6	SPIHT 无损压缩实验结果及讨论	177
§ 8.6	基于 Rice Coding 算法的图像压缩	181
8.6.1	Rice Coding 概述	181
8.6.2	改进的 Rice Coding 算法	182
8.6.3	实验结果和结论	186
8.6.4	改进的 Rice Coding 算法其他标准测试图像压缩实验	190
8.6.5	改进的 Rice Coding 算法彩色图像压缩仿真实验结果	192
§ 8.7	三维小波变换在序列视频图像压缩编码中的 应用	194
8.7.1	图像序列的三维小波分解	194
8.7.2	三维 SPIHT 算法	199
8.7.3	基于三维小波变换的视频图像压缩实验结果和讨论	201
第九章	用 Visual C++ 实现小波分析编程	220
§ 9.1	用 Visual C++ 建立一个工程	220
§ 9.2	添加用户自己的应用程序接口	225
§ 9.3	在 VC++ 应用程序中编写 DLL 应用程序	228
§ 9.4	VC++ 编程实现小波变换	229
§ 9.5	DLL 函数调用举例	237
§ 9.6	MATLAB 的各种小波基分解后的子带构成情况	247
§ 9.7	使用 VC++ DLL 函数调用的优点	250
参考文献		252

第一章 多分辨率分析的基本性质

§ 1.1 Shannon 采样定理

设信号函数 $f(x)$ 的频谱 $f(\omega)$ 限制于 $[0, 2\pi f_m]$ 中, 即

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx & |\omega| \leq 2\pi f_m \\ 0 & |\omega| > 2\pi f_m \end{cases}$$

其中, f_m 为信号 $f(x)$ 的最高频率. 令 $B = 2\pi f_m, V_B = [0, B]$.

定 义

称 $f(x)$ 是一带宽 B 有限的函数, 则 $f \in V_B = \{f(x), \text{当 } |\omega| \geq B \text{ 时, } \hat{f}(\omega) = 0\}$.

Shannon 采样定理

设 $f(x)$ 是一带宽有限的函数, 则当采样间隔 $\Delta \leq \frac{\pi}{B}$ 时, 集合 $\{f(k\Delta), k \in \mathbb{Z}\}$ 可以唯一确定地表示 $f(x)$, 并可以表示为

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\Delta) \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\Delta}(x - k\Delta)\right]}{\pi \Delta(x - k\Delta)}$$

在特定情形 $B = \pi, \Delta = 1$ 时, 对于 $f \in V_\pi$, 记 $\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, 可

以证明

$$\langle \phi(x-k), \phi(x-l) \rangle = \int_R \phi(x-k) \overline{\phi(x-l)} dx = \delta_{kl}$$

并且 $\{\phi(x-k), k \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ 构成了 V_π 的标准正交基。

Shannon 采样定理可以写成如下形式:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k) \frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k) \phi(x-k)$$

为了得到 $L^2(R)$ 的标准正交基, 作变换

$$f(x) \rightarrow f(2x), V_\pi \rightarrow V_{2\pi}.$$

对于 $f \in V_{2\pi}$, 取 $\Delta = \frac{1}{2}$, 则有

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k}{2}\right) \frac{\sin 2\pi\left(x - \frac{k}{2}\right)}{2\pi\left(x - \frac{k}{2}\right)} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{k}{2}\right) \phi(2x-k)$$

可以证明

$$\langle \phi(2x-k), \phi(2x-l) \rangle = \int_R \phi(2x-k) \overline{\phi(2x-l)} dx = 2\delta_{kl}$$

将上式改写成

$$\langle \sqrt{2}\phi(2x-k), \sqrt{2}\phi(2x-l) \rangle = \int_R \phi(2x-k) \overline{\phi(2x-l)} dx = \delta_{kl}$$

故 $\{\sqrt{2}\phi(2x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 $V_{2\pi}$ 的标准正交基。

依此类推, 并作变换 $f(x) \rightarrow f(2^n x)$:

$$V_\pi \rightarrow V_{2^n \pi} = \{f(x) \mid \text{当 } |\omega| \geq 2^n \pi \text{ 时, } \hat{f}(\omega) = 0\}$$

并且 $\{2^{\frac{n}{2}}\phi(2^n x - k), k \in \mathbf{Z}\} = \left\{ 2^{\frac{n}{2}} \frac{\sin \pi(2^n x - k)}{\pi(2^n x - k)}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ 构成了

$V_{2^n \pi}$ 的标准正交基。

由此, 我们得到了一串 $L^2(R)$ 的闭子空间 $V_{2^n \pi}, n \in \mathbf{Z}$, 并且有

$$\begin{aligned} V_{2^n \pi} &\subset V_{2^{n+1} \pi} \\ \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} V_{2^n \pi} &= L^2(R) \\ \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} V_{2^n \pi} &= \{0\} \end{aligned}$$

对于 $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, 则有 $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$, 令 $x_n = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 2^n \pi \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$,

则 $\hat{f}(\omega)$ 可以表示为

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n(\omega)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n(\omega)$$

其中 $\hat{f}_n(\omega) = \hat{f}(\omega)(x_n - x_{n-1})$, 当 $|\omega| \geq 2^n \pi$ 时 $\hat{f}_n(\omega) = 0$, 所以 $f(x) = \sum_n f_n(x)$, $f_n \in V_{2^n \pi}$, 从而有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^n}\right) 2^{\frac{n}{2}} \frac{\sin \pi(2^n x - k)}{\pi(2^n x - k)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{n,k} 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x - k) \end{aligned}$$

对于 $2^{\frac{n}{2}} \frac{\sin \pi(2^n x - k)}{\pi(2^n x - k)}$, n 固定, k 变化, 则该式构成了标准正交基; 而

k 固定, n 变化, 则该式并不构成标准正交基。所以 $\{2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x - k), n, k \in \mathbb{Z}\}$ 并不构成 $L^2(\mathbb{R})$ 上的标准正交基。因为 $V_{2^n \pi} \subset V_{2^{n+1} \pi}$, 且 $V_{2^n \pi}$ 和 $V_{2^{n+1} \pi}$ 二者不一定正交, 用 $W_{2^n \pi}$ 表示 $V_{2^n \pi}$ 在 $V_{2^{n+1} \pi}$ 中的正交补空间。为了表述简洁, 将 $V_{2^n \pi}$ 写成 V_n , 将 $V_{2^{n+1} \pi}$ 写成 V_{n+1} , 将 $V_{2\pi}$ 写成 V_1 , 将 V_π 写成 V_0 , 则 V_{n+1} 可以写成

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= W_n \oplus V_n = W_n \oplus W_{n-1} \oplus V_{n-1} \\ &= W_n \oplus W_{n-1} \oplus W_{n-2} \oplus V_{n-2} = \bigoplus_{j=-l}^n W_j \oplus V_{-l} \end{aligned}$$

因为 $\lim_{j \rightarrow \infty} V_{-j} = \{0\}$, 所以 $L^2 \mathbb{R} = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$ 。

§ 1.2 多分辨率分析的基本性质

Schauder 基定义

称 $\{S_k, k \in \mathbb{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的 Schauder 基, 对 $\forall f \in H$, 都存

在唯一的 $\{C_k, k \in \mathbf{Z}\} \in L^2(\mathbf{Z})$, 使得 $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} C_k S_k$ 。

Riesz 基定义

称 $\{r_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 Hilbert 空间 H 的 Riesz 基, 如果

(1) $\{r_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 H 的 Schauder 基。

(2) 对 $\forall \{C_k, k \in \mathbf{Z}\} \in L^2(\mathbf{Z})$ 都存在正的常数 $0 < A < B < +\infty$, 使得

$$A \sum_{k \in \mathbf{Z}} |C_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbf{Z}} C_k r_k \right\|^2 \leq B \sum_{k \in \mathbf{Z}} |C_k|^2$$

1.2.1 多分辨率分析 MRA 定义

MRA 定义

空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的多分辨率分析是指满足下列性质的一系列闭子空间 $\{V_j, j \in \mathbf{Z}\}$ 。

(1) 一致单调性 $\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$

(2) 渐进完全性 $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$

(3) 伸缩规则性 $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbf{Z}$

(4) 平移不变性 $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x-k) \in V_0, \forall k \in \mathbf{Z}$

(5) Riesz 基存在性 存在 $r(x) \in V_0$, 使得 $\{r(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的 Riesz 基, 称 $r(x)$ 为“多尺度分析的生成元”。

定理: 设 $\{r(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 V_0 的 Riesz 基, 则 $\exists \phi(x) \in V_0$, 使得 $\{\phi(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 V_0 的标准正交基。

证明:

$$\text{令 } \phi(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} C_k r(x-k)$$

只要 $\phi(x)$ 满足

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(x-k) \overline{\phi(x-l)} dx = \delta_{kl}$$

则 $\{\phi(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ 构成了 V_0 的标准正交基。

将 $\phi(x)$ 进行 Fourier 变换, 得

$$\hat{\phi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} C_k e^{-ik\omega} \hat{r}(\omega) = m(\omega) \hat{r}(\omega)$$

其中 $m(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{-ik\omega}$, 显然 $m(\omega)$ 是以 2π 为周期的函数, 下面来求 $m(\omega)$ 的表达式:

$$\begin{aligned}
 & \int_R \phi(x-k) \overline{\phi(x-l)} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{\phi}(\omega) e^{-ik\omega} \overline{\hat{\phi}(\omega) e^{-il\omega}} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_R |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_R |m(\omega)|^2 |\hat{r}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} |m(\omega)|^2 |\hat{r}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega} d\omega \quad (\text{将 } R \text{ 上的积分变成成分} \\
 & \quad \text{段积分再求和}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |m(v+2n\pi)|^2 |\hat{r}(v+2n\pi)|^2 |e^{-i(k-l)(v+2n\pi)}| dv \quad (\omega = v + 2n\pi) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |m(v)|^2 |\hat{r}(v+2n\pi)|^2 |e^{-i(k-l)(v+2n\pi)}| dv \quad [m(\omega) \text{ 是以 } 2\pi \\
 & \quad \text{为周期的函数}] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |m(v)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{r}(v+2n\pi)|^2 |e^{-i(k-l)v}| dv
 \end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-l)v} dv = \delta_{kl}$$

所以只要取 $m(\omega) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{r}(\omega + 2n\pi)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$, 则 $\int_R \phi(x-k)$

$\overline{\phi(x-l)} dx = \delta_{kl}$, 这样有

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{r}(\omega + 2n\pi)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{r}(\omega)$$

如此构造的 $\phi(x)$ 及其整平移构成了 V_0 空间的标准正交基。

尺度函数定义

因为 $\hat{\phi}(\omega) = m(\omega) \hat{r}(\omega)$, 所以 $\hat{r}(\omega)$ 可以表示为

$$\hat{r}(\omega) = m(\omega)^{-1} \hat{\phi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k e^{-ik\omega} \hat{\phi}(\omega)$$

对上式取 Fourier 反变换, 得

$$r(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k \phi(x-k)$$

我们称满足下式的 $\phi(x)$ 为 V_0 空间的尺度函数。

$$\begin{cases} \hat{\phi}(\omega) = \left[\sum_{n \in \mathbf{Z}} |\hat{r}(\omega + 2n\pi)|^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \hat{r}(\omega) \\ r(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k \phi(x-k) \end{cases}$$

1.2.2 两尺度关系及性质

$\phi(x) \in V_0$, $\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{-1} \subset V_0$, 则 $\exists \{h_k, k \in \mathbf{Z}\} \in L^2(\mathbf{R})$, 使得

$$\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_k h_k \phi(x-k)$$

上式等价于

$$\hat{\phi}(2\omega) = \sum_k h_k e^{-ik\omega} \hat{\phi}(\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega)$$

其中, $H(\omega) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k e^{-ik\omega}$, 通常称 $H(\omega)$ 为“低通滤波器”或“两尺度符号”, $H(\omega)$ 是以 2π 为周期的函数, 所以两尺度关系也可以理解成两个空间 V_{-1} 或 V_0 基底之间的关系。

定理: 尺度函数 $\phi(x)$ 、低通滤波器 $H(\omega)$ 具有如下性质:

$$(1) \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

$$(2) |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$$

$$(3) H(0) = 1$$

证明:

$$(1) \text{ 因为 } \hat{\phi}(\omega) = \left(\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{r}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{r}(\omega)$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } & \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} |m(\omega + 2k\pi) \hat{r}(\omega + 2k\pi)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m(\omega) \hat{r}(\omega + 2k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m(\omega)|^2 |\hat{r}(\omega + 2k\pi)|^2 \\
&= |m(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{r}(\omega + 2k\pi)|^2 \\
&= \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{r}(\omega + 2k\pi)|^2 \right]^{-1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{r}(\omega + 2k\pi)|^2 \right) \\
&\quad (m(\omega) = \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{r}(\omega + 2n\pi)|^2 \right]^{-\frac{1}{2}}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

在以上证明中,用到了 $m(\omega + 2k\pi) = m(\omega)$, 因为 $m(\omega)$ 是以 2π 为周期的函数,所以 $m(\omega)$ 吸收了 $2k\pi$ 。

以上证明还可以采用下述方法:

$$\int_R \phi(x-k) \overline{\phi(x-l)} dx = \delta_{kl}$$

这样:

$$\begin{aligned}
&\int_R |\phi(x)|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_R |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{令 } \omega = \omega - 2k\pi) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega
\end{aligned}$$

由于 $\int_R |\phi(x)|^2 dx = 1$, 所以 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$ 。

$$(2) \text{ 因为 } \hat{\phi}(2\omega) = \sum_k h_k e^{-ik\omega} \hat{\phi}(\omega) = H(\omega) \hat{\phi}(\omega)$$

$$\text{有 } \hat{\phi}(2\omega + 2k\pi) = H(\omega + k\pi) \hat{\phi}(\omega + k\pi)$$

所以

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(2\omega + 2k\pi)|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 |H(\omega + k\pi)|^2 \\
 &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2l\pi)|^2 |H(\omega + 2l\pi)|^2 + \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}[\omega + (2l+1)\pi]|^2 |H[\omega + (2l+1)\pi]|^2 \\
 &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2l\pi)|^2 |H(\omega)|^2 + \sum_{l \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}[\omega + (2l+1)\pi]|^2 |H(\omega + \pi)|^2 \\
 &= |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \hat{\phi}(2\omega) &= H(\omega) \hat{\phi}(\omega) \\
 &= H(\omega) H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
 &= H(\omega) H\left(\frac{\omega}{2}\right) H\left(\frac{\omega}{4}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{4}\right) \\
 &= \prod_{j=p}^0 H(\omega 2^{-j}) \hat{\phi}(\omega 2^{-p}) \\
 &= \prod_{j=-\infty}^0 H(\omega 2^{-j}) \hat{\phi}(0)
 \end{aligned}$$

若 $\hat{\phi}(0) = 0$, 则可以导出对于所有的 $\hat{\phi}(\omega)$ 都将等于 0, 这是矛盾的, 所以 $\hat{\phi}(0) \neq 0$.

$$\text{因此, 有 } \hat{\phi}(0) = H(0) \hat{\phi}(0)$$

$$\text{故 } H(0) = 1$$

证毕。

设小波函数 $\Psi(x) \in W_0 \subset V_0$, $\frac{1}{2}\Psi\left(\frac{x}{2}\right) \in W_{-1} \subset V_0$, $\exists \{g_k, k \in \mathbf{Z}\} \in L^2(\mathbf{Z})$, 使得

$$\frac{1}{2}\Psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \phi(x-k)$$

上式左边的 Fourier 变换: